УДК 517.9

С. А. Плакса (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В КРУГЕ МЕРИДИАННОЙ ПЛОСКОСТИ. I *

We develop new methods of the solution of boundary value problems in the meridional plane of axially symmetric potential solenoid field with regard for character and specific properties of axially symmetric problems. We explicitly obtain solutions of Dirichlet problems for axially symmetric potential and for the Stokes flow function in a disk.

Розроблено нові методи розв'язання крайових задач в меридіанній площині осесиметричного потенціального соленоїдального поля, що враховують природу та специфічні особливості осесиметричних задач. Одержано в явному вигляді розв'язки задач Діріхле для осесиметричного потенціалу та функції течії Стокса в крузі.

Основными характеристиками пространственного потенциального соленоидального поля, симметричного относительно оси Ox, в его меридианной плоскости xOy являются потенциал $\varphi(x, y)$ и функция тока Стокса $\psi(x, y)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$y\Delta\varphi(x, y) + \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

и

$$y\Delta\psi(x, y) - \frac{\partial\psi(x, y)}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

где $\Delta := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Функция $\psi(x, y)$ должна также удовлетворять условию

$$\psi(x, 0) \equiv 0, \tag{3}$$

которое, например, в модели течения идеальной жидкости выражает отсутствие перетекания жидкости через ось Ox.

Качественная теория решений уравнений (1), (2) основана на том факте, что вне произвольной окрестности оси Ox уравнения (1), (2) являются уравнениями эллиптического типа. Поэтому функции φ и ψ вне указанной окрестности являются компонентами квазиконформных отображений, теория которых хорошо развита.

Тем не менее, как отмечено в монографии [1, с. 18], количественная теория решений уравнений (1), (2) развита в значительно меньшей степени, чем для гармонических функций на плоскости. Это естественным образом связано с вырождением типа уравнений (1), (2) на оси Ox.

Однако главную причину меньшего развития количественной теории пространственных потенциальных полей, в целом, и решений уравнений (1), (2), в частности, М. А. Лаврентьев усматривал в отсутствии для их исследования математического аппарата, аналогичного аппарату аналитических функций комплексной переменной при исследовании плоских потенциальных полей (см., например, [1, с. 18, 205]).

В работах [2–4] установлена связь осесимметричных потенциальных полей с аналитическими функциями векторного аргумента и получены новые формулы решений уравнений (1), (2). Теперь появилась возможность построения именно количественной теории решений уравнений (1), (2), которая была бы столь же полной, как и классическая теория гармонических функций на плоскости.

---

* Выполнена при частичной поддержке Министерства Украины по вопросам науки и технологий (договор № 2М/1401-97).

Известно, что задача Дирихле является основной краевой задачей для уравнений эллиптического типа, на которой, в первую очередь, аппробируются новые методы решения краевых задач.

Для двумерного и трехмерного уравнений Лапласа разработаны различные методы эффективного решения задачи Дирихле (см., например, [5 – 10]). Однако непосредственное применение этих методов к решению задач Дирихле для осесимметричного потенциала и функции тока Стокса сопряжено со значительными трудностями.

Представляется очевидным тот факт, что для решения краевых задач в меридианной плоскости потенциального поля с осевой симметрией необходимо разработать специальные методы, которые учитывали бы природу и специфические особенности осесимметричных задач.

В работе [11], исходя из формул Грина для операторов Эйлера – Пуассона – Дарбу, получены интегральные представления решений уравнений (1), (2) через значения этих функций и их нормальных производных на границе области. Далее, в случае круга в указанных интегральных представлениях исключаются слагаемые, содержащие нормальные производные. Таким путем в работе [11] получены, в частности, решения задач Дирихле для осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в круге в виде аналогов интеграла Пуассона.

В работе [12] решение задачи Дирихле для уравнения, обобщающего уравнение (1), в области, граница которой является кривой Ляпунова, с помощью потенциала двойного слоя, ассоциированного с этим уравнением, редуцировано к решению интегрального уравнения Фредгольма.

Отметим также, что решение задачи Дирихле для функции тока Стокса известно в отдельных случаях задачи обтекания осесимметричных тел (см. [1, 13, 14]).

Целью наших исследований является разработка новых методов решения задач Дирихле для осесимметричного потенциала $\varphi(x, y)$ и функции тока Стокса $\psi(x, y)$ и получение интегральных уравнений для решения этих задач в областях более общего, чем в работе [12], вида. Полученные в работах [2 – 4] новые интегральные представления решений уравнений (1), (2) позволяют использовать для решения краевых задач в меридианной плоскости методы теории особых интегральных уравнений. В частности, в данной работе таким путем получены в явном виде решения задач Дирихле для осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в круге меридианной плоскости. Кроме того, исследованы граничные свойства интегральных представлений работы [2] для функций $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ в круге. Случай круга рассмотрен здесь как модельный для аппробации методики исследования.

1. Постановка задач. Граничные свойства осесимметричного потенциала и функции тока Стокса. Пусть D — область меридианной плоскости xOy, симметричная относительно оси Ox. Замыкание области D обозначим через $\overline{D}$, а ее границу — ∂D.

Рассмотрим *задачу Дирихле для осесимметричного потенциала* об отыскании непрерывной в $\overline{D}$ функции $\varphi(x, y)$, которая в области D удовлетворяет уравнению (1), а на границе ∂D принимает заданные значения $\varphi_{\partial D}(x, y)$, т. е. удовлетворяет равенству $\varphi(x, y) = \varphi_{\partial D}(x, y)$ при всех $(x, y) \in \partial D$.

Рассмотрим также *задачу Дирихле для функции тока Стокса* об отыскании непрерывной в $\overline{D}$ функции $\psi(x, y)$, которая в области D удовлетворяет уравнению (2) и условию (3), а на границе ∂D принимает заданные значения $\psi_{\partial D}(x, y)$, т. е. выполняется равенство $\psi(x, y) = \psi_{\partial D}(x, y)$ при всех $(x, y) \in \partial D$.

Отметим, что осесимметричный потенциал $\varphi(x, y)$ в области D подчиняется принципу максимума. Другими словами, если $|\varphi(x, y)|$ достигает локального максимума во внутренней точке области D, то $\varphi(x, y) = \mathrm{const}$ всюду в D. Это следует из того, что функция $\Phi(x, Y, Z) := \varphi(x, \sqrt{Y^2 + Z^2})$ является гармонической в области трехмерного евклидова пространства, образованной вращением области D относительно оси Ox.

Функция тока Стокса $\psi(x, y)$, удовлетворяющая условию (3), также подчиняется принципу максимума в области D. Действительно, принцип максимума выполняется для решений уравнения (2) в областях $\{(x, y) \in D : y > \varepsilon\}$ и $\{(x, y) \in D : y < -\varepsilon\}$ при любом $\varepsilon > 0$ (см., например, [8, с. 13]). Отсюда при условии (3) очевидным образом следует справедливость принципа максимума для функции $\psi(x, y)$ в области D.

Естественным следствием принципа максимума является единственность решения задач Дирихле для осесимметричного потенциала и для функции тока Стокса.

Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная прямая комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Область плоскости $\mathbb{C}$, конгруэнтную области D меридианной плоскости xOy при соответствии $z = x + iy$, $(x, y) \in D$, будем обозначать через D_z, ее замыкание — через $\overline{D_z}$, а границу — через ∂D_z.

Обозначим через $L_p(\partial D_z)$ банахово пространство суммируемых в степени p функций $f\colon \partial D_z \to \mathbb{C}$ с нормой $\|f\|_{L_p} := \int_{\partial D_z} |f(t)|^p |dt|$, а через $L_\infty(\partial D_z)$ — банахово пространство существенно ограниченных функций $f\colon \partial D_z \to \mathbb{C}$ с нормой $\|f\|_{L_\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \partial D_z} |f(t)|$.

Если $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, то $\sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}$ понимаем как непрерывную ветвь аналитической функции $G(t) = \sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}$ с разрезом $\{t \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} t = \operatorname{Re} z, |\operatorname{Im} t| \leq |\operatorname{Im} z|\}$ такую, что $G(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R} : t > \operatorname{Re} z$.

Сингулярные интегралы Коши по локально спрямляемой кривой γ, $\gamma \subset C$, понимаются в смысле главного значения:

$$\int_\gamma \frac{f(t)}{t - z}\, dt := \lim_{N \to \infty,\ \varepsilon \to 0} \int_{\{t \in \gamma :\, |t| \leq N,\ |t - z| \geq \varepsilon\}} \frac{f(t)}{t - z}\, dt, \qquad z \in \gamma,$$

если предел в правой части равенства существует.

Условимся, что всюду в дальнейшем D — единичный круг меридианной плоскости xOy с центром в начале координат.

