УДК 517.928

О. І. Кочерга (Ніжин. пед. ун-т)

АСИМПТОТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ

We construct the asymptotics of solution of the Cauchy problem for degenerate singularly perturbed linear system in the case of multiple spectrum of the principal operator.

Побудовано асимптотику розв'язку задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи у випадку кратного спектра головного оператора.

Розглянемо задачу Коші

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon), \tag{1}$$

$$x(0, \varepsilon) = x_0, \tag{2}$$

де $t \in [0, T]$; $B(t)$, $A(t, \varepsilon)$ — $(n \times n)$-матриці; $x(t, \varepsilon)$, $f(t, \varepsilon)$ — n-вимірні вектори; $\varepsilon > 0$ — малий дійсний параметр; $h \in \mathbb{N}$, $\det B(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, $B(t) \in C^{\infty}_{[0, T]}$.

Припустимо, що виконуються такі умови:

1) матриця $A(t, \varepsilon)$ і вектор $f(t, \varepsilon)$ на даному відрізку $[0, T]$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε:

$$A(t, \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_k(t), \quad f(t, \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k f_k(t), \quad \text{де } A_k(t), f_k(t) \in C^{\infty}_{[0, T]};$$

2) матричний жмуток $L(t, \lambda) = A_0(t) - \lambda B(t)$ регулярний на $[0, T]$ і має один скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0)^p$ кратності p та один нескінченний елементарний дільник кратності $q = n - p$.

Розв'язок задачі (1), (2) будуватимемо у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{p} u_i(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t (\lambda_0 + \lambda_i(t, \varepsilon))\, dt\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q-1} v_j(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \frac{dt}{\xi_j(t, \varepsilon)}\right) + w(t, \varepsilon), \tag{3}$$

де n-вимірні вектор-функції $u_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, p}$, $v_j(t, \varepsilon)$, $j = \overline{1, q-1}$, та скалярні функції $\lambda_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, p}$, $\xi_j(t, \varepsilon)$, $j = \overline{1, q-1}$, зображуються формальними розвиненнями за степенями $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$, $\nu = \sqrt[q-1]{\varepsilon}$, а вектор-функція $w(t, \varepsilon)$ — за цілими степенями ε:

$$u_i(t, \varepsilon) = \mu^{-(p-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k^{(i)}(t), \qquad \lambda_i(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k^{(i)}(t), \qquad i = \overline{1, p},$$

$$v_j(t, \varepsilon) = \nu^{-(q-2)} \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k v_k^{(j)}(t), \qquad \xi_j(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k \xi_k^{(j)}(t), \qquad j = \overline{1, q}, \tag{4}$$

$$w(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(t)$$

($m = 0$ у випадку „нерезонансу", коли власне значення жмутка $L(t, \lambda)$ відмінне від нуля, і $m = -1$ у випадку „резонансу", коли це власне значення дорівнює нулю).

Знаходження коефіцієнтів розвинень (4) здійснюється шляхом підстановки (3), (4) в (1), (2) і розв'язання систем алгебраїчних рівнянь, які утворюються після прирівнювання коефіцієнтів при однакових експонентах та однакових степенях параметрів:

$$(A_0 - \lambda_0 B)u_k^{(i)} = b_k^{(i)} = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s^{(i)} B u_{k-s}^{(i)} + B\left(u_{k-hp}^{(i)}\right)' - \sum_{s=1}^{[k/p]} A_s u_{k-ps}^{(i)},$$

$$i = \overline{1, p}, \tag{5}$$

$$Bv_k^{(j)} = a_k^{(j)} = \sum_{s=0}^{[(k-1)/(q-1)]} \sum_{m=0}^{k-s(q-1)-1} A_s v_m^{(j)} \xi_{k-m-s(q-1)}^{(j)} -$$

$$- \sum_{s=1}^{k-h(q-1)} B\xi_s^{(j)} (v_{k-s-h(q-1)}^j)', \quad j = \overline{1, q-1}, \tag{6}$$

$$A_0 w_k = d_k = B(w_{k-h})' - \sum_{s=1}^{k} A_s w_{k-s} - f_k, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{p} u_{k/(q-1)}^{(i)}(0) + \sum_{j=1}^{q-1} v_{(k-p+q-1)/p}^{(j)}(0) + w_{(k-(q-1)(p-1-mp))/(p(q-1))}(0) =$$

$$= \delta_{k,(p-1)(q-1)} x_0, \tag{8}$$

де за означенням покладаємо $v_{m/p} = 0$, якщо m не ділиться на p, $\delta_{k,p}$ — символ Кронекера.

Системи (5) – (7) розв'язуються методом, викладеним у роботі [1].

Вектор-функції $u_k^{(i)}(t)$, $v_k^{(j)}(t)$ визначаються за формулами

$$u_k^{(i)}(t) = H(t) b_k^{(i)}(t) + C_k^{(i)} \varphi(t), \qquad v_k^{(j)}(t) = G(t) a_k^{(j)}(t) + \tilde{C}_k^{(j)} \tilde{\varphi}(t), \tag{9}$$

$$i = \overline{1, p}; \quad j = \overline{1, q-1}; \quad k = 0, 1, \dots,$$

в яких $\varphi(t)$ — власний вектор жмутка $L(t, \lambda)$; $\tilde{\varphi}(t)$ — власний вектор матриці $B(t)$, що відповідає її нульовому власному значенню; $H(t)$, $G(t)$ — напівобернені матриці до матриць $L(t, \lambda_0)$ та $B(t)$ відповідно; $C_k^{(i)}$, $\tilde{C}_k^{(j)}$ — сталі скалярні множники. Для знаходження функцій $\lambda_k^{(i)}(t)$, $\xi_k^{(j)}(t)$ використовуються умови сумісності систем (5), (6): $\left(b_k^{(i)}, \psi\right) = 0$; $\left(a_k^{(j)}(t), \tilde{\psi}\right) = 0$, де $\psi(t)$, $\tilde{\psi}(t)$ — власний вектор матричного жмутка, спряженого з $L(t, \lambda)$, та матриці, спряженої з $B(t)$ відповідно.

