УДК 512. 544

О. Д. Артемович (Нац. ун-т ім. Т. Шевченко, Киев)

О ЛОКАЛЬНО СТУПЕНЧАТЫХ ГРУППАХ С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРОЙ СИСТЕМЫ НЕГИПЕРЦЕНТРАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

We characterize groups without nontrivial perfect sections (in particular, solvable groups) with minimality condition for the subgroups which possess no hypercentral subgroups of finite index.

Охарактеризовані групи без нетривіальних досконалих секцій (зокрема, розв'язні групи) з умовою мінімальності для підгруп, які не мають гіперцентральних підгруп скінченного індексу.

Будем говорить, что бесконечная группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, не являющихся почти гиперцентральными (сокращенно $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$), если для любой убывающей последовательности ее подгрупп $\{H_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ найдется такое положительное целое t, что подгруппа H_s почти гиперцентральная для каждого $s \geq t$. Аналогично определяется условие минимальности для негиперцентральных подгрупп (сокращенно $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZA}$). Примерами групп, удовлетворяющих условию $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZA}$, являются группы типа Хайнекена – Мохамеда (т. е. ненильпотентные группы с нильпотентными и субнормальными собственными подгруппами) [1 – 5], группы Чарина [6, 7], $\overline{ZAF}$-группы (т. е. группы, не являющиеся почти гиперцентральными, но с почти гиперцентральными собственными подгруппами) [8].

В данной работе охарактеризованы группы, не имеющие нетривиальных совершенных секций, с условием $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$.

Напомним несколько необходимых понятий. Группа G называется неразложимой, если любые две ее собственные подгруппы порождают собственную подгруппу. Если $G = G'$, то группа G называется совершенной. Везде ниже p и q — различные простые числа, k — неотрицательное целое число. Если Y — локально конечное поле характеристики q, а X — квазициклическая p-подгруппа мультипликативной группы Y^* поля Y, то множество пар

$$G(X, Y, p^k) = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

образует группу относительно операции, определенной по правилу

$$(x, y)(u, v) = \left(xy, x^{p^k} v + y\right),$$

которая называется группой Чарина (см. [6, 7]). Наконец, G — HM^*-группа, если ее коммутатор G' гиперцентральный, а фактор-группа G/G' — делимая черниковская p-группа. Очевидно, что группы типа Хайнекена– Мохамеда и группы Чарина являются HM^*-группами.

В работе доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — негиперцентральная HM^*-группа.*

1. *Если G — p-группа, то G удовлетворяет условию* $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$ *тогда и только тогда, когда G — группа с нормализаторным условием;*

2. *Если G не является p-группой, то G удовлетворяет условию* $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$ *тогда и только тогда, когда*

$$G = (A \rtimes (S_1 \times \ldots \times S_k)) \times S, \qquad k \geq 1,$$

где A — гиперцентральная q-группа, S_i — квазициклическая p-группа, p и q — различные простые числа, S — делимая черниковская p-группа, S_i действует тривиально на подгруппе Фраттини $\Phi(A)$ и неприводимо на фактор-группе $A/\Phi(A)$, $Z(A) = A' = \Phi(A)$ и, кроме того, $(A \rtimes S_i)/\Phi(A)$, $i = 1, \ldots, k$, — группа Чарина.

Теорема 2. *Пусть G — группа, не имеющая нетривиальных совершенных секций (в частности, разрешимая группа). Тогда G удовлетворяет условию* $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$, *если и только если G принадлежит одному из типов:*

1) *G — почти гиперцентральная группа;*

2) *G — минимальная негиперцентральная группа;*

3) *$G = M \rtimes Q$, Q — квазициклическая p-группа, M — гиперцентральная q-группа, Q действует тривиально на подгруппе Фраттини $\Phi(M)$ и неприводимо на фактор-группе $M/\Phi(M)$, $Z(M) = M' = Z(M)$, и, кроме того, $G/\Phi(M)$ — группа Чарина;*

4) *G содержит такую нормальную подгруппу D конечного индекса, что*

$$D = D_1 \cdot \ldots \cdot D_t, \qquad t \geq 1,$$

где D_i — G-допустимая HM^*-подгруппа, принадлежащая типу 2 или 3, причем $D_i' = D'$, $i = 1, \ldots, t$, и если $s \neq k$, то пересечение $\pi(D_k/D') \cap \cap\, \pi(D_s/D')$ пустое.

В работе C_{p^∞} обозначает квазициклическую p-группу, G' — коммутант группы G, $Z(G)$ — центр группы G, $\pi(H)$ — множество всех простых делителей порядков элементов периодической группы H. Все остальные необходимые обозначения и определения содержатся в [9 – 11].

