УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, М. Б. Вакарчук (Днепропетр. ун-т)

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА–ХЕРМАНДЕРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ НА ДИСКРЕТНОЙ СЕТКЕ *

We obtain the strengthening of the Hörmander inequality for functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, in which, instead of $\|f\|_\infty$, the least upper bound of values of f on a discrete set of points is used.

Одержано посилення нерівності Хермандера для функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, у якому замість $\|f\|_\infty$ використано точну верхню межу значень f на дискретній множині точок.

Пусть $L_\infty(\mathbb{R})$ — пространство измеримых и существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|,$$

$L^r_\infty(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, — пространство функций $f \in L_\infty(\mathbb{R})$, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} = f$) и таких, что $f^{(r)} \in L_\infty(\mathbb{R})$. Через L^r_∞ будем обозначать подпространство пространства $L_\infty(\mathbb{R})$, состоящее из 2π-периодических функций.

Если $\varepsilon > 0$ и S_ε — некоторая равномерная сетка на $\mathbb{R}$ с шагом ε, то для $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ положим

$$\|f\|_{S_\varepsilon} = \sup_{x\in S_\varepsilon} |f(x)|.$$

Для заданных чисел $\alpha, \beta > 0$ через $\varphi_r(\cdot, \alpha, \beta)$ обозначим r-й периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от 2π-периодической функции $\varphi_0(x; \alpha, \beta)$, равной α, если $x \in [0, 2\pi\beta/(\alpha+\beta))$, и равной $-\beta$, если $x \in [2\pi\beta/(\alpha+\beta), 2\pi)$. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(x; \alpha, \beta) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda x; \alpha, \beta)$. Будем также полагать $\varphi_{\lambda,r}(x) = \varphi_{\lambda,r}(x + (1+(-1)^r)\pi/(4\lambda); 1, 1)$ и вместо $\varphi_{1,r}(x)$ писать $\varphi_r(x)$.

В работах Адамара [1], Г. Е. Шилова [2] и А. Н. Колмогорова [3, 4] дано решение задачи получения точных оценок для $\|f^{(k)}\|_\infty$, $0 < k < n$, функций $f \in L^r_\infty$ при условии, что известны $\|f\|_\infty$ и $\|f^{(r)}\|_\infty$.

Хермандер [5] для функций из $L^r_\infty(\mathbb{R})$ дал следующее обобщение и уточнение результатов из [1–4]: для любой функции $f \in L^r_\infty(\mathbb{R})$ справедливо неулучшаемое неравенство

$$\|f^{(k)}_\pm\|_\infty \le \frac{\left\|\varphi_{r-k}\left(\cdot; \|f^{(r)}_+\|_\infty, \|f^{(r)}_-\|_\infty\right)_\pm\right\|_\infty}{E_0\left(\varphi_r\left(\cdot; \|f^{(r)}_+\|_\infty, \|f^{(r)}_-\|_\infty\right)\right)_\infty^{1-k/r}} E_0(f)^{1-k/r} \tag{1}$$

* Работа финансово поддержана Международным научным фондом, Грант U92000, и Государственным комитетом Украины по вопросам науки и технологий.

(здесь и везде ниже $f_\pm(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$, а $E_0(f)_\infty$ — наилучшее равномерное приближение константой функции f), или, что эквивалентно, если число $\lambda > 0$ выбрано из условия $E_0(\varphi_{\lambda,r}(\cdot\,;\alpha,\beta)) = E_0(f)_\infty$, то

$$\|f_\pm^{(k)}\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r-k}(\cdot\,;\alpha,\beta)_\pm\|_\infty. \tag{2}$$

В. Н. Коновалов [6] рассмотрел задачу о получении точных оценок для $\|f^{(k)}\|_\infty$, $0 \le k < n$, функций $f \in L_\infty^r$, если известны $\|f\|_{S_\varepsilon}$ и $\|f^{(r)}\|_\infty$. Следующие две теоремы уточняют и дополняют результаты из [6].

