УДК 517.51

Є. Г. Усенко (Нац. пед. ун-т, Київ)

КРИТЕРІЇ СПІВПАДАННЯ ЯДРА ФУНКЦІЇ З ЯДРОМ ЇЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ МАЙЖЕ ДОДАТНИХ СЕРЕДНІХ

We establish necessary and sufficient conditions for a point A of kernel in the Knopp sense $K(f)$ of a function f should belong to the kernel $K(M)$ of a function $M(t) := \int_S f\,d\mu_t$, where so-called almost positive measures μ_t define a regular method of the summation. In particular, this implies criteria of coincidence of the kernels $K(f)$ and $K(M)$.

Вказано необхідні та достатні умови для того, щоб точка A ядра у розумінні Кноппа $K(f)$ функції f належала до ядра $K(M)$ функції $M(t) := \int_S f\,d\mu_t$, де так звані майже додатні міри μ_t визначають регулярний метод підсумовування. Звідси, зокрема, випливають критерії збігу ядер $K(f)$ і $K(M)$.

1. Нехай S — простір з мірами μ_t, $t \in T$, в якому виділено систему $\{U_r \subset S : r \geq 0\}$ непорожніх μ_t-вимірних підмножин U_r таких, що $U_{r_1} \subset U_{r_2}$, коли $r_1 \geq r_2$, $\bigcap_{r \geq 0} U_r = \varnothing$ і $U_0 = S$; аналогічна система $\{V_r \subset T : r \geq 0\}$ виділена у множині T; $\sigma = \{E \subset S : E$ — μ_t-вимірна для $t \in T\}$; Φ — множина обмежених функцій $f : S \to L$, кожна з яких набуває значень з локально опуклого, хаусдорфового та секвенціально повного лінійного топологічного простору $L = L_f$ з нулем θ, причому для кожної функції $f \in \Phi$ існує

$$M(t) := \int_S f\,d\mu_t, \qquad t \in T. \tag{1}$$

Системи U_r та V_r задають напрямки, за якими визначаються поняття границі та часткової границі функцій, визначених відповідно на S і T. Наприклад, a — часткова границя функції f за системою $\{U_r : r \geq 0\}$, якщо $\exists\, r_k \uparrow \uparrow +\infty$ і $x_k \in U_{r_k}$: $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = a$, тобто

$$\forall\, O(\theta) \quad \exists\, k_0 : \ f(x_k) - a \in O(\theta) \quad \forall\, k \geq k_0,$$

Коли a — єдина часткова границя f за системою $\{U_r : r \geq 0\}$, то вона називається границею f за даною системою і позначається $a = \lim_{U_r} f$ або $f(x) \to \to a(U_r)$.

Будемо говорити, що функція f підсумовується до елемента $a \in L$ інтегральним методом M, що визначається рівністю (1), якщо

$$\lim_{V_r} M(t) = a =: M - \lim f.$$

Метод M називають консервативним, якщо з існування $\lim_{U_r} f(x) = b$ випливає існування $\lim_{V_r} M(t) = a$. Якщо при цьому завжди $a = b$, то метод M називають регулярним. Умови консервативності і регулярності методу M наведено в роботі [1].

Метод M назвемо майже додатним, якщо

$$\lim_{V_r} \int_S d\,||\mu_t| - \mu_t| = \lim_{V_r} ||\mu_t| - \mu_t|(S) = 0, \tag{2}$$

де $|\mu_t|$ — варіація міри μ_t на множині $E \in \sigma$.

Зрозуміло, що коли метод додатний, тобто усі міри μ_t додатні, то він є майже додатним, але не навпаки.

Ядро $K(f)$ функції $f: S \to L$ визначається рівністю $K(f) := \bigcap_{r>0} \operatorname{Co} f(U_r)$, де $\operatorname{Co} f(U_r)$ — замкнена опукла оболонка множини значень функції f на U_r. Аналогічно визначається і ядро $K(M)$ функції $M: T \to L$.

Зафіксуємо точку $A \in L$ і довільний окіл $O(\theta)$. Можна показати, що множини $S(f - A \in O(\theta))$ та $S(f - A \notin O(\theta))$, де $f \in \Phi$, належать до σ.

