УДК 517.962.2

Г. П. Пелюх (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СТРУКТУРЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

We investigate the structure of general solution of systems of nonlinear difference equations with continuous argument in a neighborhood of equilibrium.

Досліджено структуру загального розв'язку систем нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом в околі стану рівноваги.

Рассмотрим систему нелинейных разностных уравнений

$$x(t+1) = \Lambda x(t) + f(t, x(t)), \tag{1}$$

где $t \in R = (-\infty, +\infty)$, Λ — вещественная, постоянная $(n \times n)$-мерная матрица, $f\colon R \times C^n \to C^n$, $x(t)$ — неизвестная комплекснозначная вектор-функция размерности n. Будем исследовать структуру множества непрерывных решений этой системы, находящихся в окрестности ее тривиального решения $(f(t,0) \equiv 0)$. При различных предположениях эта задача изучалась многими математиками. В частности, для широких классов таких уравнений построено представление общего непрерывного решения [1 – 6]. Продолжая начатые в [5, 6] исследования, в настоящей работе удалось получить аналогичные результаты при менее обременительных предположениях относительно вектор-функции $f(t, x)$.

1. Общее решение системы нелинейных разностных уравнений (1) в окрестности ее тривиального решения $x(t) \equiv 0$. Рассмотрим систему уравнений (1) при следующих предположениях:

1) собственные числа λ_i, $i = 1, \ldots, n$, матрицы Λ вещественны и удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j, \quad 0 < |\lambda_i| < 1, \quad i, j = 1, \ldots, n;$$

2) $\lambda_*^{-1} {\lambda^*}^{1+\alpha} < 1$, где $\lambda_* = \min\{|\lambda_i|,\ i = 1, \ldots, n\}$, $\lambda^* = \max\{|\lambda_i|,\ i = 1, \ldots, n\}$;

3) вектор-функция $f(t, x) = (f_1(t, x), \ldots, f_n(t, x))$ является непрерывной и ограниченной по t, непрерывно дифференцируемой по x при $t \in R$, $|x| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i| \le b$ и

$$f(t, 0) \equiv 0, \qquad \left.\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right|_{x=0} \equiv 0, \qquad \text{где } \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x_j}\right);$$

4) $\left|\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial x} - \dfrac{\partial f(t, y)}{\partial y}\right| \le L|x - y|^{\alpha}$, где

$$\left|\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_i(t, x)}{\partial x_j}\right|,$$

$$L = \text{const} > 0, \ \ 0 < \alpha \le 1, \ \ (t, x), (t, y) \in D = R \times [-b, b].$$

Поскольку в силу условия 1 существует неособая замена переменных $x(t) = Cy(t)$, приводящая систему уравнений (1) к виду

$$y(t+1) = C^{-1}\Lambda C y(t) + C^{-1} f(t, Cy(t)),$$

причем $C^{-1}\Lambda C = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то в дальнейшем будем считать, что сама матрица Λ имеет такой вид, т. е. $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1 – 4. *Тогда существует замена переменных*

$$y(t) = x(t) + \gamma(t, x(t)), \tag{2}$$

где вектор-функция $\gamma(t, x) = (\gamma_1(t, x), \ldots, \gamma_n(t, x))$ *является непрерывной и ограниченной по* t, *непрерывно дифференцируемой по* x *в некоторой области* $D_* = R \times [-b_*, b_*]$, $b_* < b$, *и такой, что выполняются соотношения*

$$\begin{gathered} \gamma(t, 0) \equiv 0, \ \left.\frac{\partial\gamma(t, x)}{\partial x}\right|_{x=0} \equiv 0, \\ \left|\frac{\partial\gamma(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial\gamma(t, y)}{\partial y}\right| \leq M|x-y|^{\alpha}, \quad M = \mathrm{const} > 0, \quad (t, x), (t, y) \in D_*, \end{gathered} \tag{3}$$

приводящая систему уравнений (1) *к линейному виду*

$$y(t+1) = \Lambda y(t). \tag{4}$$

Для доказательства теоремы достаточно, очевидно, показать, что существует решение системы уравнений

$$\gamma(t+1, \Lambda x + f(t, x)) = \Lambda\gamma(t, x) - f(t, x), \tag{5}$$

удовлетворяющее указанным в теореме условиям.

С помощью соотношений

$$\begin{gathered} \gamma_0(t, x) = 0, \\ \gamma_m(t, x) = \Lambda^{-1}\gamma_{m-1}(t+1, \Lambda x + f(t, x)) + \Lambda^{-1}f(t, x), \quad m = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{6}$$

определим последовательность вектор-функций $\{\gamma_m(t, x)\}$ и докажем, что в некоторой области $D_* \subset D$ она равномерно сходится к вектор-функции $\gamma(t, x)$, которая удовлетворяет указанным в теореме условиям и является решением системы уравнений (5).

Сначала покажем, что при достаточно малом $b_* < b$ и всех $m = 1, 2, \ldots$ выполняются оценки

$$\begin{gathered} |\gamma_m(t, x) - \gamma_{m-1}(t, x)| \leq M_0\theta^{m-1}|x|^{1+\alpha}, \\ \left|\frac{\partial\gamma_m(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_{m-1}(t, x)}{\partial x}\right| \leq M_0\theta^{m-1}|x|^{\alpha}, \\ \left|\frac{\partial\gamma_m(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_m(t, y)}{\partial y}\right| \leq M_1|x-y|^{\alpha}, \end{gathered} \tag{7}$$

где M_0, M_1 — положительные постоянные $\left(M_0, M_1 > \lambda_*^{-1}L\right)$, $\lambda_*^{-1}\lambda^{*^{1+\alpha}} < \theta < 1$, $(t, x), (t, y) \in D_*$.