Теорема 1. *Если $f \in L_\infty^r$ и число $\lambda > 0$ выбрано из условия*

$$\lambda^{-r}\varphi_r(\lambda\varepsilon/2) = \frac{\|f\|_{S_\varepsilon}}{\|f^{(r)}\|_\infty}, \tag{3}$$

то для любого $k = 0, 1, \ldots, r-1$

$$\|f^{(k)}\|_\infty \le \lambda^{-(r-k)}\|\varphi_{r-k}\|_\infty \|f^{(r)}\|_\infty, \tag{4}$$

или, что эквивалентно,

$$\|f^{(k)}\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\varphi_r(\lambda\varepsilon/2)^{1-k/r}}\|f\|_{S_\varepsilon}^{1-k/r}\|f^{(r)}\|_\infty^{k/r}. \tag{5}$$

При этом для любого $m = 2, 3, \ldots$ во множестве функций $f \in L_\infty^r$ таких, что (3) *имеет место с $\lambda = \pi/(m\varepsilon)$, найдется функция $(f(x) = \varphi_{\lambda,r}(x))$, обращающая* (4) *и* (5) *в равенства.*

Схема доказательства теоремы 1 такова. Сначала мы доказываем неравенство (4) при $k = 0$. Точнее, используя, как и в [6], идею Банга [7] (см. также ([8], гл. 6)), мы устанавливаем, что для любого $l \in \mathbb{Z}$ и любого $x \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ справедливо неравенство

$$|f(l\varepsilon + x)| \le |\varphi_{\lambda,r}(x)|,$$

из которого, конечно, следует неравенство (4) при $k = 0$, а затем, для доказательства (3) в остальных случаях, для оценки $\|f^{(k)}\|_\infty$ применяем последовательно неравенство Колмогорова и неравенство (4) при $k = 0$. Для того чтобы из (4) получить неравенство (5), достаточно из (3) выразить λ,

$$\lambda = \left(\frac{\varphi_r(\lambda\varepsilon/2)\|f^{(r)}\|_\infty}{\|f\|_{S_\varepsilon}}\right)^{1/r},$$

и подставить это выражение в (4). Точность неравенств из теоремы 1 в указанном выше смысле без труда проверяется непосредственно.

Для $x \in (0, \pi/2)$ положим $\psi_r(x) = x^{-r}\varphi_r(x)$. Учитывая, что функция ψ_r непрерывна и с ростом x от 0 до $\pi/2$ строго убывает от $+\infty$ до 0, видим, что обратная к ней функция ψ_r^{-1} непрерывна и строго убывает в интервале $(0, +\infty)$.

Из (3) получаем для λ следующее выражение:

$$\lambda = \frac{2}{\varepsilon}\psi_r^{-1}\left(\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^r \frac{\|f\|_{S_\varepsilon}}{\|f^{(r)}\|_\infty}\right)^{-r},$$

подставляя которое в (4), имеем

$$\|f\|_\infty \le \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^r \psi_r^{-1}\left(\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^r \frac{\|f\|_{S_\varepsilon}}{\|f^{(r)}\|_\infty}\right)^{-r} \|\varphi_r\|_\infty \|f^{(r)}\|_\infty .$$

Применяя теперь для оценки $\|f^{(k)}\|_\infty$ при $k>0$ неравенство Колмогорова, убеждаемся, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для любой функции $f \in L_\infty^r$ при всех $k = 0, 1, \ldots, r-1$ справедливо неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_\infty \le \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{r-k} \psi_r^{-1}\left(\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^r \frac{\|f\|_{S_\varepsilon}}{\|f^{(r)}\|_\infty}\right)^{-(r-k)} \|\varphi_{r-k}\|_\infty \|f^{(r)}\|_\infty , \tag{6}$$

которое обращается в равенство для любой функции вида $f(x) = \varphi_{\lambda,r}(x)$, где $\lambda = \pi/(m\varepsilon)$.

При $r=2$ и $k=1$, как нетрудно проверить,

$$\psi^{-1}(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2x+1}},$$

и из теоремы 2 мы получаем такой результат.