Точку A назвемо μ^*-точкою функції f, якщо для будь-якого околу $O(\theta)$ нуля простору L множина $S(f - A \notin O(\theta))$ є такою, що нуль простору L — часткова границя за системою V_r функції

$$M_1(t) = \int\limits_{S(f-A \notin O(\theta))} (f - A)\, d\mu_t, \quad t \in T. \tag{3}$$

Можна показати, що у випадку додатного регулярного методу підсумовування M і обмеженої функції $f \in \Phi$ точка A є μ^*-точкою функції f, якщо для будь-якого околу $O(\theta)$ нуля простору L має місце умова

$$\underline{\lim}_{V_r}\, \mu_t(S(f - A \notin O(\theta)) = 0 \tag{4}$$

або

$$\overline{\lim}_{V_r}\, \mu_t(S(f - A \in O(\theta)) = 1. \tag{5}$$

Точку A, що задовольняє це твердження, назвемо μ-точкою функції f.

2. Основними результатами цієї роботи є такі твердження.

Теорема 1. *Нехай консервативний метод M визначається мірами μ_t, а метод M^*, що визначається мірами $\mu_t - \nu$, де $\nu(E) = \lim_{V_r} \mu_t(E)$ $\forall E \in \sigma$: $\exists r > 0$: $E \subset S \setminus U_r$, є майже додатним. Тоді для $f \in \Phi$*

$$K(M) \subset \rho(M) K(f) + \int_S f\, d\nu,$$

де $M(t) = \int_S f\, d\mu_t$, а $\rho(\mu) = \lim_{V_r} (\mu_t - \nu)(S)$ — характеристика методу M [2, с. 58]. *Зокрема, якщо метод M є конульовим, тобто $\rho(M) = 0$, а метод M^* — майже додатний, то*

$$K(M) = \int_S f\, d\nu \qquad \forall f \in \Phi.$$

Якщо ж метод M регулярний і майже додатний, то $K(M) \subset K(f)$ $\forall f \in \Phi$.

Теорема 1 узагальнює теорему Кноппа [3] (теорема 11), а також нещодавні результати про вкладення ядер [4].

Теорема 2. *Нехай $f \in \Phi$ — обмежена функція, а M — регулярний майже додатний інтегральний метод підсумовування. Тоді*:

1) *якщо точка A є μ^*-точкою, зокрема, μ-точкою функції f, то $A \in K(M)$;*

2) *якщо* A *є точкою строгої опуклості* [5, с. 112] *ядра* $K(f)$ *функції* f, *то* $A \in K(M)$ *тоді і тільки тоді, коли* A *є* μ^**-точкою функції* f.

Наслідок 1. *Нехай ядро* $K(f)$ *обмеженої функції* $f \in \Phi$ *збігається із замкненою опуклою оболонкою множини своїх точок строгої опуклості, а* M — *регулярний майже додатний інтегральний метод підсумовування. Тоді для того, щоб* $K(f) = K(M)$, *необхідно і достатньо, щоб кожна точка строгої опуклості ядра* $K(f)$ *була* μ^**-точкою функції* f. *Зокрема, якщо кожна часткова границя обмеженої функції* f *є* μ^**-точкою функції* f *і* $M - \lim f = w$, *то і* $\lim\limits_{U_r} f = w$.

Наслідок 2. *Нехай* M — *майже додатний регулярний інтегральний метод підсумовування, а простір* L — *обмежено компактний, зокрема,* $L = R^m$ *або* $L = C^m$. *Тоді якщо* $M(t) = \int_S f\,d\mu_t$, $t \in T$, *то* $K(f) = K(M)$ *для будь-якої обмеженої функції* $f \in \Phi$ *тоді і тільки тоді, коли для будь-якої множини* $E^* \in \sigma$: $E^* \not\subset S \setminus U_r$ $\forall\, r > 0$ *виконується умова* $\overline{\lim\limits_{V_r}}\, \mu_t(E^*) = 1$.

З теореми 2 та наслідку 1 випливають відповідні твердження для матричного методу підсумовування кратних послідовностей, які узагальнюють результати роботи [6], доведені для матричних методів підсумовування однократних послідовностей, а наслідок 2 — узагальнення теореми Аллена [7, с. 188].