1. Для доказательства теорем 1 и 2 необходимы следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть группа G удовлетворяет условию* $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$, *$H$ – ее подгруппа. Тогда:*

1) *H удовлетворяет условию* $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$;

2) *если H нормальна в G, то фактор-группа G/H удовлетворяет условию* $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$;

3) *если H – нормальная подгруппа G, не имеющая гиперцентральных подгрупп конечного индекса, то фактор-группа G/H черниковская.*

Доказательство леммы несложно и мы его опускаем.

Лемма 2. *Пусть G — группа, не имеющая нетривиальных совершенных секций и не являющаяся почти гиперцентральной. Если G удовлетворяет условию* $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$ *и все собственные нормальные подгруппы почти гиперцентральные, то G — $\overline{ZAF}$-группа.*

Доказательство. Поскольку фактор-группа G/G' неразложима, то она квазициклическая. Кроме этого, коммутант G' гиперцентральный. И так как G удовлетворяет условию $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$, то G имеет субнормальную $\overline{ZAF}$-

подгруппу H, причем $G = G'H$. Если подгруппа H собственная, то она содержится в собственной нормальной подгруппе F, и тогда $G = G'F$, а это невозможно. Поэтому $G = H$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — HM^*-группа с квазициклической фактор-группой G/G'. Если G удовлетворяет условию* Min-$\overline{ZAF}$, *то G — $\overline{ZAF}$-группа.*

Доказательство. Как и выше, G содержит субнормальную $\overline{ZAF}$-подгруппу H и, следовательно, $G = G'H$. И поскольку G не имеет нетривиальных совершенных секций, то $H = G$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — негиперцентральная группа с нормальной гиперцентральной подгруппой A и p-квазициклической фактор-группой G/A. Если G удовлетворяет условию* Min-$\overline{ZAF}$, *то $G = A \cdot T$, где T — характеристическая $\overline{ZAF}$-подгруппа, фактор-группа G/G' черниковская и, кроме того, G имеет такую подгруппу D конечного индекса, что $D = B \cdot T$, причем $D' = T'$ и B — делимая черниковская p-группа.*

Доказательство. Группа G содержит субнормальную $\overline{ZAF}$-подгруппу T и пусть

$$T \leq G_1 \leq \ldots \leq G_k = G \qquad (*)$$

— субнормальный ряд, соединяющий T с группой G. Тогда для любого элемента $g \in G_2$ подгруппа T^g нормальна в G_1 и, кроме того,

$$(T^g A / A) \cdot (TA / A) = (TT^g A)/A \cong C_{p^\infty},$$

а значит, $T^g = T$ и T нормальна в G_2. Рассуждая аналогично, через конечное число шагов получаем, что T нормальна во всей группе G. Легко убедиться, что T характеристическая в G.

Пусть D/T — полная часть фактор-группы G/T. Поскольку фактор-группа G/T черниковская, то D имеет конечный индекс в G. Кроме того,

$$(D/T')/(T/T') \cong D/T$$

— делимая черниковская группа и вследствие теоремы 1. 16 [9, с. 67] фактор-группа D/T' абелева, а следовательно, $D' = T'$. Отсюда также следует, что фактор-группа G/G' черниковская. Наконец, если B — полная часть подгруппы $A \cap D$, то, очевидно, $D = BT$, и найдется такая делимая черниковская подгруппа $C \leq B$, что $D = CT$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G — негиперцентральная HM^*-группа. Если G удовлетворяет условию* Min-$\overline{ZAF}$, то

$$G = T_1 \cdot \ldots \cdot T_s \cdot D, \quad s \geq 1,$$

где D — нормальная делимая черниковская подгруппа, T_i — нормальная $\overline{ZAF}$-подгруппа, причем $G' = T_i'$, $i = 1, \ldots, s$.

Доказательство. По определению,

$$G/G' = \overline{N_1} \times \ldots \times \overline{N_t},$$

где $\overline{N_i}$, $i = 1, \ldots, t$, — квазициклическая p-группа. Пусть N_i — полный прообраз $\overline{N_i}$ в группе G. Поскольку G негиперцентральная, то найдется такое целое число s, $1 \leq s \leq t$, что подгруппы $N_1, \ldots, N_s$ не являются почти гиперцентральными, а подгруппы $N_{s+1}, \ldots, N_t$ почти гиперцентральные. Согласно лемме 4, $N_j = T_j \cdot A_j$, где T_j — характеристическая $\overline{ZAF}$-подгруппа N_j и $T_j' \le \le N \le A_j$ (здесь и ниже $j = 1,\ldots, s$). И так как фактор-группа G/T_j делимая черниковская, то вследствие теоремы 1. 16 [9, с. 67] фактор-группа G/T_j' абелева и, следовательно, $G' = T_j'$. Таким образом, A_j нормальна в G. Пусть $F_1 = A_1 \cdot \ldots \cdot A_s \cdot N_{s+1} \cdot \ldots \cdot N_t$. Если F — характеристическая гиперцентральная подгруппа F_1 конечного индекса, а B — делимая часть F, то, очевидно, $G = = T_1 \cdot \ldots \cdot T_s \cdot B$, $s \ge 1$, а отсюда легко следует утверждение леммы.