Следствие. *Если $f \in L_\infty^2(\mathbb{R})$, то*

$$\|f'\|_\infty \le \sqrt{2\|f''\|_\infty\left(\|f\|_{S_\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{8}\|f''\|_\infty\right)}. \tag{7}$$

Неравенство (7) *неулучшаемо в том смысле, что и неравенства* (4) – (6).

Используя неравенства (4) – (6) при $k=0$ и неравенство А. А. Лигуна [9] (см. также ([10], теорема 1.7.5)) для 2π-периодических функций $f \in L_\infty^r$ нетрудно при любом $\varepsilon = \pi/l$, $l \in \mathbb{N}$, $l \ge 2$, получить оценки L_p-норм промежуточных производных через $\|f\|_{S_\varepsilon}$ и $\|f^{(r)}\|_\infty$. Эти оценки будут иметь вид неравенств (4) – (6), в которых слева $\|f^{(k)}\|_\infty$ надо заменить на $\|f^{(k)}\|_{L_p[-\pi,\pi]}$, а справа $\|\varphi_{r-k}\|_\infty$ надо заменить на $\|\varphi_{r-k}\|_{L_p[-\pi,\pi]}$. Такого рода оценки мы приведем ниже в более общей ситуации. Здесь же ограничимся только одним утверждением.

Теорема 3. *Если $f \in L_\infty^2$ и $\varepsilon = \pi/l$, $l \in \mathbb{N}$, $l \ge 2$, то для любого $p \in [1,\infty)$*

$$\|f'\|_{L_p[-\pi,\pi]} \le \left(\frac{2\pi}{p+1}\right)^{1/p} \sqrt{2\|f''\|_\infty\left(\|f\|_{S_\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{8}\|f''\|_\infty\right)}. \tag{8}$$

Неравенство (8) *обращается в равенство для любой функции вида $f(x) = \varphi_{m,2}(x)$, где $m \in \mathbb{N}$ является делителем l.*

Перейдем к оценкам типа (1), (2) промежуточных производных функций $f \in L_\infty^r$ через $E_0(f)_{S_\varepsilon} := \inf\{\|f-c\|_{S_\varepsilon} : c \in \mathbb{R}\}$, $\|f_+^{(r)}\|_\infty$ и $\|f_-^{(r)}\|_\infty$.

Для $(2\pi/\lambda)$-периодической функции $\varphi_{\lambda,r}(\cdot\,;\alpha,\beta)$ и произвольного фиксированного $\varepsilon \in [0,\pi/\lambda)$ обозначим через $t_{\lambda,\max}$ и $t_{\lambda,\min}$ соответственно ее точки максимума и минимума, принадлежащие отрезку $[0, 2\pi/\lambda)$. Далее, пусть $t'_{\lambda,\max} < t''_{\lambda,\max}$ (соответственно $t'_{\lambda,\min} < t''_{\lambda,\min}$) — такие точки из окрестности $t_{\lambda,\max}$ (соответственно $t_{\lambda,\min}$), что $t''_{\lambda,\max} - t'_{\lambda,\max} = \varepsilon$ и $\varphi_{\lambda,r}(t'_{\lambda,\max}, \alpha, \beta) =$

$= \varphi_{\lambda,r}(t''_{\lambda,\max}, \alpha, \beta)$ (соответственно $t''_{\lambda,\min} - t'_{\lambda,\min} = \varepsilon$ и $\varphi_{\lambda,r}(t'_{\lambda,\min}, \alpha, \beta) = \varphi_{\lambda,r}(t''_{\lambda,\min}, \alpha, \beta)$). Положим

$$\varphi^*_{\lambda,r}(\varepsilon, \alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\varphi_{\lambda,r}(t'_{\lambda,\max}, \alpha, \beta) - \varphi_{\lambda,r}(t'_{\lambda,\min}, \alpha, \beta)).$$

Теорема 4. *Если $f \in L^r_\infty(\mathbb{R})$ и число λ выбрано из условия*

$$\varphi^*_{\lambda,r}\left(\varepsilon; \|f^{(r)}_+\|_\infty, \|f^{(r)}_-\|_\infty\right) = E_0(f)_{S_\varepsilon}, \tag{9}$$