В работе [2] получены новые формулы решений уравнений (1), (2). Из теорем 6, 7 работы [2] следует, что, по существу, любой осесимметричный потенциал в круге D и соответствующая ему функция тока Стокса выражаются формулами

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{F(t)}{\sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}}\, dt & \text{при } y \neq 0; \\ F(x) & \text{при } y = 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$\psi(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{F(t)(t - x)}{\sqrt{(t - z)(t - \bar{z})}}\, dt & \text{при } y \neq 0; \\ 0 & \text{при } y = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $(x, y) \in D$, $z = x + iy$, F — некоторая функция, голоморфная в круге D_z. Здесь γ — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая, которая ограничивает область D'_z такую, что $\overline{D'_z} \subset D_z$, и отрезок, соединяющий точки z и $\bar{z}$, содержится в области D'_z.

Очевидно, что если теперь функция F принадлежит классу Харди H_1 (см., например, [15, с. 78]), то для всех $(x, y) \in D$ справедливы формулы

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt & \text{при} \quad y \neq 0; \\ F(x) & \text{при} \quad y = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\psi(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{F(t)(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt & \text{при} \quad y \neq 0; \\ 0 & \text{при} \quad y = 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $z = x + iy$, $F(t)$ — угловые граничные значения функции F, которые, как известно [15, с. 82], существуют почти во всех точках $t \in \partial D_z$.

В следующей теореме приведены достаточные условия непрерывной продолжимости функции

$$f_{\text{pot}}(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{f(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt & \text{при} \quad \operatorname{Im} z \neq 0; \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\partial D_z} \dfrac{f(t)}{t-z}\, dt & \text{при} \quad \operatorname{Im} z = 0 \end{cases} \tag{8}$$

из области D_z на границу ∂D_z.

Теорема 1. *Если $f \in L_p(\partial D_z)$, $2 < p \leq \infty$, то функция f_{pot} непрерывна на множестве $\overline{D_z} \setminus \{-1; 1\}$. При этом для каждой точки $z_0 \in \partial D_z \setminus \{-1; 1\}$ и любой точки $z_1 \in \partial D_z$, для которой $|z_1 - z_0| \leq \frac{1}{2}|\operatorname{Im} z_0|$, выполняется неравенство*

$$|f_{\text{pot}}(z_1) - f_{\text{pot}}(z_0)| \leq c\, \|f\|_{L_p} \frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}}\, \omega(|z_1 - z_0|), \tag{9}$$

где $\omega(\varepsilon) = \varepsilon^{(p-2)/2p}$ при $2 < p < \infty$ и $\omega(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\ln\frac{1}{\varepsilon}$ при $p = \infty$, а c — некоторая абсолютная постоянная.

Если, кроме того, существуют сингулярные интегралы $\int_{\partial D_z} \frac{f(t)}{t \pm 1}\, dt$, а функция f имеет пределы $\lim\limits_{t \to \pm 1,\ t \in E_f} f(t) =: f(\pm 1)$ по некоторому множеству $E_f \subset \partial D_z$ такому, что линейная мера Лебега разности $\partial D_z \setminus E_f$ равна нулю, то функция f_{pot} непрерывно продолжается из области D_z также в точки ± 1 и при этом

$$\lim_{z \to 1,\ z \in \partial D_z} f_{\text{pot}}(z) = \frac{1}{2} f(1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_z} \frac{f(t)}{t-1}\, dt, \tag{10}$$

$$\lim_{z \to -1,\ z \in \partial D_z} f_{\text{pot}}(z) = \frac{1}{2} f(-1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_z} \frac{f(t)}{t+1}\, dt. \tag{11}$$

Доказательство. Если $f \in L_\infty(\partial D_z)$, то очевидно, что значения функции $f_{\text{pot}}(z)$ конечны во всех точках $z \in \partial D_z \setminus \{-1; 1\}$.

Пусть теперь $f \in L_p(\partial D_z)$, $2 < p < \infty$. Обозначим $q := \dfrac{p}{p-1}$. Тогда в силу неравенства Гельдера

$$\int_{\partial D_z} \left| \frac{f(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \right| |dt| \le \left(\int_{\partial D_z} |f(t)|^p \, |dt| \right)^{1/p} \left(\int_{\partial D_z} \frac{|dt|}{\left|\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}\right|^q} \right)^{1/q}$$

значения функции $f_{\mathrm{pot}}(z)$ также конечны во всех точках $z \in \partial D_z \setminus \{-1\,;1\}$.

Докажем непрерывность функции f_{pot} на множестве $\partial D_z \setminus \{-1\,;1\}$ и неравенство (9) при $2 < p < \infty$. Пусть $z_0 \in \partial D_z \setminus \{-1\,;1\}$, а точка $z_1 \in \overline{D_z}$ такая, что $\varepsilon := |z_1 - z_0| \le \dfrac{1}{2} |\mathrm{Im}\, z_0|$.

Обозначим $\Gamma_1 := \{ t \in \partial D_z \colon |t - z_0| < 2\varepsilon \}$, $\overline{\Gamma_1} := \{ \bar{t} \colon t \in \Gamma_1 \}$, $\Gamma_2 := \{ t \in \partial D_z \colon 2\varepsilon \le |t - z_0| \le |\mathrm{Im}\, z_0| \}$, $\overline{\Gamma_2} := \{ \bar{t} \colon t \in \Gamma_2 \}$, $\Gamma_3 := \partial D_z \setminus (\Gamma_1 \cup \overline{\Gamma_1} \cup \Gamma_2 \cup \overline{\Gamma_2})$. Тогда приращение функции f_{pot} в точке z_0 представляется суммой семи интегралов:

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{pot}}(z_1) - f_{\mathrm{pot}}(z_0) = {} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}}\, dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(t)}{\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)}}\, dt + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\Gamma_1}} \frac{f(t)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}}\, dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\Gamma_1}} \frac{f(t)}{\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)}}\, dt + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{f(t)\left(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)} - \sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}\right)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}\,\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)}}\, dt + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{\Gamma_2}} \frac{f(t)\left(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)} - \sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}\right)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}\,\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)}}\, dt + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{f(t)\left(\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)} - \sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}\right)}{\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}\,\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)}}\, dt =: \sum_{j=1}^{7} I_j . \end{aligned}$$

При всех $t \in \Gamma_1$ выполняются неравенства $|t - \bar{z}_1| \ge |\mathrm{Im}\, z_1| \ge \dfrac{1}{2} |\mathrm{Im}\, z_0|$ и $|t - z_1| \ge \dfrac{1}{2} |t - z_2|$, где через z_2 обозначена точка границы ∂D_z, ближайшая к точке z_1. Используя эти неравенства, а также неравенство Гельдера, получаем

$$\begin{aligned} |I_1| & \le \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\Gamma_1} |f(t)|^p \, |dt| \right)^{1/p} \left(\int_{\Gamma_1} \frac{|dt|}{\left|\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}\right|^q} \right)^{1/q} \le \\ & \le \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L_p} \frac{1}{\sqrt{|\mathrm{Im}\, z_1|}} \left(\int_{\Gamma_1} \frac{|dt|}{|t - z_1|^{q/2}} \right)^{1/q} \le \\ & \le \frac{1}{\pi} \|f\|_{L_p} \frac{1}{\sqrt{|\mathrm{Im}\, z_0|}} \left(\int_{\Gamma_1} \frac{|dt|}{|t - z_2|^{q/2}} \right)^{1/q} \le c \|f\|_{L_p} \frac{1}{\sqrt{|\mathrm{Im}\, z_0|}} \left(\int_0^{3\varepsilon} \frac{d\tau}{\tau^{q/2}} \right)^{1/q} \le \\ & \le c \|f\|_{L_p} \frac{1}{\sqrt{|\mathrm{Im}\, z_0|}} \varepsilon^{(2-q)/2q} = c \|f\|_{L_p} \frac{1}{\sqrt{|\mathrm{Im}\, z_0|}} \varepsilon^{(p-2)/2p}. \end{aligned}$$

Здесь, как и всюду в доказательстве, через c обозначены абсолютные постоянные, значения которых, вообще говоря, различны даже в пределах одной цепочки неравенств.

Модули интегралов I_2, I_3, I_4 оцениваются аналогично $|I_1|$.