В самом деле, поскольку

$$\gamma_1(t, x) - \gamma_0(t, x) = \Lambda^{-1}f(t, x),$$

то в силу условий 3, 4 оценки (7) выполняются при $m = 1$. Рассуждая по индукции, предположим справедливость оценок (7) для некоторого $m \geq 1$ и докажем, что они сохраняются при переходе от m к $m + 1$. Действительно, поскольку при $t \in R$, $|x| \leq b_*$ имеем (вытекает из условий 3, 4)

$$|\Lambda x + f(t,x)| \le (\lambda^* + \delta)|x|, \qquad \left|\Lambda + \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \le \lambda^* + \delta,$$

где $\delta = \delta(b_*) \to 0$ при $b_* \to 0$, то, принимая во внимание соотношения

$$\gamma_{m+1}(t,x) - \gamma_m(t,x) = \Lambda^{-1}\big[\gamma_m(t+1, \Lambda x + f(t,x)) -$$
$$- \gamma_{m-1}(t+1, \Lambda x + f(t,x))\big],$$
$$\frac{\partial\gamma_{m+1}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_m(t,x)}{\partial x} = \Lambda^{-1}\left[\frac{\partial\gamma_m}{\partial x}(t+1, \Lambda x + f(t,x)) -\right.$$
$$\left. - \frac{\partial\gamma_{m-1}(t,x)}{\partial x}(t+1, \Lambda x + f(t,x))\right]\left(\Lambda + \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right),$$

находим

$$\left|\gamma_{m+1}(t,x) - \gamma_m(t,x)\right| \le \lambda_*^{-1}|\gamma_m(t+1, \Lambda x + f(t,x)) -$$
$$-\gamma_{m-1}(t+1, \Lambda x + f(t,x))| \le \lambda_*^{-1}M_0\theta^{m-1}|\Lambda x + f(t,x)|^{1+\alpha} \le$$
$$\le M_0\theta^{m-1}\lambda_*^{-1}(\lambda^* + \delta)^{1+\alpha}|x|^{1+\alpha},$$
$$\left|\frac{\partial\gamma_{m+1}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_m(t,x)}{\partial x}\right| \le \lambda_*^{-1}\left|\frac{\partial\gamma_m}{\partial x}(t+1, \Lambda x + f(t,x)) -\right.$$
$$\left.- \frac{\partial\gamma_{m-1}}{\partial x}(t+1, \Lambda x + f(t,x))\right|\left|\Lambda + \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \le$$
$$\le \lambda_*^{-1}M_0\theta^{m-1}|\Lambda x + f(t,x)|^{\alpha}(\lambda^* + \delta) \le M_0\theta^{m-1}\lambda_*^{-1}(\lambda^* + \delta)^{1+\alpha}|x|^{\alpha},$$
$$\left|\frac{\partial\gamma_{m+1}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial\gamma_{m+1}(t,y)}{\partial y}\right| \le \lambda_*^{-1}\left|\frac{\partial\gamma_m}{\partial x}(t+1, \Lambda x + f(t,x))\left(\Lambda + \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right) -\right.$$
$$\left.- \frac{\partial\gamma_m}{\partial y}(t+1, \Lambda y + f(t,y))\left(\Lambda + \frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right)\right| + \lambda_*^{-1}\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| \le$$
$$\le \lambda_*^{-1}\left|\frac{\partial\gamma_m}{\partial x}(t+1, \Lambda x + f(t,x)) - \frac{\partial\gamma_m}{\partial y}(t+1, \Lambda y + f(t,y))\right|\left|\Lambda + \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| +$$
$$+ \lambda_*^{-1}\left|\frac{\partial\gamma_m}{\partial y}(t+1, \Lambda y + f(t,y))\right|\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| + \lambda_*^{-1}\left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| \le$$
$$\le \lambda_*^{-1}M_1|\Lambda x + f(t,x) - \Lambda y - f(t,y)|^{\alpha}\left|\Lambda + \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| + \lambda_*^{-1}\frac{M_0}{1-\theta}(\lambda^* + \delta)|y|^{\alpha} \times$$
$$\times L|x-y|^{\alpha} + \lambda_*^{-1}L|x-y|^{\alpha} \le M_1\lambda_*^{-1}(\lambda^* + \delta)^{1+\alpha}|x-y|^{\alpha} + \frac{M_0}{1-\theta}L\lambda_*^{-1}(\lambda^* +$$
$$+ \delta)b_*^{\alpha}|x-y|^{\alpha} + \lambda_*^{-1}L|x-y|^{\alpha} = M_1\Big[\lambda_*^{-1}(\lambda^* + \delta)^{1+\alpha} +$$
$$+ \frac{\lambda_*^{-1}(\lambda^* + \delta)}{1-\theta}M_0LM_1^{-1}b_*^{\alpha} + \lambda_*^{-1}LM_1^{-1}\Big]|x-y|^{\alpha}.$$

Так как $\lambda_*^{-1}\lambda^{*^{1+\alpha}} < \theta$, то при достаточно малом b_* и достаточно большом M_1 имеем

$$\lambda_*^{-1}(\lambda^* + \delta)^{1+\alpha} < \theta,$$

$$\lambda_*^{-1}(\lambda^* + \delta)^{1+\alpha} + \frac{\lambda_*^{-1}(\lambda^* + \delta)}{1-\theta} M_0 L M_1^{-1} b_*^{\alpha} + \lambda_*^{-1} L M_1^{-1} \le 1,$$

и, следовательно, выполняются соотношения

$$\left|\gamma_{m+1}(t,x) - \gamma_m(t,x)\right| \le M_0 \theta^m |x|^{1+\alpha},$$

$$\left|\frac{\partial \gamma_{m+1}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_m(t,x)}{\partial x}\right| \le M_0 \theta^m |x|^{\alpha},$$

$$\left|\frac{\partial \gamma_{m+1}(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{m+1}(t,y)}{\partial y}\right| \le M_1 |x-y|^{\alpha}.$$

Тем самым доказано, что оценки (7) выполняются при $(t, x), (t, y) \in D_*$ и всех $m \ge 1$.