то

$$E_0(f)_\infty \le E_0\left(\varphi_{\lambda,r}\left(\cdot; \|f^{(r)}_+\|_\infty, \|f^{(r)}_-\|_\infty\right)\right)_\infty \tag{10}$$

и для всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$ справедливо неравенство

$$\|f^{(k)}_\pm\|_\infty \le \left\|\varphi_{\lambda,r-k}\left(\cdot; \|f^{(r)}_+\|_\infty, \|f^{(r)}_-\|_\infty\right)_\pm\right\|_\infty. \tag{11}$$

Если при данных значениях $E_0(f)_{S_\varepsilon}$, $\|f^{(r)}_+\|_\infty$, $\|f^{(r)}_-\|_\infty$ число λ таково, что $|t'_{\lambda,\max} - t'_{\lambda,\min}| = l\varepsilon$ и $2\pi/\lambda = m\varepsilon$ с некоторыми $l, m \in \mathbb{N}$, то неравенства (10) и (11) обращаются в равенства для функции $g(x) = \varphi_{\lambda,r}\left(x; \|f^{(r)}_+\|_\infty, \|f^{(r)}_-\|_\infty\right)$, для которой ввиду (9) $E_0(g)_{S_\varepsilon} = E_0(f)_{S_\varepsilon} = \varphi^*_{\lambda,r}\left(\varepsilon; \|f^{(r)}_+\|_\infty, \|f^{(r)}_-\|_\infty\right)$, а в силу ее определения $\|g^{(r)}_\pm\|_\infty = \|f^{(r)}_\pm\|_\infty$.

Как и при доказательстве теорем 1 и 2, мы сначала устанавливаем неравенство (10), а затем для получения (11) применяем неравенство Хермандера.

Полагая для заданных $\alpha, \beta > 0$ и $x \in (0, \pi)$ $\psi_r(x, \alpha, \beta) = x^{-r}\varphi^*_r(x, \alpha, \beta)$, получаем следующий результат.

Теорема 5. *Для любой функции $f \in L^r_\infty(\mathbb{R})$ при $k = 1, 2, \ldots, r-1$ справедливо соотношение*

$$\|f^{(k)}_\pm\|_\infty \le \varepsilon^{r-k}\frac{\left\|\varphi_{r-k}\left(\cdot; \|f^{(r)}_+\|_\infty, \|f^{(r)}_-\|_\infty\right)_\pm\right\|_\infty}{\psi_r^{-1}\left(\varepsilon^{-r}E_0(f)_{S_\varepsilon}, \|f^{(r)}_+\|_\infty, \|f^{(r)}_-\|_\infty\right)^{r-k}}. \tag{12}$$

Если при заданных значениях $E_0(f)_{S_\varepsilon}$, $\|f^{(r)}_+\|_\infty$, $\|f^{(r)}_-\|_\infty$ выбранное из условия (9) число λ будет таким, что $|t'_{\lambda,\max} - t'_{\lambda,\min}| = l\varepsilon$ и $2\pi/\lambda = m\varepsilon$ с некоторыми $l, m \in \mathbb{N}$, то неравенство (12) обратится в равенство для функции $g(x) = \varphi_{\lambda,r}\left(x; \|f^{(r)}_+\|_\infty, \|f^{(r)}_-\|_\infty\right)$.

Используя неравенства (11), (12) и учитывая теорему 1.7.6 из [10], устанавливаем, что справедливы следующие теоремы.