Для проходження цього ітераційного процесу необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$(K_1\varphi, \psi) \equiv \delta_{h,1}(B\varphi', \psi) - (A_1\varphi, \psi) \neq 0; \qquad \left(A_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{10}$$

При виконанні цих умов функції $\lambda_1^{(i)}(t)$, $\xi_1^{(j)}(t)$ визначатимуться за формулами

$$\lambda_1^{(j)}(t) = \sqrt[p]{(K_1\varphi, \psi)} \exp\left(i \frac{\arg(K_1\varphi, \psi) + 2\pi(j-1)}{p} \right), \quad j = \overline{1, p}, \tag{11}$$

$$\xi_1^{(j)}(t) = \sqrt[q-1]{(A_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})} \exp\left(i \frac{\arg(A_1\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) + 2\pi(j-1)}{q-1} \right), \quad j = \overline{1, q-1}, \tag{12}$$

а наступні коефіцієнти відповідних розвинень для функцій $\lambda_i(t, \varepsilon)$, $\xi_j(t, \varepsilon)$ виражатимуться рекурентним чином через попередні.

У випадку „нерезонансу” з системи (7) знайдемо $w_k(t) = A_0^{-1}(t)d_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$. Якщо ж має місце „резонанс”, то вектор-функції $w_k(t)$ визначатимуться за формулами $w_k(t) = H(t)d_k(t) + C_k(t)\varphi(t)$, а функції $C_k(t)$ — з умови $(d_k(t), \psi) = 0$, виконання якої забезпечує сумісність системи (7).

Зазначимо, що рекурентний характер формул (9) дозволяє виразити вектори $u_k^{(i)}(t)$, $v_k^{(j)}(t)$ через вектори $(HB)^{i-1}\varphi$, $i = \overline{1, p}$, та $(GA_0)^{j-1}\tilde{\varphi}$, $j = \overline{1, q-1}$, які утворюють базис в n-вимірному векторному просторі, де розглядається задача (1), (2). Розклавши за цим базисом вектори x_0 та w_k, $k = 0, 1, \ldots$, і зрівнявши у (8) відповідні координати векторів ліворуч і праворуч, одержимо системи рівнянь, з яких послідовно визначаються сталі $C_k^{(i)}$, $\tilde{C}_k^{(j)}$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q-1}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Зокрема, позначивши $\tilde{C}_0 = \operatorname{col}\left(\tilde{C}_0^{(1)}, \tilde{C}_0^{(2)}, \ldots, \tilde{C}_0^{(q-1)}\right)$, $C_0 = \operatorname{col}\left(C_0^{(1)}, C_0^{(2)}, \ldots, C_0^{(p)}\right)$, $\tilde{m}_0 = \operatorname{col}\left(0, \ldots, 0, \left(A_0 G A_0 (x_0 - w_0(0)), \tilde{\psi}\right)\right)$, $m_0 = \operatorname{col}\left(0, \ldots, 0, \left(B(0)(x_0 - w_0(0)), \psi\right)\right)$, для знаходження сталих $C_0^{(i)}$, та $\tilde{C}_0^{(j)}$ дістанемо такі системи рівнянь:

$$WC_0 = m_0; \qquad \tilde{W}\tilde{C}_0 = \tilde{m}_0,$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^{(1)} & \lambda_1^{(2)} & \ldots & \lambda_1^{(p)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left[\lambda_1^{(1)}\right]^{p-1} & \left[\lambda_1^{(2)}\right]^{p-1} & \ldots & \left[\lambda_1^{(p)}\right]^{p-1} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \ldots & \xi_1^{(q-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left[\xi_1^{(1)}\right]^{q-2} & \left[\xi_1^{(2)}\right]^{q-2} & \ldots & \left[\xi_1^{(q-1)}\right]^{q-2} \end{bmatrix}.$$

Оскільки визначники цих систем є визначниками Вандермонда, то згідно з (10) – (12) $\det W \neq 0$, $\det \tilde{W} \neq 0$, що дозволяє з (13) однозначно визначити C_0 та $\tilde{C}_0$.

Під час розв'язання рівнянь (8) отримуємо також умову, яку повинен задовольняти початковий вектор x_0, щоб задача (1), (2) була розв'язною:

$$\left(A_k(0)x_0 + f_k(0), \tilde{\psi}(0)\right) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

що цілком узгоджується з теорією вироджених лінійних систем, розробленою в [2].

Підсумовуючи наведені міркування, одержуємо таку теорему.

Теорема. *Якщо виконуються умови* 1, 2, (10) *і вектор* x_0 *задовольняє співвідношення* (14), *то задача* (1), (2) *має на даному відрізку* $[0; T]$ *формальний розв'язок вигляду* (3), (4).

Методом [1] доводиться, що цей розв'язок є асимптотичним розвиненням точного розв'язку задачі (1), (2).

1. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – Киев: Выща шк., 1991. – 207 с.
2. *Яковець В. П.* Деякі властивості вироджених лінійних систем // Укр. мат. журн. – 1997. – 49, № 9. – С. 1278 – 1296.

Одержано 21.12.98,
після доопрацювання — 22.02.99