Из (7) непосредственно вытекает, что последовательность вектор-функций $\gamma_m(t,x)$, $m = 0, 1, \ldots$, определенных соотношениями (6), равномерно сходится при $(t,x) \in D_*$ к вектор-функции $\gamma(t,x)$, которая в области D_* является непрерывной и ограниченной по t, непрерывно дифференцируемой по x и удовлетворяет условиям (3). Переходя в (6) к пределу при $m \to \infty$, можно убедиться, что вектор-функция $\gamma(t,x) = \lim_{m\to\infty}\gamma_m(t,x)$ является решением системы уравнений (5). Теорема 1 доказана.

***Замечание* 1.** Теорема 1 справедлива и в случае, когда среди собственных чисел λ_i, $i = 1, \ldots, n$, имеются комплексные.

Используя теорему 1, можно получить представление любого непрерывного решения системы уравнений (1) в окрестности тривиального решения. Действительно, поскольку общее непрерывное решение системы уравнений (4) имеет вид

$$y_i(t) = |\lambda_i|^t \omega_i(t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

где $\omega_i(t)$ — произвольные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $\omega_i(t+1) = \operatorname{sign}\lambda_i \omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, то (вытекает из (2) и (3)) для произвольного непрерывного решения системы уравнений (1), удовлетворяющего при $t \ge 0$ условию $|x(t)| \le b_*$, получаем

$$x(t) = y(t) + \gamma^{-1}(t, y(t)), \tag{9}$$

где $y(t) = \left(|\lambda_1|^t \omega_1(t), \ldots, |\lambda_n|^t \omega_n(t)\right)$ и $\gamma^{-1}(t,y)$ — некоторая непрерывная и ограниченная по t, непрерывно дифференцируемая по y в некоторой области $R \times \left[-\tilde{b}, \tilde{b}\right]$, $\tilde{b} < b_*$, вектор-функция, удовлетворяющая условиям (3), и $\omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ — некоторые непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $\omega_i(t+1) = \operatorname{sign}\lambda_i \omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Инвариантные многообразия систем нелинейных разностных уравнений и их свойства. Рассмотрим теперь случай, когда нарушаются условия 1, 2. Именно, предположим, что собственные числа λ_i, $i = 1, \ldots, n$, матрицы Λ удовлетворяют условиям:

1′) $\lambda_i \ne \lambda_j$, $i \ne j$, $i, j = 1, \ldots, n$, $0 < |\lambda_i| < 1 < |\lambda_j|$,

$i = 1, \ldots, p$, $j = p+1, \ldots, n$;

2′) $\tilde{\lambda}_*^{-1} \tilde{\lambda}^{*1+\alpha} < 1$, где $\tilde{\lambda}_* = \min\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, p\}$, $\tilde{\lambda}^* = \max\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, p\}$.

Для удобства систему уравнений (1) запишем в виде

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= \tilde{\Lambda}x(t) + \tilde{f}(t, x(t), y(t)), \\
y(t+1) &= \tilde{\tilde{\Lambda}}x(t) + \tilde{\tilde{f}}(t, x(t), y(t)),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $\tilde{\Lambda} = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, $\tilde{\tilde{\Lambda}} = \operatorname{diag}\{\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n\}$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_{p+1}, \ldots$ $\ldots, y_n)$, $\tilde{f} = (f_1, \ldots, f_p)$, $\tilde{\tilde{f}} = (f_{p+1}, \ldots, f_n)$, и предположим, что вектор-функции $\tilde{f}(t, x, y)$, $\tilde{\tilde{f}}(t, x, y)$ удовлетворяют условиям 3, 4. Как и прежде, нашей конечной целью является построение представления общего непрерывного решения системы (10) в окрестности тривиального решения $x(t) = 0$, $y(t) = 0$. Поскольку в этом случае теорема 1, вообще говоря, не имеет места, то получить представление общего непрерывного решения вида (9) не представляется возможным. Однако в этом случае справедлива следующая теорема, которая дает возможность существенно упростить исследование системы уравнений (10).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1′, 2′, 3, 4. *Тогда существует замена переменных*

$$
x(t) = \bar{x}(t), \qquad y(t) = \bar{y}(t) + \psi(t, \bar{x}(t)) \tag{11}
$$

такая, что $(n-p)$*-мерная вектор-функция* $\psi(t, \bar{x}(t))$ *является непрерывной и ограниченной по* t, *непрерывно дифференцируемой по* $\bar{x}$ *в некоторой области* $D_* = R \times [-b_*, b_*]$, $b_* < b$, *удовлетворяет условиям*

$$
\begin{gathered}
\psi(t, 0) \equiv 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi(t, \bar{x})}{\partial\bar{x}}\right|_{\bar{x}=0} \equiv 0, \\
\left|\frac{\partial\psi(t, \bar{x})}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial\psi(t, \bar{y})}{\partial\bar{y}}\right| \le M|\bar{x} - \bar{y}|^{\alpha}, \qquad M = \mathrm{const} > 0,
\end{gathered}
\tag{12}
$$

$(t, \bar{x}), (t, \bar{y}) \in D_*$, *и в новых переменных* $\bar{x}$, $\bar{y}$ *система уравнений* (10) *имеет вид*

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(t+1) &= \tilde{\Lambda}\bar{x}(t) + \bar{f}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)), \\
\bar{y}(t+1) &= \tilde{\tilde{\Lambda}}\bar{y}(t) + \bar{\bar{f}}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где вектор-функции $\bar{f}(t, \bar{x}, \bar{y})$, $\bar{\bar{f}}(t, \bar{x}, \bar{y})$ *удовлетворяют условиям* 3, 4 *и* $\bar{\bar{f}}(t, \bar{x}, 0) \equiv 0$.