При оценке интегралов I_5, I_6, I_7 используется оценка

$$\left|\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)} - \sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}\right| \le c\sqrt{|(t-z_0)(t-\bar{z}_0) - (t-z_1)(t-\bar{z}_1)|} =$$

$$= c\sqrt{|(t-z_1)(\bar{z}_0-\bar{z}_1) + (t-z_0)(z_0-z_1)|} \le$$

$$\le c\sqrt{\varepsilon\,(|t-z_1| + |t-\bar{z}_0|)}. \tag{12}$$

Оценим модуль интеграла I_5. Используя неравенство Гельдера и оценку (12), получаем

$$|I_5| \le \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\Gamma_2} |f(t)|^p\,|dt|\right)^{1/p} \left(\int_{\Gamma_2} \frac{\left|\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)} - \sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}\right|^q}{\left|\sqrt{(t-z_1)(t-\bar{z}_1)}\,\sqrt{(t-z_0)(t-\bar{z}_0)}\right|^q}\,|dt|\right)^{1/q} \le$$

$$\le c\,\|f\|_{L_p}\left(\int_{\Gamma_2}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon\,(|t-z_1| + |t-\bar{z}_0|)}}{\sqrt{|t-z_1|\,|t-\bar{z}_1|\,|t-z_0|\,|t-\bar{z}_0|}}\right)^q |dt|\right)^{1/q}. \tag{13}$$

Далее, учитывая, что при всех $t \in \Gamma_2$ выполняются неравенства $|t-\bar{z}_1| \ge$ $\ge |\operatorname{Im} z_1| \ge \frac{1}{2}|\operatorname{Im} z_0|$, $|\operatorname{Im} z_0| \le |t-\bar{z}_0| \le 3\,|\operatorname{Im} z_0|$ и $\frac{1}{2}|t-z_0| \le |t-z_1| \le$ $\le \frac{3}{2}|\operatorname{Im} z_0|$, из оценки (13) получаем соотношения

$$|I_5| \le c\,\|f\|_{L_p}\sqrt{\varepsilon}\left(\int_{\Gamma_2}\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}|\operatorname{Im} z_0| + 3\,|\operatorname{Im} z_0|}}{\sqrt{\frac{1}{2}|t-z_0|\,\frac{1}{2}|\operatorname{Im} z_0|\,|t-z_0|\,|\operatorname{Im} z_0|}}\right)^q |dt|\right)^{1/q} \le$$

$$\le c\,\|f\|_{L_p}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}}\left(\int_{\Gamma_2}\frac{|dt|}{|t-z_0|^q}\right)^{1/q} \le c\,\|f\|_{L_p}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}}\left(\int_{2\varepsilon}^{|\operatorname{Im} z_0|}\frac{d\tau}{\tau^q}\right)^{1/q} \le$$

$$\le c\,\|f\|_{L_p}\frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}}\,\varepsilon^{1/2+(1-q)/q} = c\,\|f\|_{L_p}\frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}}\,\varepsilon^{(p-2)/2p}.$$

Модуль интеграла I_6 оценивается таким же способом, как и $|I_5|$.

Оценим, наконец, $|I_7|$. Аналогично оценке (13) получаем неравенство

$$|I_7| \le c\,\|f\|_{L_p}\left(\int_{\Gamma_3}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon\,(|t-z_1| + |t-\bar{z}_0|)}}{\sqrt{|t-z_1|\,|t-\bar{z}_1|\,|t-z_0|\,|t-\bar{z}_0|}}\right)^q |dt|\right)^{1/q}. \tag{14}$$

Теперь с учетом соотношений $\frac{1}{2}|t-z_0| \le |t-z_1| \le \frac{3}{2}|t-z_0|$, $\frac{1}{3}|t-z_0| \le$ $\le |t-\bar{z}_0| \le 3\,|t-z_0|$ и $\frac{1}{6}|t-z_0| \le \frac{1}{2}|t-\bar{z}_0| \le |t-\bar{z}_1| \le \frac{3}{2}|t-\bar{z}_0| \le \frac{9}{2}|t-z_0|$, которые выполняются при всех $t \in \Gamma_3$, оценим правую часть неравенства (14) так, что будем иметь

$$|I_7| \le c\|f\|_{L_p}\sqrt{\varepsilon}\left(\int\limits_{\Gamma_2}\left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}|t-z_0|+3|t-z_0|}}{\sqrt{\frac{1}{2}|t-z_0|\,\frac{1}{6}|t-z_0|\,|t-z_0|\,\frac{1}{3}|t-z_0|}}\right)^q |dt|\right)^{1/q} \le$$

$$\le c\|f\|_{L_p}\sqrt{\varepsilon}\left(\int\limits_{\Gamma_3}\frac{|dt|}{|t-z_0|^{3q/2}}\right)^{1/q} \le c\|f\|_{L_p}\sqrt{\varepsilon}\left(\int\limits_{|\operatorname{Im} z_0|}^{d(z_0)}\frac{d\tau}{\tau^{3q/2}}\right)^{1/q} \le$$

$$\le c\|f\|_{L_p}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{|\operatorname{Im} z_0|^{3/2-1/q}},$$

где $d(z_0) := \max\limits_{t\in\Gamma_3}|t-z_0|$. Учитывая, что $\varepsilon < |\operatorname{Im} z_0|$, окончательно получаем

$$|I_7| \le c\|f\|_{L_p}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{|\operatorname{Im} z_0|^{3/2-1/q}} = c\|f\|_{L_p}\frac{\varepsilon^{1/2-1/p}}{|\operatorname{Im} z_0|^{1/2}}\frac{\varepsilon^{1/p}}{|\operatorname{Im} z_0|^{1/p}} \le$$

$$\le c\|f\|_{L_p}\frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} z_0|}}\varepsilon^{(p-2)/2p}.$$

Таким образом, из доказанных оценок интегралов I_j, $j = 1, 2, \ldots, 7$, следуют непрерывность функции f_{pot} на множестве $\overline{D_z}\setminus\{-1;1\}$ и неравенство (9) при $2 < p < \infty$.

В случае $p = \infty$ непрерывность функции f_{pot} на множестве $\overline{D_z}\setminus\{-1;1\}$ и неравенство (9) доказываются с помощью тех же рассуждений, что и при $2 < p < \infty$, с единственным очевидным упрощением: в этом случае нет необходимости при оценке интегралов I_j, $j = 1, 2, \ldots, 7$, использовать неравенство Гельдера.

Перейдем теперь к доказательству равенства (10) (заметим, что равенство (11) доказывается аналогично).

Если точка $z \in D_z$ стремится к точке 1 по вещественной прямой (т. е. $\operatorname{Im} z = 0$), то $f_{\text{pot}}(z)$ стремится к выражению, находящемуся в правой части равенства (10). Это очевидным образом следует из основной леммы Привалова [15, с. 190].

Пусть теперь точка $z \in D_z$ такая, что $\operatorname{Im} z \ne 0$ и $\delta := |z-1| < 1$. Обозначим $\Gamma_{2\delta} := \{z \in \partial D_z \colon |t-1| \le 2\delta\}$. Рассмотрим разность

$$f_{\text{pot}}(z) - \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z}\frac{f(t)}{t-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z}\frac{f(t)-f(1)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{2\delta}}\frac{f(t)-f(1)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{2\delta}}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z\setminus\Gamma_{2\delta}}\frac{\left(f(t)-f(1)\right)\left(t-1-\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}\right)}{(t-1)\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt =: I_8 - I_9 + I_{10} \quad (15)$$

и оценим модули интегралов I_8 и I_{10}.

Если $\min\limits_{t\in\partial D_z}|t-z| \ge \delta/4$, то

$$|I_8| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{2\delta}} \frac{|f(t)-f(1)|}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}|dt| \le \frac{1}{2\pi}\int_{E_f\cap\Gamma_{2\delta}} \frac{|f(t)-f(1)|}{\sqrt{\frac{\delta}{4}\frac{\delta}{4}}}|dt| \le$$

$$\le \frac{2}{\pi\delta}\sup_{|t-1|\le 2\delta,\ t\in E_f}|f(t)-f(1)|\int_{E_f\cap\Gamma_{2\delta}}|dt| \le$$

$$\le c\sup_{|t-1|\le 2\delta,\ t\in E_f}|f(t)-f(1)|.$$

В случае, когда $\min\limits_{t\in\partial D_z}|t-z| < \delta/4$, введем в рассмотрение множества $\Gamma'_{2\delta} :=$ $:= \{t\in\Gamma_{2\delta}\colon \operatorname{Im} t\operatorname{Im} z \ge 0\}$, $\Gamma''_{2\delta} := \{t\in\Gamma_{2\delta}\colon \operatorname{Im} t\operatorname{Im} z\le 0\}$ и представим I_8 суммой двух интегралов:

$$I_8 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_{2\delta}}\frac{f(t)-f(1)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''_{2\delta}}\frac{f(t)-f(1)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}}\,dt =: I'_8 + I''_8.$$

Обозначим через z_3 точку границы ∂D_z, ближайшую к точке z. Учитывая, что при $t\in\Gamma'_{2\delta}$ $|t-\bar z|\ge|\operatorname{Im} z|\ge c\delta$ и $|t-z|\ge\frac{1}{2}|t-z_3|$, оценим модуль интеграла I'_8:

$$|I'_8| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma'_{2\delta}}\frac{|f(t)-f(1)|}{\sqrt{|t-z||t-\bar z|}}|dt| \le \frac{1}{2\pi}\int_{E_f\cap\Gamma'_{2\delta}}\frac{|f(t)-f(1)|}{\sqrt{|t-z_3|c\delta}}|dt| \le$$

$$\le \frac{c}{\sqrt\delta}\sup_{|t-1|\le 2\delta,\ t\in E_f}|f(t)-f(1)|\int_{E_f\cap\Gamma'_{2\delta}}\frac{|dt|}{\sqrt{|t-z_3|}} \le$$

$$\le \frac{c}{\sqrt\delta}\sup_{|t-1|\le 2\delta,\ t\in E_f}|f(t)-f(1)|\int_0^{3\delta}\frac{d\tau}{\sqrt\tau} \le c\sup_{|t-1|\le 2\delta,\ t\in E_f}|f(t)-f(1)|.$$

Такая же оценка справедлива и для интеграла I''_8.