3. ***Доведення теореми*** **1.** Нехай $\rho(M)$ є характеристикою методу M, тобто

$$\rho(M) = a - \nu(S) = \lim_{V_r} \int_S d(\mu_t - \nu).$$

Оскільки метод M^*, який визначається мірами $\mu_t - \nu$, є майже додатним, то очевидно, що

$$\lim_{V_r}\left(\int_S f\,d|\mu_t - \nu|\right) = \lim_{V_r}\left(\int_S f\,d(\mu_t - \nu)\right) = 0 \qquad \forall f \in \Phi. \tag{6}$$

Звідси випливає, що, по-перше,

$$\rho(M) = \lim_{V_r} \int_S d|\mu_t - \nu|,$$

а тому $\rho(M) \geq 0$, а по-друге, що ядро функції

$$M^*(t) = \int_S f\,d(\mu_t - \nu) = \int_S f\,d\mu_t - \int_S f\,d\nu = M(t) - \int_S f\,d\nu$$

співпадає з ядром функції $M^{**}(t) = \int_S f\,d|\mu_t - \nu|$. Тому

$$K(M) = K(M^{**}) + \int_S f\,d\nu. \tag{7}$$

Якщо припустити, що $\rho(M) = 0$, то $\lim\limits_{V_r} |\mu_t - \nu|(S) = 0$, а тому $\lim\limits_{V_r} |\mu_t - \nu|(E) = 0$ $\forall\, E \in \sigma$. Виконання цієї умови достатньо, щоб метод M^{**}, що визначається мірами $\mu_t^{**} = |\mu_t - \nu|$, породжував збіжність [1], тобто підсумовував будь-яку функцію $f \in \Phi$, причому

$$\lim_{V_r} \int_S f\,d|\mu_t - \nu| = 0 \qquad \forall f \in \Phi.$$

Тому з рівності (6) маємо

$$\lim_{V_r} \int_S f\, d\mu_t = \int_S f\, d\nu \qquad \forall f \in \Phi.$$

Отже,

$$K(M) = \int_S f\, d\nu \subset \rho(M) K(f) + \int_S f\, d\nu,$$

коли $\rho(M) = 0$, а метод M^* є майже додатним.

Припустимо, що M^* є майже додатним і $\rho(M) > 0$. Покажемо, що і в цьому випадку

$$K(M) \subset \rho(M) K(f) + \int_S f\, d\nu.$$

Для цього, враховуючи рівність (7), досить показати, що $K(M^{**}) \subset \subset \rho(M) K(f)$ або $K\left(\dfrac{M^{**}}{\rho(M)}\right) \subset K(f)$. Останнє включення рівносильне тому, що $w \notin K\left(\dfrac{M^{**}}{\rho(M)}\right)$ $\forall w \notin K(f)$.

Візьмемо довільний елемент $w \notin K(f)$. Тоді існує $r_0 > 0$ таке, що $w \notin \notin \operatorname{Co} f(U_r)$ для кожного $r > r_0$. За твердженням про віддільованість опуклих множин, одна з яких замкнена, а інша компактна [5, с. 96], одержуємо існування неперервної лінійної форми φ, для якої $\varphi(w) > \delta$, а $\varphi(\operatorname{Co} f(U_r)) \le \delta$, тобто $\varphi(f(x)) \le \delta$ для кожного $x \in U_r$, де $r = r_1 \ge r_0$ і $\delta > 0$ — фіксовані числа. З урахуванням властивостей інтеграла маємо

$$\varphi\left(\int_S \frac{f}{\rho(M)}\, d|\mu_t - \nu|\right) = \varphi\left(\frac{M^{**}(t)}{\rho(M)}\right) = \frac{1}{\rho(M)} \int_S \varphi(f(x))\, d|\mu_t - \nu| \le$$

$$\le \delta \frac{|\mu_t - \nu|(S)}{\rho(M)} + \alpha_1(t) = \delta + \left(\frac{|\mu_t - \nu|(S)}{\rho(M)} - 1\right)\delta + \alpha_1(t) =$$

$$= \delta + \alpha(t),$$

де $\alpha_1(t)$ і $\alpha(t) \to O(V_r)$.