Замечание 2. Условие $\bar{\bar{f}}(t, \bar{x}, 0) \equiv 0$ означает, что многообразие $y = \psi(t, x)$ является локально инвариантным относительно отображения

$$
\begin{aligned}
x &\to \tilde{\Lambda}x + \tilde{f}(t, x, y), \\
y &\to \tilde{\tilde{\Lambda}}y + \tilde{\tilde{f}}(t, x, y), \\
t &\to t + 1.
\end{aligned}
$$

Доказательство теоремы 2. Выполняя в (10) замену переменных (11), получаем (13), где

$$
\bar{f}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \tilde{f}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t) + \psi(t, \bar{x}(t))),
$$

$$\bar{\bar{f}}(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \tilde{\bar{f}}\big(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t) + \psi(t, \bar{x}(t))\big) + \tilde{\bar{\Lambda}}\psi(t, \bar{x}(t)) -$$
$$- \psi\Big(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x}(t) + \tilde{f}\big(t, \bar{x}(t), \bar{y}(t) + \psi(t, \bar{x}(t))\big)\Big).$$

Отсюда непосредственно вытекает, что для доказательства теоремы достаточно доказать существование решения системы функциональных уравнений

$$\psi\big(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t, \bar{x}, \psi(t, \bar{x}))\big) = \tilde{\bar{\Lambda}}\psi(t, \bar{x}) + \tilde{\bar{f}}(t, \bar{x}, \psi(t, \bar{x})) \tag{14}$$

с указанными в теореме свойствами.

С помощью соотношений

$$\psi_0(t, \bar{x}) = 0,$$
$$\psi_m(t, \bar{x}) = \tilde{\bar{\Lambda}}^{-1}\psi_{m-1}\big(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x}))\big) -$$
$$- \tilde{\bar{\Lambda}}^{-1}\tilde{\bar{f}}\big(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t, \bar{x})\big), \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

определим последовательность вектор-функций $\{\psi_m(t, \bar{x})\}$ и докажем, что в некоторой области D_* она равномерно сходится к вектор-функции $\psi(t, \bar{x})$, которая удовлетворяет указанным в теореме условиям и является решением системы уравнений (14).

Сначала покажем, что при достаточно малых $b_* < b$ и всех $m = 0, 1, \ldots$ выполняются оценки

$$\big|\psi_m(t, \bar{x}) - \psi_{m-1}(t, \bar{x})\big| \le N_0 \theta_0^{m-1} |\bar{x}|^{1+\alpha}, \tag{16}$$

$$\left|\frac{\partial\psi_m(t, \bar{x})}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial\psi_{m-1}(t, \bar{x})}{\partial\bar{x}}\right| \le N_1 \theta_1^{m-1} |\bar{x}|^{\alpha}, \tag{17}$$

$$\left|\frac{\partial\psi_m(t, \bar{x}')}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial\psi_m(t, \bar{x}'')}{\partial\bar{x}}\right| \le N |\bar{x}' - \bar{x}''|^{\alpha}, \tag{18}$$

где $(t, \bar{x}), (t, \bar{x}'), (t, \bar{x}'') \in D_*$, N_0, N_1, N — некоторые положительные постоянные, $\bar{\bar{\lambda}}_*^{-1} \tilde{\lambda}^{*^{1+\alpha}} < \theta_0 < 1$, $\theta_0^{\alpha} < \theta_1 < 1$, причем $\tilde{\lambda}^* = \max\{|\lambda_i|,\ i = 1, \ldots, p\}$, $\bar{\bar{\lambda}}_* = \min\{|\lambda_i|,\ i = p+1, \ldots, n\}$.

В самом деле, поскольку

$$\psi_1(t, \bar{x}) = -\tilde{\bar{\Lambda}}^{-1}\tilde{\bar{f}}(t, \bar{x}, 0),$$

то в силу условий 3, 4 оценки (16) – (18) выполняются при $m = 1$. Предположим, что оценки (16) – (18) доказаны уже для некоторого $m \ge 1$, и покажем, что они сохраняются при переходе от m к $m+1$.

Действительно, в силу условий 1′, 3, 4 и (16) – (18) при достаточно малых $|x| \le b_* < b$ $(b_* < 1)$ имеем

$$\big|\tilde{f}(t, x', y') - \tilde{f}(t, x'', y'')\big| \le L b_*^{\alpha}(|x' - x''| + |y' - y''|),$$

$$\big|\tilde{\bar{f}}(t, x', y') - \tilde{\bar{f}}(t, x'', y'')\big| \le L b_*^{\alpha}(|x' - x''| + |y' - y''|),$$