При оценке модуля интеграла I_{10} используется неравенство $\big|t-1-\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\big|\le c\sqrt{\delta(|t-z|+|t-1|)}$, которое устанавливается аналогично оценке (12). Учитывая также двойные неравенства $\frac{1}{2}|t-1|\le|t-z|\le\frac{3}{2}|t-1|$ и $\frac{1}{2}|t-1|\le|t-\bar z|\le\frac{3}{2}|t-1|$, которые выполняются при всех $t\in\partial D_z\setminus\Gamma_{2\delta}$, оценим $|I_{10}|$:

$$|I_{10}| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_z\setminus\Gamma_{2\delta}}\frac{|f(t)-f(1)|\,\big|t-1-\sqrt{(t-z)(t-\bar z)}\big|}{|t-1|\sqrt{|t-z|\,|t-\bar z|}}|dt| \le$$

$$\le c\int_{E_f\setminus\Gamma_{2\delta}}\frac{|f(t)-f(1)|\sqrt{\delta(|t-z|+|t-1|)}}{|t-1|\sqrt{\frac{1}{2}|t-1|\,\frac{1}{2}|t-1|}}|dt| \le$$

$$\le c\sqrt\delta\int_{E_f\setminus\Gamma_{2\delta}}\frac{|f(t)-f(1)|}{|t-1|^{3/2}}|dt| \le c\sqrt\delta\int_{2\delta}^{2}\sup_{|t-1|\le\tau,\ t\in E_f}|f(t)-f(1)|\frac{d\tau}{\tau^{3/2}}.$$

Из полученных оценок для $|I_8|$, $|I_{10}|$ и равенства (15) следует неравенство

$$\left| f_{\mathrm{pot}}(z) - \frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_z} \frac{f(t)}{t-1}\, dt \right| \le$$

$$\le c \left(\sup_{|t-1| \le 2\delta,\ t \in E_f} |f(t) - f(1)| + \sqrt{\delta} \int\limits_{2\delta}^{2} \sup_{|t-1| \le \tau,\ t \in E_f} |f(t) - f(1)| \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + \left| \int\limits_{\Gamma_{2\delta}} \frac{f(t) - f(1)}{t-1}\, dt \right| \right),$$

правая часть которого стремится к нулю при $\delta \to 0$.

Таким образом, равенство (10) доказано, и доказательство теоремы завершено.

В теоремах 2, 3 приводятся достаточные условия непрерывной продолжимости функции

$$f_{fl}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial D_z} f(t) \left(1 - \dfrac{t - \operatorname{Re} z}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}} \right) dt & \text{при } \operatorname{Im} z \ne 0; \\ 0 & \text{при } \operatorname{Im} z = 0 \end{cases} \tag{16}$$

из области D_z на границу ∂D_z.

Теорема 2. *Если $f \in L_p(\partial D_z)$, $2 < p \le \infty$, то функция f_{fl} непрерывна в $\overline{D_z}$; при этом для всех точек $z_1, z_0 \in \partial D_z$ выполняется неравенство*

$$|f_{fl}(z_1) - f_{fl}(z_0)| \le c \|f\|_{L_p} \omega(|z_1 - z_0|), \tag{17}$$

где $\omega(\varepsilon) = \varepsilon^{(p-2)/2p}$ при $2 < p < \infty$ и $\omega(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}$ при $p = \infty$, а c — некоторая абсолютная постоянная.

Доказательство. Докажем сначала равенство

$$\lim_{z \to \pm 1,\ z \in D_z} f_{fl}(z) = 0. \tag{18}$$

Пусть точка $z \in D_z$ такая, что $\operatorname{Im} z \ne 0$ и $\delta := |z - 1| < 1$, а $\Gamma_{2\delta}$ обозначает то же множество, что и в доказательстве теоремы 1. Тогда

$$f_{fl}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{2\delta}} \frac{f(t) \left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - (t - \operatorname{Re} z) \right)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_z \setminus \Gamma_{2\delta}} \frac{f(t) \left(\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - (t - \operatorname{Re} z) \right)}{\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})}}\, dt =: I_{11} + I_{12}.$$

Как и при доказательстве теоремы 1, через c будем обозначать абсолютные постоянные, значения которых, вообще говоря, различны.

Учитывая оценку $|\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} - (t - \operatorname{Re} z)| \le c |\operatorname{Im} z|$, а также используя неравенство Гельдера в случае $2 < p < \infty$, оценим $|I_{11}|$, $|I_{12}|$ подобно тому, как оценены $|I_8|$, $|I_{10}|$ при доказательстве теоремы 1. Описанным способом получаем оценку

$$|f_{fl}(z)| \le c \|f\|_{L_p} \omega_1(\delta),$$

где $\omega_1(\delta) = \delta^{(p-1)/p}$ при $2 < p < \infty$ и $\omega_1(\delta) = \delta \ln \frac{1}{\delta}$ при $p = \infty$.

Аналогично оценивается модуль функции f_{fl} в окрестности точки -1. Из полученных оценок $|f_{fl}|$ очевидным образом следует равенство (18).

Существование значений функции $f_{fl}(z)$ во всех точках $z \in \partial D_z \setminus \{-1; 1\}$ устанавливается аналогично тому, как при доказательстве теоремы 1 установлено существование в тех же точках значений функции $f_{\text{pot}}(z)$.

Пусть теперь $z_0 \in \partial D_z$ и $z_1 \in \overline{D_z}$. Обозначим $\varepsilon := |z_1 - z_0|$. Если $\min\{|\operatorname{Im} z_1|, |\operatorname{Im} z_0|\} \geq \varepsilon$, то, выполняя аналогичные выкладки, как и при доказательстве неравенства (9), получаем оценку

$$|f_{fl}(z_1) - f_{fl}(z_0)| \leq c \|f\|_{L_p} \omega(\varepsilon),$$

из которой следует непрерывность функции f_{fl} в точке z_0.

Если же $\min\{|\operatorname{Im} z_1|, |\operatorname{Im} z_0|\} < \varepsilon$, то с учетом доказанных выше оценок модуля функции f_{fl} получаем

$$|f_{fl}(z_1) - f_{fl}(z_0)| \leq |f_{fl}(z_1)| + |f_{fl}(z_0)| \leq c \|f\|_{L_p} \omega_1(\varepsilon) \leq c \|f\|_{L_p} \omega(\varepsilon).$$

Таким образом, неравенство (17) доказано, и тем самым завершено доказательство теоремы.

Теорема 3. *Пусть для функции $f\colon \partial D_z \to \mathbb{C}$ существует $\beta \in (0; 1)$ такое, что выполняется условие*

$$|f(z)| \leq c\,(|z-1|^{-\beta} + |z+1|^{-\beta}) \qquad \forall\, z \in \partial D_z \setminus \{-1; 1\}, \tag{19}$$

где постоянная c не зависит от z. Тогда функция f_{fl} непрерывна в $\overline{D}_z$, при этом для всех точек $z_1,\ z_0 \in \partial D_z$ выполняется неравенство

$$|f_{fl}(z_1) - f_{fl}(z_0)| \leq c\, \omega_0(|z_1 - z_0|),$$

в котором $\omega_0(\varepsilon) = \varepsilon^{1-\beta}$ при $\beta > 1/2$ и $\omega_0(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}$ при $\beta \leq 1/2$, а постоянная c не зависит от z_1 и z_0.

Теорема 3 доказывается по схеме доказательства теоремы 2 при $p = \infty$. В этом случае оценка некоторых интегралов очевидным образом видоизменяется для того, чтобы учесть возможный рост (19) функции f в окрестностях точек ± 1.

Заметим, что если функция $f = F$ принадлежит классу Харди H_1 [15, с. 78], то правые части равенств (6), (8), очевидно, равны. В этом случае равны и правые части равенств (7), (16).

2. Решение задачи Дирихле в круге для осесимметричного потенциала. Прежде чем приступить к решению задач Дирихле для осесимметричного потенциала и функции тока Стокса, сделаем некоторые замечания. Как следует из теорем 1–3, решение указанных задач в круге D можно найти в результате решения интегральных уравнений

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_z} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\, dt = \varphi_{\partial D}(x, y), \tag{20}$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_z} \frac{F(t)(t-x)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\, dt = \psi_{\partial D}(x, y), \tag{21}$$

где $(x, y) \in \partial D$, $y \neq 0$, $z = x + iy$, а искомая функция F должна быть голоморфной в круге D_z. Хотя функции (4), (5) удовлетворяют уравнениям (1), (2) при любой функции F, голоморфной в области D_z, однако, как это следует из теорем 6, 7 работы [2], по существу, любой осесимметричный потенциал в области D и соответствующая ему функция тока Стокса выражаются формулами (4), (5), в которых голоморфная функция F имеет свойство

$$F(\overline{z}) = \overline{F(z)} \qquad \forall\, z \in D_z. \tag{22}$$

Поэтому при решении интегральных уравнений (20), (21) можно ограничиться отысканием таких голоморфных функций F, которые удовлетворяют условию (22).