Теорема 6. *Пусть $f \in L^r_\infty$, $p \in [1, \infty)$, $\varepsilon = 2\pi/l$, $l \ge 2$ и $k = 1, 2, \ldots, r-1$. Если число λ выбрано из условия*

$$\varphi^*_{\lambda,r}\left(\varepsilon; \|f^{(r)}_+\|_\infty, \|f^{(r)}_-\|_\infty\right) = E_0(f)_{S_\varepsilon}, \tag{13}$$

то

$$\|f^{(k)}_\pm\|_{L_p[-\pi,\pi]} \le \left\|\varphi_{\lambda,r-k}\left(\cdot; \|f^{(r)}_+\|_\infty, \|f^{(r)}_-\|_\infty\right)_\pm\right\|_{L_p[-\pi,\pi]}. \tag{14}$$

Если при данных значениях $E_0(f)_{S_\varepsilon}$, $\|f^{(r)}_+\|_\infty$, $\|f^{(r)}_-\|_\infty$ число λ из условия (13) таково, что $\lambda \in \mathbb{N}$, $n < \lambda$, и, кроме того, $|t'_{\lambda,\max} - t'_{\lambda,\min}| = n\varepsilon$ при не-

котором $n \in \mathbb{N}$, $n \le \lambda$, *то неравенство* (14) *обращается в равенство для функции вида* $g(x) = \varphi_{\lambda, r-k}\left(x; \|f_+^{(r)}\|_\infty, \|f_-^{(r)}\|_\infty\right)$, *для которой в силу сделанных предположений* $E_0(g)_{S_\varepsilon} = E_0(f)_{S_\varepsilon} = \varphi_{\lambda,r}^*\left(\varepsilon; \|f_+^{(r)}\|_\infty, \|f_-^{(r)}\|_\infty\right)$, *а в силу ее определения* — $\|g_\pm^{(r)}\|_\infty = \|f_\pm^{(r)}\|_\infty$.

Теорема 7. *Пусть* $f \in L_\infty^r$, $p \in [1, \infty)$, $\varepsilon = \pi/l$, $l \ge 2$ *и* $k = 1, 2, \ldots, r-1$. *Тогда для любой функции* $f \in L_\infty^r$

$$\|f_\pm^{(k)}\|_{L_p[-\pi,\pi]} \le \varepsilon^{r-k} \frac{\left\|\varphi_{\lambda, r-k}\left(\,\cdot\,; \|f_+^{(r)}\|_\infty, \|f_-^{(r)}\|_\infty\right)_\pm\right\|_{L_p[-\pi,\pi]}}{\psi_r^{-1}\left(\varepsilon^{-r} E_0(f)_{S_\varepsilon}, \|f_+^{(r)}\|_\infty, \|f_-^{(r)}\|_\infty\right)^{r-k}}. \qquad (15)$$

Неравенство (15) *обращается в равенство в тех же случаях, что и неравенство* (14).

По поводу всех приведенных выше результатов заметим, что, устремляя $\varepsilon \to 0$, из них нетрудно получить соответствующие известные утверждения с $\|f\|_\infty$ вместо $\|f\|_{S_\varepsilon}$.

1. *Hadamard J.* Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées // C. R. Soc. Math. France. – 1914. – **41**. – P. 68–72.
2. *Боссэ Ю. Г. (Шилов Г. Е.)* О неравенствах между производными // Сборник работ студенческих кружков Московского государственного университета. – М.: Моск. ун-т, 1937. – С. 17–27.
3. *Kolmogoroff A.* Une généralisation de J. Hadamard entre les bornes superieures des dérivées succèssives d'une fonction // C. R. Acad. Sci. – 1938. – **207**. – P. 764–765.
4. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функций на бесконечном интервале // Учен. зап. Моск. ун-та. Математика. – 1939. – Вып. 30, № 3. – С. 3–13.
5. *Hörmander L.* New proof and generalization of inequality of Bohr // Math. Scand. – 1954. – **2**. – P. 33–45.
6. *Коновалов В. Н.* Дополнение к неравенствам Колмогорова // Мат. заметки. – 1980. – **27**, вып. 2. – С. 209–215.
7. *Bang T.* Une inéquality de Kolmogoroff et les fonctions presque périodiques // Det Kgl. Danske Viedenskabemes Selskab. Mathematiskfisiske Meddelelser. – 1941. – **19**, № 4.
8. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 267 с.
9. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bound of functionals // Anal. Math. – 1976. – **2**. – P. 11–40.
10. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.

Получено 17.10.95