Лемма 6. *Пусть G — негиперцентральная HM^*-группа. Если G удовлетворяет условию* $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$, *то*

1) *коммутант G' — q-группа для некоторого простого числа q*;
2) *если $p \in \pi(G') \cap \pi(G/G')$, то G — p-группа.*

Лемма 7. *Для p-группы G, являющейся HM^*-группой, следующие утверждения равносильны*:

1) *G удовлетворяет условию* $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZA}$;
2) *G удовлетворяет условию* $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$;
3) *G — группа с нормализаторным условием.*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна, а импликация 3) $\Rightarrow$ 1) следует из [12]. Докажем, что 2) $\Rightarrow$ 3). Пусть G — негиперцентральная HM^*-p-группа с условием $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$, K — любая ее подгруппа. Если подгруппа $G'K$ гиперцентральная, то K — собственная подгруппа своего нормализатора $N_G(K)$. Поэтому предположим, что подгруппа $G'K$ негиперцентральная. Тогда K содержит подгруппу S с делимой черниковской фактор-группой $G'S/G'$, и вследствие леммы 4 $G'S$ содержит G-допустимую $\overline{ZAF}$-подгруппу M. В силу теоремы 1. 16 [9, с. 67] фактор-группа G/M' абелева, а значит, $G' = M'$. Принимая во внимание лемму 1. 1. 1 [13], получаем $M = (M \cap \cap G')(M \cap K)$, откуда вследствие теорем 3. 4 и 3. 5 из [8] $M \le K$. Значит, K нормальна в G. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть G — HM^*-группа, удовлетворяющая условию* $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$. *Если K — подгруппа G, то K почти гиперцентральная либо $G' \le K$.*

Доказательство. Пусть K — любая подгруппа G, не имеющая гиперцентральных подгрупп конечного индекса. Тогда K содержит субнормальную $\overline{ZAF}$-подгруппу T и, согласно лемме 4, $G'T = M \cdot D$, где M — характеристическая $\overline{ZAF}$-подгруппа, а D — нормальная гиперцентральная подгруппа $G'T$. Поскольку G/M делимая черниковская, то, как и выше, $G' = M'$ и вследствие леммы 1. 1. 1 [13] $M = T$ и $G' \le K$. Лемма доказана.

2. ***Доказательство теоремы*** **1.** Утверждение 1 теоремы следует из леммы 7. Докажем второе утверждение. Предположим, что G не является p-группой и удовлетворяет условию $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$. Ввиду следствия 6, леммы 5, теоремы 3. 5 [8] и предложения 2. 4 [9, с. 101] получаем

$$G = (G' \rtimes (S_1 \times \ldots \times S_k)) \times D, \qquad k \ge 1,$$

и G имеет свойства, указанные в утверждении 2 теоремы.

Наоборот, пусть $\{K_n | n \in \mathbb{N}\}$ — какая-либо убывающая последовательность подгрупп группы G. Если для любого целого n подгруппа K_n не имеет гиперцентральных подгрупп конечного индекса, то, начиная с некоторого целого m, имеем

$$K_m G' = K_{m+1} G' = \ldots .$$

Понятно, что $K_m = (G' \cap K_m) \rtimes L$, где L — бесконечная черниковская p-группа. Пусть X — такая квазициклическая подгруппа из L, что подгруппа $H = (G' \cap K_m) \rtimes X$ не имеет гиперцентральных подгрупп конечного индекса. Тогда из условия теоремы и ввиду теоремы 3. 5 [8] получаем $(G' \cap K_m)Z(Y) = G'$, где $Y = G' \rtimes X$, и, таким образом, $G' = [G, X] = [G' \cap K_m, X] \leq G' \cap K_m$, что невозможно. Это означает, что K_s почти гиперцентральная для некоторого положительного целого s. Теорема доказана.

Вопрос о существовании совершенных $\overline{ZAF}$-групп открыт. Несложно показать, что совершенная $\overline{ZAF}$-группа (если она существует) является счетной локально конечной p-группой, все собственные подгруппы которой гиперцентральные.