При решении интегрального уравнения (20) используются приведенные ниже леммы. Прежде чем их сформулировать, введем гельдеровские классы функций на окружности и вещественной прямой.

Обозначим через $\mathcal{H}_\alpha$ класс функций $g : \partial D_z \to \mathbb{C}$, которые удовлетворяют условию Гельдера

$$|g(z_1) - g(z_2)| \le c\,|z_1 - z_2|^\alpha \qquad \forall\, z_1, z_2 \in \partial D_z \tag{23}$$

с показателем $\alpha \in (0; 1]$, где постоянная c не зависит от z_1, z_2, и пусть $\mathcal{H}_0 := \bigcup\limits_{0<\alpha\le 1} \mathcal{H}_\alpha$. Через $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha$ обозначим класс функций $g : \partial D_z \to \mathbb{C}$, для каждой из которых при фиксированном $\alpha \in (0; 1]$ существует $\nu \in [0; \alpha)$ такое, что выполняется условие

$$|g(z_1) - g(z_2)| \le c\,(\max\{|1 - z_1^2|, |1 - z_2^2|\})^{-\nu} |z_1 - z_2|^\alpha \tag{24}$$
$$\forall\, z_1,\ z_2 \in D_z,$$

где постоянная c не зависит от z_1, z_2. Очевидно, что $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha \subset \mathcal{H}_{\alpha-\nu}$, т. е. функции класса $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha$ удовлетворяют условию Гельдера, но при этом показатель в условии Гельдера (23) при $z_1 = \pm 1$, вообще говоря, меньше, чем для точек z_1, z_2, находящихся вне произвольной фиксированной окрестности точек ± 1.

Класс функций $g_{\partial D} : \partial D \to \mathbb{R}$, для каждой из которых функция g, определенная равенством $g(x + iy) := g_{\partial D}(x, y)$ $\forall\, (x, y) \in \partial D$, принадлежит классу $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha$, будем обозначать $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$. Будем полагать также, что функция $g_* : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathcal{H}_0(\mathbb{R})$, если функция g, которая определяется равенством

$$g(z) := g_*\left(i\,\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad \forall\, z \in \partial D_z \setminus \{1\} \tag{25}$$

и в точке 1 доопределяется по непрерывности, принадлежит классу $\mathcal{H}_0$.

В следующей лемме устанавливаются условия, достаточные для того, чтобы функция g_* принадлежала классу $\mathcal{H}_0(\mathbb{R})$.

Лемма 1. *Если для функции* $g_* : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *существует предел*

$$\lim_{\tau \to \pm\infty} g_*(\tau) =: g_*(\infty)$$

и существуют $\alpha, \alpha_\infty \in (0; 1]$ *такие, что выполняются условия*

$$|g_*(\tau_1) - g_*(\tau_2)| \le c\,|\tau_1-\tau_2|^{\alpha} \qquad \forall\, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

$$|g_*(\tau) - g_*(\infty)| \le c\,|\tau|^{-\alpha_\infty} \qquad \forall\, \tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{27}$$

в которых постоянная c *не зависит от* τ_1, τ_2 *и* τ, *то* $g_* \in \mathcal{H}_0(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $0<\varepsilon<1/4$, функция g определяется равенством (25) и, кроме того, $g(1) := g_*(\infty)$. Если $z_1, z_2 \in \partial D_z$: $|z_2 - z_1| = \varepsilon$, $\operatorname{Re} z_1 \le 1/4$, то легко устанавливается неравенство $|g(z_1) - g(z_2)| \le c\,\varepsilon^{\alpha}$, где постоянная c не зависит от z_1, z_2 и ε. В случае $z_1, z_2 \in \partial D_z$: $|z_2 - z_1| = \varepsilon$, $|z_1 - 1| \le 2\sqrt[4]{\varepsilon}$ очевидным образом получаем соотношения $|g(z_1) - g(z_2)| \le$ $\le |g(z_1) - g(1)| + |g(1) - g(z_2)| \le c\,\varepsilon^{\alpha_\infty/4}$, где постоянная c не зависит от z_1, z_2 и ε.

Рассмотрим, наконец, случай $z_1, z_2 \in \partial D_z$: $|z_2 - z_1| = \varepsilon$, $\operatorname{Re} z_1 > 1/4$, $|z_1 -$ $-1| > 2\sqrt[4]{\varepsilon}$. Поскольку в этом случае $\left| i\dfrac{1+z_1}{1-z_1} - i\dfrac{1+z_2}{1-z_2}\right| < \sqrt{\varepsilon}$, то $|g(z_1) -$ $- g(z_2)| \le c\,\varepsilon^{\alpha/2}$, где постоянная c не зависит от z_1, z_2 и ε.

Таким образом, $g \in \mathcal{H}_0$ и лемма доказана.

Лемма 2. *Если функция* $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ *интегрируема на промежутке* $(0; 1]$, *ограничена на множестве* $[1; \infty)$ *и выполняется условие*

$$\lim_{s\to\infty} \varphi(s) = 0, \tag{28}$$

то

$$\lim_{\xi\to\infty} \int_0^{\xi} \frac{\varphi(s)}{\sqrt{\xi^2 - s^2}}\,ds = 0. \tag{29}$$

Доказательство. При $\xi > 4$ представим интеграл, входящий в равенство (29), суммой четырех интегралов:

$$\int_0^{\xi} \frac{\varphi(s)}{\sqrt{\xi^2 - s^2}}\,ds =$$

$$= \int_0^{1} \frac{\varphi(s)}{\sqrt{\xi^2 - s^2}}\,ds + \int_1^{\sqrt{\xi}/2} \frac{\varphi(s)}{\sqrt{\xi^2 - s^2}}\,ds + \int_{\sqrt{\xi}/2}^{\xi/2} \frac{\varphi(s)}{\sqrt{\xi^2 - s^2}}\,ds + \int_{\xi/2}^{\xi} \frac{\varphi(s)}{\sqrt{\xi^2 - s^2}}\,ds =:$$

$$=: I_{13} + I_{14} + I_{15} + I_{16}.$$

С учетом очевидных неравенств $\xi^2 - s^2 \ge \dfrac{3}{4}\xi^2$ при $s \in [0; \xi/2]$ и $\xi^2 - s^2 \ge$ $\ge \dfrac{3}{2}\xi(\xi - s)$ при $s \in [\xi/2; \xi]$ получаем оценки

$$|I_{13}| \le \frac{2}{\sqrt{3}\,\xi}\int_0^1 |\varphi(s)|\,ds, \tag{30}$$

$$|I_{14}| \le \frac{2}{\sqrt{3}\,\xi}\sup_{s\ge 1}|\varphi(s)| \int_1^{\sqrt{\xi}/2} ds = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{\xi}}\sup_{s\ge 1}|\varphi(s)|, \tag{31}$$

$$|I_{15}| \le \frac{2}{\sqrt{3}\xi} \sup_{s \ge \sqrt{\xi}/2} |\varphi(s)| \int\limits_{\sqrt{\xi}/2}^{\xi/2} ds \le \frac{1}{\sqrt{3}} \sup_{s \ge \sqrt{\xi}/2} |\varphi(s)|, \tag{32}$$

$$|I_{16}| \le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{\xi}} \sup_{s \ge \xi/2} |\varphi(s)| \int\limits_{\xi/2}^{\xi} \frac{ds}{\sqrt{\xi - s}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sup_{s \ge \xi/2} |\varphi(s)|, \tag{33}$$

из которых следует равенство (29). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть функция* $\varphi_*\colon (0, \infty) \to \mathbb{C}$ *удовлетворяет условиям*

$$|\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi)| \le c \frac{|s - \xi|^{\alpha}}{s^{\alpha_\infty} \xi^{\alpha}} \qquad \forall\, s, \xi\colon 1 \le s < \xi, \tag{34}$$

$$|\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi)| \le c \frac{|s - \xi|^{\alpha}}{s^{\alpha_0} \xi^{\alpha_1}} \qquad \forall\, s, \xi\colon 0 < s < \xi \le 3, \tag{35}$$

в которых $\alpha \in (1/2; 1]$, $\alpha_\infty \in (0; \infty)$, $\alpha_0 \in [0; 2)$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, *а постоянная* c *не зависит от* s *и* ξ. *Тогда для функции*

$$f_*(\xi) := \varphi_*(s) - \xi \int\limits_0^{\xi} \frac{s(\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi))}{(\xi^2 - s^2)^{3/2}} ds \tag{36}$$