Отже, існує $r_2 > r_1 : \delta + \alpha(t) \ge \delta_1$ $\forall t_n \in V_{r_2}$, тобто

$$\varphi\left(\int_S \frac{1}{\rho(M)}\, d|\mu_t - \nu|\right) < \delta_1 \qquad \forall t_n \in V_{r_2},$$

у той час як $\varphi(w) \ge \delta_1 \ge \delta$. Тому гіперплощина, що визначається неперервною лінійною формою φ, розділяє $\operatorname{Co}\left(\dfrac{M^{**}(V_{r_2})}{\rho(M)}\right)$ і w. Це означає, що

$$w \notin \operatorname{Co}\left(\frac{M^{**}(V_{r_2})}{\rho(M)}\right) \Rightarrow w \notin \bigcap_{r>0} \operatorname{Co}\left(\frac{M^{**}(V_r)}{\rho(M)}\right) = K\left(\frac{M^{**}}{\rho(M)}\right).$$

Теорему 1 доведено.

4. Для доведення теореми 2 будуть потрібні допоміжні твердження, які мають самостійний інтерес.

Лема 1. *Нехай M — додатний регулярний метод підсумовування, що визначається мірами μ_t, $t \in T$. Для того щоб точка A була μ-точкою банаховозначної функції $f \in \Phi$, необхідно і достатньо, щоб існувала множина $E^* \in S$, для якої $E^* \subset \sigma$, $U_r^* := U_r \cap E^* \neq \varnothing \quad \forall r > 0$, $\lim\limits_{U_r^*} f = A$ і $\overline{\lim\limits_{U_r^*}} \mu_t(E^*) = 1$.*

Доведення. Припустимо, що L — простір Банаха і A є μ-точкою функції $f \in \Phi$. Тоді внаслідок (5) для околу $O_{1/2}(\delta)$ точки нуль радіуса $1/2$ має місце умова

$$\overline{\lim_{V_r}} \mu_t(S(f-A) \in O_{1/2}(\theta)) = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, r_j^{(1)} \uparrow +\infty$$

і

$$t_j^{(1)} \in V_{r_j^{(1)}} : \lim_{j \to \infty} \mu_{t_j^{(1)}}(S(f-A) \in O_{1/2}(\theta)) = 1.$$

Зафіксуємо $r_1 > 0$ і виберемо j_1 таким, щоб $\mu_{t_j^{(1)}}(S \setminus U_{r_1}) < \dfrac{1}{2} \quad \forall j \geq j_1$. Припустимо, що визначено вже число r_k і j_k. Для околу $O_{1/2^{k+1}}(\theta)$ точки нуль радіуса $\dfrac{1}{2^{k+1}}$ має місце умова

$$\overline{\lim_{V_r}} \mu_t(S(f-A) \notin O_{1/2^{k+1}}(\theta)) = \lim_{j \to \infty} \mu_{t_j^{(k+1)}}(S(f-A) \notin O_{1/2^{k+1}}(\theta)) = 1,$$

де $t_j^{(k+1)} \in V_{r_j^{(k+1)}}$ і $r_j^{(k+1)} \to +\infty$, $j \to \infty$. Виберемо $r_{k+1} > r_k$ таким, щоб $\mu_{t_k^{(k)}}(U_{r_{k+1}}) < \dfrac{1}{2^{k+1}}$. А число $j_{k+1} > j_k$ виберемо таким, щоб $\mu_{t_j^{(k+1)}}(S(f-A) \in O_{1/2^{k+1}}(\theta)) > 1 - \dfrac{1}{2^{k+1}}$, а також $r_{j_{k+1}}^{(k+1)} > r_{j_k}^{(k)}$ і $\mu_{t_j^{(k+1)}}(S \setminus U_{r_k+1}) < \dfrac{1}{2^{k+1}}$ $\forall j \geq j_{k+1}$.

Позначимо $E_k^* = (U_{r_k} \setminus U_{r_{k+1}}) \cap S(f - A \in O_{1/2^k}(\theta))$. Можна довести, що $E_k^* \in \sigma$ і

$$\mu_{t_k^{(k)}}(E_k^*) \geq \mu_{t_{j_k}^{(k)}}(S(f-A) \notin O_{1/2^n}(\theta)) - \mu_{t_{j_k}^{(k)}}(S \setminus U_{r_k}) - \mu_{t_{j_k}^{(k)}}(U_{r_{k+1}}) \geq$$

$$\geq 1 - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} \to 1, \quad k \to \infty.$$