где $(t, x', y'), (t, x'', y'') \in D_*$;

$$|\psi_m(t, \bar{x})| \le \frac{N_0}{1-\theta_0} |x|^{1+\alpha} \le b,$$

$$\left|\frac{\partial\psi_m(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}}\right| \le N|\bar{x}|^{\alpha} < N,$$

$$|\psi_m(t,\bar{x}') - \psi_m(t,\bar{x}'')| \le Nb_*^{\alpha}|\bar{x}' - \bar{x}''|,$$

$$|\bar{x}|, |\bar{x}'|, |\bar{x}''| \le b_*; \tag{19}$$

$$\left|\tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))\right| \le \left(\tilde{\lambda}^* + \delta\right)|\bar{x}| \le b_*,$$

$$\delta = \delta(b_*) \to 0 \text{ при } b_* \to 0.$$

Тогда непосредственно из (15), (19) вытекает

$$\left|\psi_{m+1}(t,\bar{x}) - \psi_m(t,\bar{x})\right| \le \left|\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\right|\left|\psi_m\left(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))\right) -\right.$$

$$\left.- \psi_m\left(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}\left(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})\right)\right)\right| + \left|\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\right|\left|\psi_m\left(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}\left(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})\right)\right) -\right.$$

$$\left.- \psi_{m-1}\left(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}\left(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})\right)\right)\right| + \left|\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\right|\left|\tilde{\tilde{f}}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) -\right.$$

$$\left.- \tilde{\tilde{f}}\left(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})\right)\right| \le \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}N\left|\tilde{f}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) - \tilde{f}\left(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})\right)\right| +$$

$$+ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}N_0\theta_0^{m-1}\left|\tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}\left(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})\right)\right|^{1+\alpha} + \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}\left|\tilde{\tilde{f}}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) -\right.$$

$$\left.- \tilde{\tilde{f}}\left(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})\right)\right| \le \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}NLb_*^{\alpha}N_0\theta_0^{m-1}|\bar{x}|^{1+\alpha} +$$

$$+ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}N_0\theta_0^{m-1}(\lambda^* + \delta)^{1+\alpha}|\bar{x}|^{1+\alpha} + \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}Lb_*^{\alpha}N_0\theta_0^{m-1}|\bar{x}|^{1+\alpha} \le$$

$$\le N_0\theta_0^{m-1}\left[\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}NLb_*^{\alpha} + \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}(\tilde{\lambda}^* + \delta)^{1+\alpha} + \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}Lb_*^{\alpha}\right]|\bar{x}|^{1+\alpha}.$$

Поскольку $\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}\tilde{\lambda}^{*1+\alpha} < 1$, то $\theta_0 = \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}\left(\tilde{\lambda}^* + \delta\right)^{1+\alpha} + \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}LNb_*^{\alpha} + \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}Lb_*^{\alpha} < 1$ при достаточно малом b_*^{α} и, следовательно, оценка (16) сохраняется при переходе от m к $m+1$.

Принимая во внимание (19) и соотношение

$$\frac{\partial\psi_{m+1}(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}} = \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\frac{\partial\psi_m}{\partial\bar{x}}\left(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))\right)\left(\tilde{\Lambda} +\right.$$

$$\left.+ \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\bar{x}}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) + \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\psi}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))\frac{\partial\psi_m(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}}\right) -$$

$$- \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\frac{\partial\tilde{\tilde{f}}}{\partial\bar{x}}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) - \tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\frac{\partial\tilde{\tilde{f}}}{\partial\psi}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))\frac{\partial\psi_m(t,x)}{\partial\bar{x}},$$

находим

$$\left|\frac{\partial\psi_{m+1}(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial\psi_m(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}}\right| \le \left|\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\right|\left[\left(\left|\frac{\partial\psi_m}{\partial\bar{x}}\left(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))\right) -\right.\right.\right.$$

$$\left.- \frac{\partial\psi_m}{\partial\bar{x}}\left(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}\left(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})\right)\right)\right| + \left|\frac{\partial\psi_m}{\partial\bar{x}}\left(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}\left(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})\right)\right) -\right.$$

$$- \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial \bar{x}}\Big(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}\big(t, \bar{x}, \psi_{m-1}(t,\bar{x})\big)\Big)\Big|\Big)\Big|\tilde{\Lambda} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\tilde{f}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) +$$

$$+ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))\frac{\partial \psi_m(t,\bar{x})}{\partial \bar{x}}\Big| + \Big|\frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial \bar{x}}\Big(t+1, \tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}\big(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})\big)\Big)\Big| \times$$

$$\times \left(\left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{x}}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \bar{x}}\big(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})\big)\right| + \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))\right|\left|\frac{\partial \psi_m(t,\bar{x})}{\partial \bar{x}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial \psi_{m-1}(t,\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right| + \left|\frac{\partial \psi_{m-1}(t,\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right|\left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi}(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x}))\right|\right)\Big] +$$

$$+ \left|\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\right|\left|\frac{\partial \tilde{\tilde{f}}}{\partial \bar{x}}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) - \frac{\partial \tilde{\tilde{f}}}{\partial \bar{x}}\big(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})\big)\right| + \left|\tilde{\tilde{\Lambda}}^{-1}\right|\left(\left|\frac{\partial \tilde{\tilde{f}}}{\partial \psi}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x}))\right| \times\right.$$

$$\times \left|\frac{\partial \psi_m(t,\bar{x})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \psi_{m-1}(t,\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right| + \left|\frac{\partial \psi_{m-1}(t,\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right|\left|\frac{\partial \tilde{\tilde{f}}}{\partial \psi}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial \tilde{\tilde{f}}}{\partial \psi}(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x}))\right|\right) \le \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}\Big[\Big(N\big|\tilde{f}(t,\bar{x},\psi_m(t,\bar{x})) - \tilde{f}\big(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})\big)\big| +$$

$$+ N_1\theta_1^{m-1}\big|\tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}\big(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})\big)\big|^{\alpha}\Big)\big(\tilde{\lambda}^* + L(|\bar{x}| + |\psi_m(t,\bar{x})|)\big)^{\alpha} +$$