справедливы оценки

$$|f_*(\xi)| \le \frac{c}{\xi^{\beta_\infty}} \qquad \forall\, \xi \ge 2, \tag{37}$$

$$|f_*(\xi)| \le \frac{c}{\xi^{\beta_0}} \qquad \forall\, \xi \in (0; 2), \tag{38}$$

$$|f_*(\xi + \varepsilon) - f_*(\xi)| \le c \left(\frac{\varepsilon^{\alpha - 1/2}}{\xi^{\beta_2}} + \frac{\varepsilon}{\xi^{\beta_\infty + 1}} \right) \tag{39}$$

$$\forall\, \xi \ge 2, \quad \forall\, \varepsilon \in (0; \xi/2],$$

$$|f_*(\xi + \varepsilon) - f_*(\xi)| \le c \left(\frac{\varepsilon^{\alpha - 1/2}}{\xi^{\beta_1}} + \frac{\varepsilon}{\xi^{\beta_0 + 1}} \right) \tag{40}$$

$$\forall\, \xi \in (0; 2), \qquad \forall\, \varepsilon \in (0; \xi/2].$$

Здесь $\beta_\infty := \min\{2; \alpha_\infty\}$, $\beta_0 := \max\{\alpha_0, \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha\}$, $\beta_1 := \alpha_0 + \alpha_1 - 1/2$, $\beta_2 := \alpha + \alpha_\infty - 1/2$, *а постоянная* c *не зависит от* ξ *и* ε.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из условий (34), (35) соответственно очевидным образом следуют неравенства

$$|\varphi_*(s)| \le \frac{c}{s^{\alpha_\infty}} \qquad \forall\, s \ge 1, \tag{41}$$

$$|\varphi_*(s)| \le \frac{c}{s^{\alpha_0}} \qquad \forall\, s \in (0; 3], \tag{42}$$

в которых постоянная c не зависит от s.

Оценим сначала $|f_*(\xi)|$ при $\xi \ge 2$ суммой пяти слагаемых:

$$|f_*(\xi)| \le |\varphi_*(s)| + \xi \int\limits_0^1 \frac{s\,|\varphi_*(s)|}{(\xi^2 - s^2)^{3/2}} ds + \xi |\varphi_*(s)| \int\limits_0^1 \frac{s\,ds}{(\xi^2 - s^2)^{3/2}} +$$

$$+\ \xi\int\limits_{1}^{\xi/2}\frac{s\,|\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}\,ds+\xi\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\frac{s\,|\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}\,ds\ =:\ \sum_{j=1}^{5}S_j(\xi).$$

При оценке слагаемых $S_j(\xi)$ через c будем обозначать различные постоянные, которые не зависят от ξ.

Для первого слагаемого $S_1(\xi)$ справедлива оценка (41). Учитывая неравенство (42), аналогично оценке (30) получаем оценку второго слагаемого:

$$S_2(\xi)\ \le\ \frac{c}{\xi^2}\int\limits_0^1 s^{1-\alpha_0}\,ds\ \le\ \frac{c}{\xi^2}.$$

Для третьего слагаемого, учитывая неравенство (41), имеем оценку $S_3(\xi)\le$ $\le\dfrac{c}{\xi^{2+\alpha_\infty}}$. Оценка четвертого слагаемого проводится с учетом условия (34) аналогично оценкам (31), (32):

$$S_4(\xi)\ \le\ \frac{c}{\xi^2}\int\limits_1^{\xi/2}s^{1-\alpha_\infty}\,ds\ \le\ c\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\xi^{\alpha_\infty}}\right).$$

Также с учетом условия (34), но аналогично оценке (33), устанавливается оценка пятого слагаемого:

$$S_5(\xi)\ \le\ \frac{c}{\xi^{\alpha+\alpha_\infty-1/2}}\int\limits_{\xi/2}^{\xi}|s-\xi|^{\alpha-3/2}\,ds\ \le\ \frac{c}{\xi^{\alpha_\infty}}.$$

Очевидным следствием полученных оценок слагаемых $S_1(\xi),\ S_2(\xi),\ \ldots,\ S_5(\xi)$ является неравенство (37).

При $\xi\in(0\,;2)$ оценим $|f_*(\xi)|$ суммой трех слагаемых:

$$|f_*(\xi)|\ \le\ |\varphi_*(\xi)|+\xi\int\limits_0^{\xi/2}\frac{s\,|\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}\,ds+\xi\int\limits_{\xi/2}^{\xi}\frac{s\,|\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi)|}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}\,ds\ =:$$

$$=:\ s_1(\xi)+s_2(\xi)+s_3(\xi). \tag{43}$$

Для слагаемого $s_1(\xi)$ справедлива оценка (42). Слагаемые $s_2(\xi)$ и $s_3(\xi)$ оцениваются таким же способом, как соответственно слагаемые $S_4(\xi)$ и $S_5(\xi)$ при доказательстве неравенства (37). В этом случае, используя условие (35) вместо условия (34), получаем оценки $s_2(\xi)\le\dfrac{c}{\xi^{\alpha_0+\alpha_1-\alpha}}$ и $s_3(\xi)\le\dfrac{c}{\xi^{\alpha_0+\alpha_1-\alpha}}$, в которых постоянная c не зависит от ξ. Таким образом, неравенство (38) доказано.

Оценим теперь $|f_*(\xi_1)-f_*(\xi_2)|$ при $0<\xi_1<\xi_2$, $\xi_2-\xi_1=:\varepsilon\le\dfrac{1}{2}\xi_1$ суммой шести слагаемых:

$$|f_*(\xi_1)-f_*(\xi_2)|\ \le\ |\varphi_*(\xi_1)-\varphi_*(\xi_2)|+|\xi_1-\xi_2|\left|\int\limits_0^{\xi_1}\frac{s(\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi_1))}{(\xi_1^2-s^2)^{3/2}}\,ds\right|+$$

$$+\ \xi_2\int\limits_{\xi_1-\varepsilon}^{\xi_1}\frac{s\,|\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi_1)|}{(\xi_1^2-s^2)^{3/2}}\,ds+\xi_2\int\limits_{\xi_1-\varepsilon}^{\xi_2}\frac{s\,|\varphi_*(s)-\varphi_*(\xi_2)|}{(\xi_2^2-s^2)^{3/2}}\,ds\ +$$

$$+ \xi_2 |\varphi_*(\xi_1) - \varphi_*(\xi_2)| \int\limits_0^{\xi_1-\varepsilon} \frac{s}{(\xi_2^2 - s^2)^{3/2}}\, ds \,+$$

$$+ \xi_2 \int\limits_0^{\xi_1-\varepsilon} s\,|(\xi_1^2 - s^2)^{-3/2} - (\xi_2^2 - s^2)^{-3/2}|\, |\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi_1)|\, ds =: \sum_{j=1}^{6} S_j.$$

В дальнейшем доказательстве через c будем обозначать постоянные, значения которых, вообще говоря, различны и не зависят от ξ_1, ξ_2 и ε.

Установим оценку слагаемых S_j при $\xi_1 \geq 2$. Заметим, что очевидным следствием условия (34) являются оценки $S_1 \leq \frac{c}{\xi_1^{\alpha+\alpha_\infty}}\varepsilon^\alpha$ и $S_5 \leq \frac{c}{\xi_1^{\beta_2}}\varepsilon^{\alpha-1/2}$. Оценивая слагаемые S_3 и S_4 таким же способом, как выше оценено $S_5(\xi)$, получаем неравенства $S_3 \leq \frac{c}{\xi_1^{\beta_2}}\varepsilon^{\alpha-1/2}$ и $S_4 \leq \frac{c}{\xi_1^{\beta_2}}\varepsilon^{\alpha-1/2}$. Кроме того, выполняются неравенства $S_2 \leq \frac{c}{\xi_1}\varepsilon\sum_{j=2}^{5} S_j(\xi_1) \leq \frac{c}{\xi_1^{1+\beta_\infty}}\varepsilon$.

Учитывая равенство

$$(\xi_1^2 - s^2)^{-3/2} - (\xi_2^2 - s^2)^{-3/2} = 3\xi_*(\xi_*^2 - s^2)^{-5/2}(\xi_2 - \xi_1), \tag{44}$$

где ξ_* — некоторая точка отрезка $[\xi_1, \xi_2]$, оценим слагаемое S_6 суммой четырех слагаемых:

$$S_6 \leq \xi_2 \int\limits_0^1 s\frac{3\xi_2\varepsilon}{(\xi_1^2 - s^2)^{5/2}}|\varphi_*(s)|\, ds + \xi_2 \int\limits_0^1 s\frac{3\xi_2\varepsilon}{(\xi_1^2 - s^2)^{5/2}}|\varphi_*(\xi_1)|\, ds \,+$$

$$+ \xi_2 \int\limits_1^{\xi_1/2} s\frac{3\xi_2\varepsilon}{(\xi_1^2 - s^2)^{5/2}}|\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi_1)|\, ds \,+$$

$$+ \xi_2 \int\limits_{\xi_1/2}^{\xi_1-\varepsilon} s\frac{3\xi_2\varepsilon}{(\xi_1^2 - s^2)^{5/2}}|\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi_1)|\, ds =: S_6^{\mathrm{I}} + S_6^{\mathrm{II}} + S_6^{\mathrm{III}} + S_6^{\mathrm{IV}}.$$

Далее, оценивая слагаемые S_6^{I}, S_6^{II}, S_6^{III} и S_6^{IV} подобно тому, как при доказательстве неравенства (37) оценены соответственно слагаемые $S_2(\xi)$, $S_3(\xi)$, $S_4(\xi)$ и $S_5(\xi)$, получаем неравенства $S_6^{\mathrm{I}} \leq \frac{c}{\xi_1^3}\varepsilon$, $S_6^{\mathrm{II}} \leq \frac{c}{\xi_1^{3+\alpha_\infty}}\varepsilon$, $S_6^{\mathrm{III}} \leq c\varepsilon\left(\frac{1}{\xi_1^3} + \frac{1}{\xi_1^{1+\alpha_\infty}}\right)$, $S_6^{\mathrm{IV}} \leq \frac{c}{\xi_1^{\beta_2}}\varepsilon^{\alpha-1/2}$.