Якщо $x \in E_k^*$, то $x \in U_{r_k} \setminus U_{r_{k+1}}$ і $f(x) - A \in O_{1/2^k}(\theta)$. Тому для множини $E^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^*$ вірна рівність $\lim\limits_{U_r^*} f = A$, де $U_r^* = U_r \cap E^*$. Оскільки в той же час $E^* \in \sigma$ і $\mu_t(E^*) \geq \mu_t(E_k^*)$ $\forall t \in T$, то $\mu_{t_{j_k}^{(k)}}(E^*) \geq \mu_{t_{j_k}^{(k)}}(E_k^*) \to 1$, $k \to \infty$, тобто

$$\overline{\lim_{V_r}} \mu_t(E^*) = 1.$$

Отже, якщо A — μ-точка функції $f \in \Phi$, то існує множина $E^* \subset S$, для якої $U_r^* = U_r \cap E^* \neq \varnothing$, $r > 0$, і $\lim\limits_{U_r^*} f = A$, а також $E^* \in \sigma$ і $\overline{\lim\limits_{V_r}} \mu_t(E^*) = 1$.

Покажемо, що вірне і обернене твердження до тільки що доведеного.

Дійсно, якщо $\lim\limits_{U_r^*} f = A$, то $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, r_1 = r_1(\varepsilon)\colon\ f(x) - A \in O_\varepsilon(\theta)\ \ \forall\, x \in$ $\in U_{r_1}^*$. Тому множина

$$S(f - A \in O_\varepsilon(\theta)) \supset U_{r_1}^* \ \Rightarrow$$

$$\mu_t(S(f - A \in O_\varepsilon(\theta))) \ge \mu_t(U_{r_1}^*) \ge \mu_t(E^*) - \mu_t(S \setminus U_{r_1}).$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{V_r} \mu_t(S \setminus U_{r_1}) = 0$, а $\overline{\lim\limits_{V_r}}\, \mu_t(E^*) = 1$, маємо

$$\overline{\lim_{V_r}}\, \mu_t(S(f - A \in O_\varepsilon(\theta))) = 1 \qquad \forall\,\varepsilon > 0,$$

тобто A — μ-точка функції f. Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай A — точка строгої опуклості ядра $K(f)$ обмеженої функції $f \in \Phi$. Тоді*:

1) *існує гіперплощина H, визначена неперервною лінійною формою φ: $L \to R$ так, що $H \bigcap K(f-A) = \{\theta\}$, $f(x) - A = z(x) + c(x) z_0$, де $z(x) \in H$, $\varphi(z_0) = 1$, $c(y) \ge 0$ для будь-якого $y \in K(f-A)$ і можна вважати $c(x) \ge 0$ при $x \in S$*;

2) *точка A — μ^*-точка функції f тоді і тільки тоді, коли точка нуль є μ-точкою функції $c(x)$*;

3) *точка A — μ^*-точка функції f тоді і тільки тоді, коли вона є μ^{**}-точкою функції f, тобто $\exists\, E^* \in \sigma\colon\ E^* \bigcap U_r = U_r^* \ne \varnothing \quad \forall\, r > 0$, $\overline{\lim\limits_{U_r^*}}\, \mu_t(E^*) = 1$ і переозначення функції f на E^* за допомогою рівності $f(x) = A$, $x \in E^*$, не змінює ядра $K(f)$ функції f.*

Доведення. Нехай A — точка строгої опуклості ядра $K(f)$ функції f, тобто існує замкнена гіперплощина H, для якої $K(f) \bigcap H = \{A\}$, причому $K(f)$ знаходиться по один бік від H. Оскільки $K(f-A) = K(f) - A$, то нуль простору L — точка строгої опуклості ядра $K(f-A)$. Тому для вказаної гіперплощини H $K(f-A) \bigcap H = \{\theta\}$ і $K(f-A)$ знаходиться по один бік від H. Вважаємо, що H визначається неперервною лінійною формою $\varphi\colon L \to R$, для якої $\varphi(y) \ge 0\ \ \forall\, y \in K(f-A)$. Позначимо $S_- = \{x \in S\colon\ \varphi(f(x) - A) < 0\}$. Можливі два випадки:

1) $S_- \subset S \setminus U_{r_0}$ для деякого $r_0 > 0$;

2) $S_- \bigcap U_r = U_r^* \ne \varnothing$ для $r > 0$.