$$+ L(|\bar{x}| + |\psi_m(t,\bar{x})|)^{\alpha}N|\bar{x}|^{\alpha}\Big) + N\big|\tilde{\Lambda}\bar{x} + \tilde{f}\big(t,\bar{x},\psi_{m-1}(t,\bar{x})\big)\big|^{\alpha} \times$$

$$\times\Big(L\big|\psi_m(t,\bar{x}) - \psi_{m-1}(t,\bar{x})\big|^{\alpha} + L(|\bar{x}| + |\psi_m(t,\bar{x})|)^{\alpha}N_1\theta_1^{m-1}|\bar{x}|^{\alpha} +$$

$$+ N|\bar{x}|^{\alpha}L\big|\psi_m(t,\bar{x}) - \psi_{m-1}(t,\bar{x})\big|^{\alpha}\Big)\Big] + \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}L\big|\psi_m(t,\bar{x}) - \psi_{m-1}(t,\bar{x})\big|^{\alpha} +$$

$$+ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}\Big(L(|\bar{x}| + |\psi_m(t,\bar{x})|)^{\alpha}N_1\theta_1^{m-1}|\bar{x}|^{\alpha} + N|\bar{x}|^{\alpha}L\big|\psi_m(t,\bar{x}) -$$

$$- \psi_{m-1}(t,\bar{x})\big|^{\alpha}\Big) \le \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}\Big[\Big(NLb_*^{\alpha}N_0\theta_0^{m-1}|\bar{x}|^{1+\alpha} + N_1\theta_1^{m-1}\big(\tilde{\lambda}^* + \delta\big)^{\alpha}|\bar{x}|^{\alpha}\Big) \times$$

$$\times\left(\tilde{\lambda}^* + L\left(|\bar{x}| + \frac{N_0}{1-\theta_0}|\bar{x}|^{1+\alpha}\right)^{\alpha} + L\left(|\bar{x}| + \frac{N_0}{1-\theta_0}|\bar{x}|^{1+\alpha}\right)^{\alpha}N|\bar{x}|^{\alpha}\right) +$$

$$+ N\big(\tilde{\lambda}^* + \delta\big)^{\alpha}|\bar{x}|^{\alpha}\left(LN_0^{\alpha}\theta_0^{\alpha(m-1)}|\bar{x}|^{\alpha(1+\alpha)} + L\left(|\bar{x}| + \frac{N_0}{1-\theta_0}|\bar{x}|^{1+\alpha}\right)^{\alpha} \times\right.$$

$$\left.\times N_1\theta_1^{m-1}|\bar{x}|^{\alpha} + NL|\bar{x}|^{\alpha}N_0^{\alpha}\theta_0^{\alpha(m-1)}|\bar{x}|^{\alpha(1+\alpha)}\right)\Big] + \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}LN_0^{\alpha}\theta_0^{\alpha(m-1)}|\bar{x}|^{\alpha(1+\alpha)} +$$

$$+ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}\left(LN_1\theta_1^{m-1}|\bar{x}|^{\alpha}\left(|\bar{x}| + \frac{N_0}{1-\theta_0}|\bar{x}|^{1+\alpha}\right)^{\alpha} + LNN_0^{\alpha}\theta_0^{\alpha(m-1)}|\bar{x}|^{\alpha}|\bar{x}|^{\alpha(1+\alpha)}\right) \le$$

$$\leq N_1\theta_1^{m-1}\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}\Bigg[\Bigg(\Bigg(\left(\tilde{\lambda}^*+\delta\right)^{\alpha} + LN_0NN_1^{-1}b_*^{1+\alpha}\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^{m-1}\Bigg)\Bigg(\tilde{\lambda}^* +$$

$$+ L\left(b_* + \frac{N_0}{1-\theta_0}b_*^{1+\alpha}\right)^{\alpha}\left(1+Nb_*^{\alpha}\right)\Bigg) + N\left(\tilde{\lambda}^*+\delta\right)^{\alpha}\Bigg(LN_0^{\alpha}N_1^{-1}\left(\frac{\theta_0^{\alpha}}{\theta_1}\right)^{m-1}\times$$

$$\times b_*^{\alpha(1+\alpha)} + L\left(b_* + \frac{N_0}{1-\theta_0}b_*^{1+\alpha}\right)^{\alpha}b_*^{\alpha} + LN_0^{\alpha}NN_1^{-1}\left(\frac{\theta_0^{\alpha}}{\theta_1}\right)^{m-1}b_*^{\alpha(2+\alpha)}\Bigg) +$$

$$+ LN_0^{\alpha}N_1^{-1}\left(\frac{\theta_0^{\alpha}}{\theta_1}\right)^{m-1}b_*^{\alpha^2} + L\left(b_* + \frac{N_0}{1-\theta_0}b_*^{1+\alpha}\right)^{\alpha} +$$

$$+ LN_0^{\alpha}NN_1^{-1}\left(\frac{\theta_0^{\alpha}}{\theta_1}\right)^{m-1}b_*^{\alpha(1+\alpha)}\Bigg]|\bar{x}|^{\alpha}.$$

Таким образом, поскольку $\tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}\tilde{\lambda}^{*1+\alpha} < \theta_0 \leq \theta_0^{\alpha} < \theta_1 < 1$, то из последнего соотношения при достаточно малом b_* получаем

$$\left|\frac{\partial\psi_{m+1}(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial\psi_m(t,\bar{x})}{\partial\bar{x}}\right| \leq N_1\theta_1^m|\bar{x}|^{\alpha},$$

т. е. оценка (17) справедлива при $m+1$.