Из полученных при $\xi_1 \geq 2$ оценок слагаемых S_1, S_2, …, S_6 очевидным образом следует неравенство (39).

Установим теперь оценку слагаемых S_j при $\xi_1 \in (0\,;2)$. В этом случае слагаемые S_1, S_2, …, S_5 оцениваются таким же способом, как и при $\xi_1 \geq 2$. Так, используя условие (35) вместо условия (34), получаем оценки $S_1 \leq \frac{1}{\xi_1^{\alpha_0+\alpha_1}}\varepsilon^\alpha$, $S_3 \leq \frac{c}{\xi_1^{\beta_1}}\varepsilon^{\alpha-1/2}$, $S_4 \leq \frac{c}{\xi_1^{\beta_1}}\varepsilon^{\alpha-1/2}$, $S_5 \leq \frac{c}{\xi_1^{\beta_1}}\varepsilon^{\alpha-1/2}$, а также оценку $S_2 \leq \frac{c}{\xi_1}\varepsilon(s_2(\xi_1) + s_3(\xi_1)) \leq \frac{c}{\xi_1^{1+\beta_0}}\varepsilon$.

Учитывая равенство (44), оценим слагаемое S_6 суммой двух слагаемых:

$$S_6 \le \xi_2 \int_0^{\xi_1/2} s \frac{3\xi_2 \varepsilon}{(\xi_1^2 - s^2)^{5/2}} |\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi_1)|\, ds + $$

$$+ \xi_2 \int_{\xi_1/2}^{\xi_1-\varepsilon} s \frac{3\xi_2 \varepsilon}{(\xi_1^2 - s^2)^{5/2}} |\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi_1)|\, ds,$$

которые, в свою очередь, оцениваются аналогично соответственно слагаемым $s_2(\xi)$ и $s_3(\xi)$ при доказательстве неравенства (38). Таким образом, получаем оценку $S_6 \le \frac{c}{\xi_1^{\beta_1}} \varepsilon^{\alpha-1/2}$.

Из полученных при $\xi_1 \in (0;2)$ оценок слагаемых $S_1, S_2, \ldots, S_6$ следует неравенство (40). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть функция* $\varphi: [0,\infty) \to \mathbb{C}$ *удовлетворяет условию* (28) *и условиям*

$$|\varphi(s) - \varphi(\xi)| \le c \frac{|s-\xi|^\alpha}{s^{\alpha'_\infty} \xi^\alpha} \qquad \forall s, \xi\colon 1 \le s < \xi, \tag{45}$$

$$|\varphi(s) - \varphi(\xi)| \le c \frac{|s-\xi|^\alpha}{\xi^\nu} \qquad \forall s, \xi\colon 0 \le s < \xi \le 3, \tag{46}$$

в которых $\alpha \in (1/2; 1]$, $\alpha'_\infty \in (0;\alpha]$, $\nu \in [0;\alpha)$, *а постоянная* c *не зависит от* s *и* ξ. *Тогда функция* h_*, *которая определяется равенством*

$$h_*(\xi) := \begin{cases} (\xi + i) f_*(\xi) & \text{при} \quad \xi \ge 0; \\ (\xi + i) f_*(-\xi) & \text{при} \quad \xi < 0, \end{cases}$$

принадлежит классу $\mathcal{H}_0(\mathbb{R})$ *и при этом*

$$\lim_{\xi \to \infty} h_*(\xi) = 0. \tag{47}$$

Здесь функция f_* *задается формулой* (36), *в которой*

$$\varphi_*(\xi) = \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{\xi^2+1}} \qquad \forall \xi \ge 0.$$

Доказательство. Легко устанавливается, что для функции φ_* выполняются условия (34), (35) при $\alpha_\infty = \alpha'_\infty + 1$, $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = \nu$. Отсюда, в частности, следует, что полученные при доказательстве леммы 3 оценки выражений $s_2(\xi)$ и $s_3(\xi)$, определенных в равенстве (43), принимают вид $s_2(\xi) \le c\,\xi^{\alpha-\nu}$ и $s_3(\xi) \le c\,\xi^{\alpha-\nu}$, где постоянная c не зависит от ξ. Очевидным следствием этих оценок являются равенство $f_*(0) = \varphi_*(0)$ и неравенство

$$|f_*(\xi) - f_*(0)| \le c\,\xi^{\alpha-\nu} \qquad \forall \xi \in (0;2), \tag{48}$$

в котором постоянная c не зависит от ξ.

Теперь с учетом неравенства (48) и оценок (37)–(40) легко устанавливается выполнимость условий вида (26), (27) для функции h_*, а также равенство (47). Согласно лемме 1 имеем $h_* \in \mathcal{H}_0(\mathbb{R})$ и тем самым лемма доказана.

Лемма 5. *Если выполнены условия леммы* 4, *то*

$$\lim_{\xi\to\infty,\ \mathrm{Im}\,\xi>0}(\xi+i)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h_*(\tau)}{(\tau+i)(\tau-\xi)}\,d\tau = 0. \tag{49}$$

Доказательство. Справедливы равенства

$$(\xi+i)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h_*(\tau)}{(\tau+i)(\tau-\xi)}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{h_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{h_*(\tau)}{\tau+i}\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{h_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau - 2\int_{0}^{\infty}f_*(\tau)\,d\tau.$$

Описанным в [16, с. 573] способом устанавливается равенство

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^{\xi}\frac{s\,\varphi(s)}{\sqrt{s^2+1}\sqrt{\xi^2-s^2}}\,ds = f_*(\xi),$$

очевидным следствием которого и леммы 2 является равенство

$$\int_0^{\infty}f_*(\tau)\,d\tau = 0.$$

Таким образом, установлено равенство

$$(\xi+i)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h_*(\tau)}{(\tau+i)(\tau-\xi)}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{h_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau,$$

из которого с учетом леммы 4 следует [16, с. 49] равенство (49). Лемма доказана.

В следующей теореме устанавливается формула решения задачи Дирихле в круге для осесимметричного потенциала.

Теорема 4. *Пусть функция* $\varphi_{\partial D}$ *принадлежит классу* $\widetilde{\mathcal{H}}_{\alpha}(\partial D)$, $1/2<\alpha\le 1$, *и удовлетворяет условию*

$$\varphi_{\partial D}(x,-y) = \varphi_{\partial D}(x,y) \qquad \forall\,(x,y)\in\partial D.$$

Тогда решение задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в круге D *выражается формулой*

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \varphi_{\partial D}(1;0) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z}\frac{F_*\big(i(1+t)/(1-t)\big)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt & \textit{при}\quad y\neq 0; \\ \varphi_{\partial D}(1;0) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D_z}\frac{F_*\big(i(1+t)/(1-t)\big)}{t-x}\,dt & \textit{при}\quad y=0, \end{cases} \tag{50}$$

в которой $z = x+iy$,

$$F_*(\xi) = -i(\xi+i)\,f_*(|\xi|) - \frac{2\xi(\xi+i)}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{f_*(\tau)}{\tau^2-\xi^2}\,d\tau \quad \forall\,\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{51}$$

где

$$f_*(\tau) = \varphi_*(\tau) - \tau\int_0^{\tau}\frac{s\big(\varphi_*(s)-\varphi_*(\tau)\big)}{(\tau^2-s^2)^{3/2}}\,ds,$$

а функция φ_* *связана с заданными граничными значениями* $\varphi_{\partial D}$ *равенством*

$$\varphi_*(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau^2+1}}\left(\varphi_{\partial D}\left(\frac{\tau^2-1}{\tau^2+1}, \frac{-2\tau}{\tau^2+1}\right) - \varphi_{\partial D}(1;0)\right) \quad \forall\, \tau > 0.$$

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_z} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt = \varphi_{\partial D}(x,y) - \varphi_{\partial D}(1;0), \tag{52}$$

в котором $z = x + iy \in \partial D_z \setminus \{-1;1\}$, а искомая функция F непрерывна на множестве $\overline{D_z}$, голоморфна в круге D_z и удовлетворяет условию (22).