Оскільки значення функції f на множині $S \setminus U_{r_0}$ не впливають на ядро $K(f-A)$ функції $f - A$, то у випадку 1 можна переозначити функцію f на множині S_-, поклавши $f(x) = A$ для $x \in S_-$.

Оскільки $\forall\, x \in S\ \exists\, z(x) \in H$, $z_0 \in L$, і $c(x) \in R\colon f(x) - A = z(x) + c(x) z_0$ і $\varphi(z_0) = 1$, то $\varphi(f(x) - A) = c(x)$. За відомою властивістю інтеграла $c(x) \in$ $\in \Phi$. Можна показати, що $S_- \in \sigma$. Тому вказане вище переозначення функції f на множині S_- не виводить функцію f з класу Φ.

Нехай має місце випадок 2. Тоді, враховуючи, що $(f - A)(U_r^*) \subset (f -$

$-A)(U_r)$, маємо $\mathrm{Co}(f-A)(U_r^*) \subset \mathrm{Co}(f-A)(U_r) \Rightarrow \bigcap_{r>0} \mathrm{Co}(f-A)(U_r^*) \subset$ $\subset \bigcap_{r>0} \mathrm{Co}(f-A)(U_r) = K(f-A)$.

Тому, припустивши, що $\bigcap_{r>0} \mathrm{Co}(f-A)(U_r^*) \neq \{\theta\}$, маємо або $\exists\, y \in$ $\in K(f-A)$: $\varphi(x) < 0$, або $K(f-A) \cap H \neq \{\theta\}$, а це неможливо.

Таким чином, у випадку 2 $\bigcap_{r>0} \mathrm{Co}(f-A)(U_r^*) = \{\theta\}$. Тому переозначення функції f на множині S_- рівністю $f(x) - A = \theta$, $x \in S_-$, не змінює ядра $K(f-A)$ і не виводить функцію f з класу Φ. Отже, можна вважати, що $c(x) = \varphi(f(x) - A) \geq 0$, $x \in S$.

Припустимо тепер, що точка A є точкою не тільки строгої опуклості ядра $K(f)$ функції f, але також є μ^*-точкою функції f. Тоді для будь-якого околу $O(\theta)$ нуля простору L множина $S(f - A \notin O(\theta))$ є такою, що має місце (4), а тому

$$\exists\, r_n \uparrow \infty \quad \text{і} \quad t_n \in V_{r_n}\colon \lim_{n\to\infty} \int\limits_{S(f-A\notin O(\theta))} (f-A)\, d\mu_{t_n} = \theta.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{S(f-A\notin O(\theta))} c\, d\mu_{t_n} = 0, \tag{8}$$

де $c(x) = \varphi(f(x) - A)$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді існує окіл $O(\theta)$ такий, що $f(x) - A + O(\theta) = O(f(x) - A)$ і $\{y \in L\colon \varphi(y) \geq \varepsilon\} + O(\theta)$ не перетинаються (див., наприклад, [5, с. 96]), а це означає, що коли $f(x) - A \in O(\theta)$, то $c(x) = \varphi(f(x) - A) < \varepsilon$. Тому $S(f - A \notin O(\theta)) \supset S(c \geq \varepsilon)$. Звідси та з рівності (8), враховуючи нерівність $c(x) \geq 0$ для кожного $x \in S$, одержуємо

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{S(c\geq\varepsilon)} c\, d\mu_{t_n} = 0. \tag{9}$$

Отже, якщо A — точка не тільки строгої опуклості ядра $K(f)$ функції f, але також є μ^*-точкою функції f, то точка 0 є μ^*-точкою функції $c = c(x)$.

Оскільки

$$\int\limits_{S(c\geq\varepsilon)} c\, d\mu_{t_n} \geq \varepsilon\, \mu_{t_n}(S(c\geq\varepsilon)),$$

то з умови (9) випливає умова $\lim_{n\to\infty} \mu_{t_n}(S(c\geq\varepsilon)) = 0$, звідки, враховуючи рівність $\lim_{n\to\infty} \mu_{t_n}(S) = 1$, одержуємо $\lim_{n\to\infty} \mu_{t_n}(S(c<\varepsilon)) = 1$. Це означає, що точка 0 є μ-точкою функції $c(x)$. За лемою 1

$$\exists\, E^* \subset S;\ E^* \in \sigma,\ U_r^* = U_r \cap E^* \neq \varnothing \quad \forall\, r > 0,$$

$$\lim_{U_r^*} c = 0 \quad \text{і} \quad \overline{\lim_{V_r}}\, \mu_t(E^*) = 1.$$

Тому $\exists\, r_n \uparrow +\infty$ і $t_n \in V_{r_n}$ $\forall\, n$: $\lim_{n\to\infty} \mu_{t_n}(E^*) = 1$.