Аналогично находим

$$\left|\frac{\partial\psi_{m+1}(t,\bar{x}')}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial\psi_{m+1}(t,\bar{x}'')}{\partial\bar{x}}\right| \leq \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}\left|\frac{\partial\psi_m}{\partial\bar{x}}\left(t+1,\tilde{\Lambda}\bar{x}'+\tilde{f}(t,\bar{x}',\psi_m(t,\bar{x}'))\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\psi_m}{\partial\bar{x}}\left(t+1,\tilde{\Lambda}\bar{x}''+\tilde{f}(t,\bar{x}'',\psi_m(t,\bar{x}''))\right)\right|\left|\tilde{\Lambda} + \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\bar{x}}(t,\bar{x}',\psi_m(t,\bar{x}')) +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\psi}(t,\bar{x}',\psi_m(t,\bar{x}'))\frac{\partial\psi_m(t,\bar{x}')}{\partial\bar{x}'}\right| +$$

$$+ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}\left|\frac{\partial\psi_m}{\partial\bar{x}}\left(t+1,\tilde{\Lambda}\bar{x}''+\tilde{f}(t,\bar{x}'',\psi_m(t,\bar{x}''))\right)\right|\left(\left|\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\bar{x}}(t,\bar{x}',\psi_m(t,\bar{x}')) -\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\bar{x}}(t,\bar{x}'',\psi_m(t,\bar{x}''))\right| + \left|\frac{\partial\psi_m(t,\bar{x}')}{\partial\bar{x}}\right|\left|\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\psi}(t,\bar{x}',\psi_m(t,\bar{x}')) -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\psi}(t,\bar{x}'',\psi_m(t,\bar{x}''))\right| + \left|\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\psi}(t,\bar{x}'',\psi_m(t,\bar{x}''))\right|\left|\frac{\partial\psi_m(t,\bar{x}')}{\partial\bar{x}} -\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial\psi_m(t,\bar{x}'')}{\partial\bar{x}}\right|\right) + \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}\left|\frac{\partial\tilde{\tilde{f}}}{\partial\bar{x}}(t,\bar{x}',\psi_m(t,\bar{x}')) - \frac{\partial\tilde{\tilde{f}}}{\partial\bar{x}}(t,\bar{x}'',\psi_m(t,\bar{x}''))\right| +$$

$$+ \tilde{\tilde{\lambda}}_*^{-1}\left(\left|\frac{\partial\psi_m(t,\bar{x}')}{\partial\bar{x}}\right|\left|\frac{\partial\tilde{\tilde{f}}}{\partial\psi}(t,\bar{x}',\psi_m(t,\bar{x}')) - \frac{\partial\tilde{\tilde{f}}}{\partial\psi}(t,\bar{x}'',\psi_m(t,\bar{x}''))\right| +\right.$$

$$+\left|\frac{\partial\bar{\bar f}(t,\bar x'',\psi_m(t,\bar x''))}{\partial\psi}\right|\left|\frac{\partial\psi_m(t,\bar x')}{\partial\bar x}-\frac{\partial\psi_m(t,\bar x'')}{\partial\bar x}\right|\Bigg)\le$$

$$\le\bar{\bar\lambda}_*^{-1}N\left(\tilde\lambda^*|\bar x'-\bar x''|+Lb_*^\alpha\left(|\bar x'-\bar x''|+Nb_*^\alpha|\bar x'-\bar x''|\right)\right)^\alpha\left(\tilde\lambda^*+\right.$$

$$\left.+L\left(|\bar x'|+Nb_*^\alpha|\bar x'|\right)^\alpha+L\left(|\bar x'|+Nb_*^\alpha|\bar x'|\right)^\alpha N|\bar x'|^\alpha\right)+$$

$$+\bar{\bar\lambda}_*^{-1}N\left(\tilde\lambda^*|\bar x''|+Lb_*^\alpha\left(|\bar x''|+Nb_*^\alpha|\bar x''|\right)\right)^\alpha\left(L\left(|\bar x'-\bar x''|+\right.\right.$$

$$+Nb_*^\alpha|\bar x'-\bar x''|\Big)^\alpha+N|\bar x'|^\alpha L\left(|\bar x'-\bar x''|+Nb_*^\alpha|\bar x'-\bar x''|\right)^\alpha+$$

$$\left.+L\left(|\bar x''|+Nb_*^\alpha|\bar x''|\right)^\alpha N|\bar x'-\bar x''|^\alpha\right)+\bar{\bar\lambda}_*^{-1}L\left(|\bar x'-\bar x''|+\right.$$

$$+Nb_*^\alpha|\bar x'-\bar x''|\Big)^\alpha+\bar{\bar\lambda}_*^{-1}\left(N|\bar x'|^\alpha L\left(|\bar x'-\bar x''|+Nb_*^\alpha|\bar x'-\bar x''|\right)^\alpha+\right.$$

$$\left.+L\left(|\bar x''|+Nb_*^\alpha|\bar x''|\right)^\alpha N|\bar x'-\bar x''|^\alpha\right)\le N|\bar x'-\bar x''|^\alpha\bar{\bar\lambda}_*^{-1}\Big[\Big(\Big(\tilde\lambda^*+$$

$$+Lb_*^\alpha\left(1+Nb_*^\alpha\right)\Big)^\alpha\left(\tilde\lambda^*+L\left(b_*+Nb_*^{1+\alpha}\right)^\alpha\left(1+Nb_*^\alpha\right)\right)+$$

$$+\left(\tilde\lambda^*b_*+Lb_*^\alpha\left(b_*+Nb_*^{1+\alpha}\right)\right)^\alpha\Big(L\left(1+Nb_*^\alpha\right)^\alpha+LNb_*^\alpha\left(1+Nb_*^\alpha\right)^\alpha+$$