Выполним ряд преобразований уравнения (52). С этой целью рассмотрим дугу окружности $\Gamma := \{t \in D_z\colon \ \mathrm{Re}\, t \le x\}$ и области $E_\varepsilon^\pm := \{t \in D_z\colon |t-z| > \varepsilon,\ |t-\overline{z}| > \varepsilon,\ \pm(\mathrm{Re}\, t - x) > 0\}$. Положительным направлением обхода границы $\partial E_\varepsilon^\pm$ будем считать такое направление, при котором область $E_\varepsilon^\pm$ остается слева. Обозначим $(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})})^\pm := \lim\limits_{\tau\to t,\ \tau\in E_\varepsilon^\pm} \sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}$ при всех $t \in \partial E_\varepsilon^\pm$. Поскольку функция F голоморфна в круге D_z, то согласно теореме Коши справедливы равенства

$$\int\limits_{\partial E_\varepsilon^\pm} \frac{F(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})})^\pm}\,dt = 0.$$

Переходя в этих равенствах к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем равенства

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt = \int\limits_{s[x+i|y|,\, x-i|y|]} \frac{F(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})})^-}\,dt,$$

$$\int\limits_{\partial D_z\setminus\Gamma} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt = \int\limits_{s[x-i|y|,\, x+i|y|]} \frac{F(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})})^+}\,dt,$$

в которых $s[z_1, z_2]$ обозначает отрезок с началом в точке z_1 и концом в точке z_2. Теперь, учитывая, что $(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})})^+ = \sqrt{y^2 - (\mathrm{Im}\, t)^2}$ при всех $t \in s[x - i|y|, x + i|y|]$ и $(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})})^- = -\sqrt{y^2 - (\mathrm{Im}\, t)^2}$ при всех $t \in s[x + i|y|, x - i|y|]$, имеем

$$\int\limits_{s[x-i|y|,\, x+i|y|]} \frac{F(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})})^+}\,dt = i\int\limits_{-|y|}^{|y|} \frac{F(x+i\eta)}{\sqrt{y^2-\eta^2}}\,d\eta =$$

$$= -i\int\limits_{|y|}^{-|y|} \frac{F(x+i\eta)}{\sqrt{y^2-\eta^2}}\,d\eta = \int\limits_{s[x+i|y|,\, x-i|y|]} \frac{F(t)}{(\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})})^-}\,dt.$$

Таким образом, установлено равенство

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt = \int\limits_{\partial D_z\setminus\Gamma} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt. \tag{53}$$

С учетом равенства (53) интегральное уравнение (52) очевидным образом приводится к уравнению

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{F(t)}{\sqrt{(t-z)(t-\overline{z})}}\,dt = \varphi_{\partial D}(x,y) - \varphi_{\partial D}(1;0). \tag{54}$$

Выполним теперь конформное отображение $\xi = i\dfrac{1+z}{1-z}$ комплексной плоскости. При этом отображении образом дуги Γ является отрезок $[-|\xi|, |\xi|]$, причем точки t, $\bar{t}$ дуги Γ, симметричные относительно вещественной прямой, отображаются соответственно в точки τ и $-\tau$ отрезка $[-|\xi|, |\xi|]$, симметричные относительно точки 0. С учетом того, что соответствующие точки $t \in \Gamma$ и $\tau \in [-|\xi|, |\xi|]$ связаны также соотношением $t = \dfrac{\tau - i}{\tau + i}$, легко устанавливается равенство

$$\sqrt{(t-z)(t-\bar{z})} = -\frac{2i}{(\tau+i)\sqrt{\xi^2+1}}\sqrt{\xi^2-\tau^2} \qquad \forall\, t \in \Gamma.$$

Поэтому указанным конформным отображением уравнение (54) приводится к интегральному уравнению

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{-|\xi|}^{|\xi|} \frac{F_*(\tau)}{\sqrt{\xi^2-\tau^2}}\,\frac{d\tau}{\tau+i} = \varphi_*(\xi) \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{55}$$

где $F_*(\tau) := F\left(\dfrac{\tau-i}{\tau+i}\right)$, $\varphi_*(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{\xi^2+1}}\left(\varphi_{\partial D}\left(\dfrac{\xi^2-1}{\xi^2+1}, -\dfrac{2\xi}{\xi^2+1}\right) - \varphi_{\partial D}(1;0)\right)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$f_*(\tau) := \frac{i}{2}\left(\frac{F_*(\tau)}{\tau+i} - \frac{F_*(-\tau)}{\tau-i}\right) \qquad \forall\, \tau \geq 0. \tag{56}$$

Для ее нахождения из (55) получаем уравнение Абеля

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\xi} \frac{f_*(\tau)}{\sqrt{\xi^2-\tau^2}}\,d\tau = \varphi_*(\xi) \qquad \forall\, \xi > 0. \tag{57}$$

Заметим, что из условия $\varphi_{\partial D} \in \tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$, $1/2 < \alpha \leq 1$, очевидным образом следует, что функция $\varphi(\xi) := \sqrt{\xi^2+1}\,\varphi_*(\xi)$ удовлетворяет условиям (28), (46), а также условию (45) при $\alpha'_\infty = \alpha - \nu$. Здесь $\nu \in [0, \alpha)$ — некоторое число, существование которого для функции $\varphi_{\partial D} \in \tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$ следует из определения класса $\tilde{\mathcal{H}}_\alpha(\partial D)$ (см. неравенство (24)). Поэтому уравнение (57) разрешимо [16, с. 573] в явном виде, и его решением является функция

$$f_*(\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^{\xi} \frac{s\,\varphi_*(s)}{\sqrt{\xi^2-s^2}}\,ds = \varphi_*(\xi) - \xi\int_0^{\xi} \frac{s\left(\varphi_*(s) - \varphi_*(\xi)\right)}{(\xi^2-s^2)^{3/2}}\,ds.$$

В силу условия (22) справедливо равенство $F_*(-\tau) = \overline{F_*(\tau)}$ при всех $\tau \in \mathbb{R}$, с учетом которого равенство (56) записывается в виде $f_*(\tau) = \operatorname{Re}\dfrac{i\,F_*(\tau)}{\tau+i}$ при всех $\tau \geq 0$. Поэтому функция F_* выражается через функцию f_* в результате решения задачи Шварца для полуплоскости [17, с. 209] по формуле

$$F_*(\xi) = -\frac{\xi+i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}_*(\tau)}{\tau-\xi}\,d\tau \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{C}:\ \operatorname{Im}\xi > 0,$$

где

$$\tilde{f}_*(\tau) = \begin{cases} f_*(\tau) & \text{при} \quad \tau \geq 0; \\ f_*(-\tau) & \text{при} \quad \tau < 0. \end{cases}$$

Из лемм 4, 5 следует, что функция F_* непрерывно продолжается из верхней полуплоскости $\{\xi \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \xi > 0\}$ на вещественную прямую и обращается в нуль на бесконечности. Предельные значения функции F_* на $\mathbb{R}$ выражаются по формуле Сохоцкого [16, с. 47] и с учетом четности функции $\tilde{f}_*$ записываются в виде (51).

Таким образом, установлено, что функция $F(t) := F_*\left(i\dfrac{1+t}{1-t}\right)$ является решением интегрального уравнения (52). Отсюда очевидным образом следует, что решение задачи Дирихле для осесимметричного потенциала в круге D выражается формулой (50). Теорема доказана.

Отметим, что в работе [18] интегральное уравнение вида (54) при более жестких ограничениях на правую часть уравнения редуцировано к краевой задаче Гильберта с разрывным коэффициентом и отрицательным индексом, что привело автора указанной работы к необходимости дополнительного исследования условий разрешимости краевой задачи.

Автор признателен И. П. Мельниченко за полезные обсуждения результатов работы, а также А. П. Солдатову, обратившему наше внимание на работу [11].

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1977. – 408 с.
2. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. I // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1518–1529.
3. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. II // Там же. – № 12. – С. 1695–1703.
4. *Мельниченко И. П., Плакса С. А.* Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. III // Там же. – 1997. – **49**, № 2. – С. 228–243.
5. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5-ти т. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 656 с.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5-ти т. – М.: Наука, 1969. – Т. 3. – Ч. 2. – 672 с.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5-ти т. – М.: Гостехиздат, 1951. – Т. 4. – 804 с.
8. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1957. – 256 с.
9. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 432 с.
10. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. – М.: Мир, 1964. – 212 с.
11. *Михайлов Л. Г., Раджабов Н.* Аналог формулы Пуассона для некоторых уравнений второго порядка с сингулярной линией // Докл. АН ТаджССР. – 1972. – **15**, № 11. – С. 6–9.
12. *Раджабов Н.* Построение потенциалов и исследование внутренних и внешних граничных задач типа Дирихле и Неймана для уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу на плоскости // Докл. АН ТаджССР. – 1974. – **17**, № 8. – С. 7–11.
13. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
14. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 758 с.
15. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.: Гостехиздат, 1950. – 336 с.
16. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
17. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
18. *Раджабов Н.* Некоторые краевые задачи для уравнения осесимметрической теории поля // Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений. – Душанбе: АН ТаджССР, 1965. – С. 79–128.

Получено 21.10.98