Знову, як і вище, маємо

$$\bigcap_{r>0} \mathrm{Co}(f-A)(U_r^*) \subset \bigcap_{r>0} \mathrm{Co}(f-A)(U_r) = K(f-A).$$

Окрім того, для $\varepsilon > 0$

$$\exists\, r_0(\varepsilon):\ \operatorname{Co}(f-A)(U_r^*) \subset S(c<\varepsilon) \quad \forall\, r>r_0 \ \Rightarrow$$
$$\bigcap_{r>0} \operatorname{Co}(f-A)(U_r^*) \subset H,$$

а тому $\bigcap_{r>0} \operatorname{Co}(f-A)(U_r^*) = \{\theta\}$. Отже, якщо переозначити функцію f на множині E^*, поклавши $f(x) = A$, то це не змінить ядра $K(f)$ функції f.

Таким чином, якщо A — точка строгої опуклості ядра $K(f)$ функції f, а також є μ^*-точкою функції f, то A є також μ^{**}-точкою функції f. Обернене твердження, очевидно, також правильне. Лему 2 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Нехай A — μ^*-точка функції $f \in \Phi$, а метод M майже додатний і регулярний. Враховуючи проведені вище міркування, можна вважати метод M додатним. Тоді для будь-якого околу $O(\theta)$ нуля простору L множина $S\left(f - A \notin \frac{1}{3H} O(\theta)\right)$ є такою, що нуль простору L є частковою границею за системою V_r функції

$$M_1(t) = \int\limits_{S\left(f-A\notin\frac{1}{3H}O(\theta)\right)} (f-A)\,d\mu_t, \qquad t \in T,$$

де $H > 1$ визначається умовою $\mu_t(S) \le H$, $t \in V_{r_0}$, при деякому $r_0 > 0$. З означення граничної точки випливає існування послідовності $r_n \uparrow +\infty$ і $t_n \in \in V_{r_n}$, для яких $\lim\limits_{n\to\infty} M_1(t_n) = 0$, а тому

$$\exists\, n_0:\ M_1(t_n) \in \frac{1}{3} O(\theta) \ \text{ і } \ A\left(\mu_{t_n}(S) - 1\right) \in \frac{1}{3} O(\theta) \qquad \forall\, n \ge n_0.$$

Враховуючи відомі властивості інтеграла та додатність і регулярність методу M, для $t = t_n$ і $\forall\, n \ge n_0$ одержуємо

$$M(t) - A = \int\limits_S (f-A)\,d\mu_t + A(\mu_t(S) - 1) =$$
$$= \int\limits_{S\left(f-A\in\frac{1}{3H}O(\theta)\right)} (f-A)\,d\mu_t + \int\limits_{S\left(f-A\notin\frac{1}{3H}O(\theta)\right)} (f-A)\,d\mu_t + A(\mu_t(S) - 1) \in$$
$$\in \mu_t(S)\frac{1}{3}O(\theta) + \frac{1}{3}O(\theta) + \frac{1}{3}O(\theta) \subset$$
$$\subset \frac{1}{3}O(\theta) + \frac{1}{3}O(\theta) + \frac{1}{3}O(\theta) = O(\theta).$$

Отже, в будь-якому околі точки A є безліч значень функції M в точках $t_n \in V_{r_n}$, де $r_n \uparrow +\infty$.

Припустимо, що $A \notin K(M)$. Тоді $\exists\, r_0 > 0:\ A \notin \operatorname{Co} M(V_{r_0}) \supset \operatorname{Co} M(V_{r_n})$ $\forall\, n \ge n_0$. Оскільки існує опуклий окіл нуля $O(\theta)$ такий, що опуклі множини $A + O(\theta)$ і $\operatorname{Co} M(V_{r_0}) + O(\theta)$ не перетинаються, то згідно з [5] (гл. II, § 3, п. 2, предложение 1) існує замкнена гіперплощина H^*, яка розділяє $A + O(\theta)$ і $\operatorname{Co} M(V_{r_0}) + O(\theta)$. Отже, в деякому околі точки A немає жодного значення функції $M(t)$, коли $t \in V_{r_{n_0}} \supset V_{r_n}$ $\forall\, n > n_0$. Це суперечить тому, що в будь-якому околі A є безліч значень функції M в точках $t_n \in V_{r_n}$ $\forall\, n$.