$$+LN\left(b_*+Nb_*^{1+\alpha}\right)^\alpha\Big)+LN^{-1}\left(1+Nb_*^\alpha\right)^\alpha+Lb_*^\alpha\left(1+Nb_*^\alpha\right)^\alpha+$$

$$+L\left(b_*+Nb_*^{1+\alpha}\right)^\alpha\Big].$$

Отсюда следует, что при достаточно малом b_* и достаточно большом N имеем

$$\left|\frac{\partial\psi_{m+1}(t,\bar x')}{\partial\bar x}-\frac{\partial\psi_{m+1}(t,\bar x'')}{\partial\bar x}\right|\le N|\bar x'-\bar x''|^\alpha,$$

т. е. оценка (18) выполняется при замене m на $m+1$. Таким образом, при достаточно малом b_* и достаточно большом N оценки (16) – (18) справедливы при всех $m\ge 0$.

Непосредственно из (16) – (18) вытекает, что последовательность вектор-функций $\{\psi_m(t,\bar x)\}$, определенных соотношениями (15), равномерно сходится при $|\bar x|\le b_*$ к вектор-функции $\psi(t,\bar x)$, которая удовлетворяет условиям, указанным в теореме 2. Переходя в (15) к пределу при $m\to\infty$, легко убедиться, что вектор-функция $\psi(t,\bar x)=\lim_{m\to\infty}\psi_m(t,\bar x)$ является решением системы уравнений (14). Теорема доказана.

В силу теоремы 2 исследование окрестности тривиального решения системы уравнений (10) сводится к исследованию окрестности тривиального решения системы (13). Покажем сначала, что если $(\bar x(t),\bar y(t))$ — некоторое непрерывное при $t\ge 0$ решение системы уравнений (13), находящееся в окрестности ее тривиального решения (0, 0), то $\bar y(t)\equiv 0$. Действительно, пусть это не так, т. е. имеется некоторое непрерывное при $t\ge 0$ решение $(\bar x(t),\bar y(t))$ системы (13), находящееся в некоторой окрестности ее тривиального решения и такое, что $\bar y(t)\ne 0$. Тогда в силу условий 1′, 3, 4 и $\bar{\bar f}(t,\bar x,0)\equiv 0$ имеем

$$\left|\bar{\bar{f}}(t, \bar{x}, \bar{y})\right| \leq \varepsilon|\bar{y}|,$$

где $\varepsilon \to 0$ при $|\bar{x}|$, $|\bar{y}| \to 0$, и из (13) получаем

$$|\bar{y}(t+1)| \geq \left(\bar{\bar{\lambda}}_* - \varepsilon\right)|\bar{y}(t)|.$$

Поскольку $\bar{\bar{\lambda}}_* > 1$, то $\bar{\bar{\lambda}}_* - \varepsilon > 1$ при достаточно малом ε и из последнего соотношения вытекает

$$|\bar{y}(t+m)| \geq \left(\bar{\bar{\lambda}}_* - \varepsilon\right)^m |\bar{y}(t)|, \quad m \geq 1,$$

т. е. $|\bar{y}(t)| \to \infty$ при $t \to \infty$. Полученное противоречие доказывает, что $|\bar{y}(t)| \equiv \equiv 0$. Следовательно, для построения всех непрерывных при $t \geq 0$ решений системы уравнений (13), находящихся в окрестности ее тривиального решения, достаточно построить все непрерывные при $t \geq 0$ решения системы уравнений

$$\bar{x}(t+1) = \bar{\Lambda}\bar{x}(t) + \bar{f}(t, \bar{x}(t), 0), \tag{20}$$

находящиеся в окрестности ее тривиального решения $\bar{x}(t) = 0$. Так как для системы (20) выполняются все условия теоремы 1, то ее общее непрерывное при $t \geq 0$ решение имеет вид (9), где $n = p$. Принимая во внимание (11), получаем, что если $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ — некоторое непрерывное при $t \geq 0$ решение системы уравнений (10), находящееся в достаточно малой окрестности ее тривиального решения (0, 0), то $x(t) \doteq z(t) + \gamma^{-1}(t, z(t))$, $y(t) = \psi\left(t, z(t) + \gamma^{-1}(t, z(t))\right)$, где $z(t) = \left(|\lambda_1|^t \omega_1(t), \ldots, |\lambda_p|^t \omega_p(t)\right)$ и $\omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, p$, — некоторые непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $\omega_i(t+1) = \operatorname{sign}\lambda_i \omega_i(t)$, $i = 1, \ldots, p$.

1. *Birkhoff G.D., Trjitzinsky W.J.* Analitic theory of singular difference equations // Acta math. – 1932. – **60**. – P. 1 – 89.
2. *Harris Jr., W.A., Sibuya Y.* General solution of nonlinear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – **115**. – P. 62 – 75.
3. *Takano By. K.* General solution of a nonlinear difference equations of Briot – Bouquet type // Funkc. ekvacioj. – 1971. – **13**, № 3. – P. 179 – 198.
4. *Takano By. K.* Solution containing arbitrary periodic functions of systems of nonlinear difference equations // Ibid. – 1973. –**13**, № 2. – P. 137 – 164.
5. *Пелюх Г.П.* О структуре непрерывных решений одного класса нелинейных разностных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 6. – С. 1083 – 1085.
6. *Пелюх Г.П.* Представление решений разностных уравнений с непрерывным аргументом // Там же. – 1996. – **32**, № 2. – С. 304 – 312.

Получено 28.01.99