Доказательство теоремы* 2. *Необходимость. Пусть группа G не содержит гиперцентральных подгрупп конечного индекса и удовлетворяет условию теоремы. Если в G все собственные нормальные подгруппы почти гиперцентральные, то вследствие лемм 2 и 7, теорем 3. 4 и 3. 5 из [8] G — группа типов 2 или 3. Поэтому предположим, что G имеет собственную нормальную подгруппу, которая не является почти гиперцентральной. Но тогда G содержит субнормальную $\overline{ZAF}$-подгруппу T и имеет субнормальный ряд (*), соединяющий T с группой G. Если g — какой-либо элемент из G_2, то $T^g \lhd G_1$ и $T' = (T')^g = (T^g)'$ — q-группа для некоторого простого q. Поскольку, согласно лемме 1, фактор-группа G_1/T черниковская, то G_1 содержит G_2-допустимую HM^*-подгруппу H_2. Аналогично H_1^a нормальна в G_2 для любого элемента a из G_3 и $T' = H_1' = (H_1')^a = (H_1^a)'$. И так как фактор-группа G_2/H_1 черниковская, то G_2 содержит G_3-допустимую HM^*-подгруппу H_2. Рассуждая подобным образом, через конечное число шагов получаем нормальную в G HM^*-подгруппу H. Теперь несложно доказать, что G имеет такую нормальную подгруппу конечного индекса, что $D = D_1 \cdot \ldots \cdot D_t$, $t \geq 1$, где D_i — характеристическая HM^*-подгруппа, удовлетворяющая условию $\mathrm{Min}\text{-}\overline{ZAF}$. Кроме этого, если $k \neq s$, то $\pi(D_k/D') \cap \pi(D_s/D') = \emptyset$, $1 \leq k, s \leq t$.

Достаточность. Пусть $\{K_n | n \in \mathbb{N}\}$ — какая-либо убывающая последовательность подгрупп группы G и G — группа типа 4. Если для каждого целого n подгруппа $E_n = K_n \cap D$ не имеет гиперцентральных подгрупп конечного индекса, то, начиная с некоторого целого m,

$$E_m D' = E_{m+1} D' = \ldots .$$

Согласно условию, D' — гиперцентральная p-группа для некоторого простого p. Рассмотрим возможные случаи.

1. Если E_m содержит такую квазициклическую q-подгруппу X $(p \neq q)$, что $H = (E_m \cap D') \rtimes X$ не имеет гиперцентральных подгрупп конечного индекса, то в силу теоремы 3. 5 [8] имеем $(E_m \cap D')Z(Y) = D'$, где $Y = D' \rtimes X$, и, следовательно,

$$D' = [D', X] = [D' \cap E_m, X] \leq D' \cap E_m,$$

что невозможно.

2. Предположим, что $E_m D' = S \times L$, где L — гиперцентральная p' – группа,

а S — p-группа, не имеющая гиперцентральных подгрупп конечного индекса. Но тогда, например, D_1 — p-группа и $S \le D_1$. В силу леммы 5 и теоремы 1 D_1 содержит G-допустимую неразложимую подгруппу M и $M' = D'$. Отсюда ввиду леммы 1. 1. 1 [13] $D' \le M \le E_m$, что невозможно. Это означает, что K_s почти гиперцентральная, начиная с некоторого положительного целого s. Теорема доказана.

1. *Heineken H., Mohamed I. J.* A group with trivial centre satisfying the normalizer condition // J. Algebra. – 1968. – **10**, №1. – P. 179 – 188.
2. *Meldrum J. D. P.* On the Heineken - Mohamed groups // Ibid. – 1973. – **27**, №2. – P. 437 – 444.
3. *Хартли Б.* О нормализаторном условии и мини-транзитивных группах подстановок // Алгебра и логика. – 1974. – **13**, №5. – С. 589 – 602.
4. *Bruno B., Phillips R. E.* On multipliers of Heineken – Mohamed type groups // Rend. Semin. mat. Univ. Padova. – 1991. – **85**, №1. – P. 133 – 146.
5. *Menegazzo F.* Groups of Heineken – Mohamed // J. Algebra. – 1995. – **171**, №5. – P. 807 – 825.
6. *Чарин В. С.* Замечание об условии минимальности для подгрупп // Докл. АН СССР. – 1949. – **66**, №3. – С. 575 – 576.
7. *Беляев В. В.* Локально конечные группы, все собственные подгруппы которых почти абелевы // Сиб. мат. журн. – 1983. – **24**, №1. – С. 11 – 17.
8. *Артемович О. Д.* Про групи з майже гіперцентральними власними підгрупами // Допов. НАН України. – 1997. – №8. – С. 7 – 9.
9. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
10. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
11. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. – New York etc.: Springer, 1982. – 481 p.
12. *Artemovych O. D.* HM^*-groups and groups with minimal condition for non-hypercentral subgroups // Int. Algebr. Conf. ... Memory Prof. L. M. Gluskin. – Kyiv: Inst. Math. NAS Ukraine, 1997. – P. 67 – 68.
13. *Amberg B., Franciosi S., de Giovanni F.* Products of groups. – Oxford Univ. Press, 1992.

Получено 15. 07. 97,
после доработки — 04. 05. 98