Таким чином, якщо A є μ^*-точкою функції $f \in \Phi$, то $A \in K(M)$. Зокрема, легко бачити, що $A \in K(M)$, коли A є μ-точкою обмеженої функції $f \in \Phi$.

Нехай тепер $A \in K(M)$. Можна показати, що $A \in K(f)$, але, взагалі кажучи, A не обов'язково є μ^*-точкою цієї послідовності. Наприклад, для одиничного методу підсумовування і послідовності $f = (-1)^n$, $n \in N_0$, точка $0 \in \in K(M) \subset K(f)$, але вона не є μ^*-точкою цієї послідовності.

На точку A, крім умови $A \in K(M)$, накладемо ще й умову, що вона є точкою строгої опуклості ядра $K(f)$ функції f. Тоді існує замкнена гіперплощина H, для якої $K(f) \cap H = \{A\}$, причому $K(f)$ лежить по один бік від H. Оскільки $A \in K(M)$ і $K(M) \subset K(f)$, то $K(M) \cap H = \{A\}$, тобто A є точкою строгої опуклості і ядра $K(M)$ функції $M(t) = \int_S f\, d\mu_t$. Як показано при доведенні леми 2, існує гіперплощина H, для якої $K(f-A) \cap H = K(M-A) \cap \cap H = \{\theta\}$, причому H визначається неперервною лінійною формою $\varphi : L \to \to R$ і можна вважати, що $\varphi(f(x) - A) \geq 0 \ \ \forall x \in S$.

Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і розглянемо множину $S(c > \varepsilon) \doteq \{x \in S : c(x) > > \varepsilon\}$. Якщо припустити, що $\varlimsup\limits_{V_r} \int_{S(c>\varepsilon)} c(x)\, d\mu_t > 0$, то одержимо нерівність

$$\varlimsup_{V_r} \int_S c(x)\, d\mu_t \geq \varlimsup_{V_r} \int\limits_{S(c>\varepsilon)} c(x)\, d\mu_t > 0.$$

Тому $\varphi\left(\int_S (f-A)\, d\mu_t\right) = \int_S c(x)\, d\mu_t \geq \delta > 0$, $t \in V_{r_0}$, при деякому $r_0 > > 0$. Звідси випливає, що точка нуль не належить до ядра $K(M-A)$ функції $(M-A)$, що суперечить умові $A \in K(M)$.

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \varlimsup_{V_r} \int\limits_{S(c>\varepsilon)} c(x)\, d\mu_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \varliminf_{V_r} \mu_t(S(c>\varepsilon)) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\overline{\lim_{V_r}}\, \mu_t(S(c>\varepsilon)) = 1.$$

Це означає, що точка нуль є μ-точкою функції $c = c(x)$. За лемою 2 точка A є μ^*-точкою функції f. Теорему 2 доведено.

5. Наслідок 1 безпосередньо випливає з теореми 2, оскільки $K(f)$, а отже, і $K(M)$, є замкненою опуклою оболонкою множини своїх точок строгої опуклості.

Наслідок 2 випливає з наслідку 1, оскільки в обмежено компактних просторах $K(f)$ є замкненою опуклою оболонкою множини своїх точок строгої опуклості.

1. *Ревенко А. В.* Линейные интегральные операторы, сохраняющие и порождающие сходимость. – Киев, 1984. – 16 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 1816-Ук.84.
2. *Барон С.* Введение в теорию суммирования рядов. – Таллинн: Валгус, 1977. – 280 с.
3. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 504 с.
4. *Ревенко А. В.* Вложение ядер регулярными преобразованиями // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 5. – С. 662–666.
5. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 412 с.
6. *Давыдов Н. А., Михалин Г. А.* О ядрах ограниченных последовательностей // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 4. – С. 537–550.
7. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М.: Физматгиз, 1960. – 472 с.

Одержано 15.07.97,
після доопрацювання — 23.12.97