УДК 517.9

В. Ю. Макаров (Брянск. пед. ин-т, Россия)

СВЯЗЬ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ МНОГОМЕРНОГО РЯДА ЭКСПОНЕНТ С АСИМПТОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ ЕГО КОЭФФИЦИЕНТОВ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК

We study the relation of as.ymptotic behavior of the coefficients of multidimensional exponential series to the asymptotic behavior of its sum by using R-order of the growth $\rho_{QR}(a_1,\ldots,a_n)$ in an octant $Q(a_1,\ldots,a_n)$.

Вивчається зв'язок асимптотичної поведінки коефіцієнтів багатовимірного ряду експонент з асимптотичною поведінкою його суми з використанням R-порядку зростання $\rho_{QR}(a_1,\ldots,a_n)$ в октанті $Q(a_1,\ldots,a_n)$.

Пусть многомерный ряд сходится абсолютно в октантообразной области $B + iR^n \subset C^n$

$$G(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{p=1}^{n} A_p \exp\left(\sum_{k=1}^{n} z_k \lambda_p^{(k)}\right), \tag{1}$$

где B — октантообразное основание области сходимости, $B \subset R^n$, коэффициенты ряда (1) $A_p \in C$ для всех $p \in N$, показатели ряда $\lambda_p^{(k)}$, $k = 1,\ldots,n$: $0 < \lambda_p^{(k)} \uparrow +\infty$. Ряд (1) сходится абсолютно, т. е. сходится ряд

$$\sum_{p=1}^{+\infty} |A_p| \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} x_k\right) = G_1(x_1,\ldots,x_n)$$

к предельной функции, определенной на B с границей основания ∂B, на которой находятся особые точки, при подходе к которым внутри открытого октанта

$$Q(a) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in B \subset R^n \mid x_k < a_k,\ k = 1,\ldots,n,\ (a_1,\ldots,a_n) \in \partial B\}$$

величина

$$M(G,x_1,\ldots,x_n) = \sup_{(y_1,\ldots,y_n)\in R^n} \{|G(x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n)|\} \to +\infty.$$

В работах [1, 2] установлены связи асимптотического поведения коэффициентов ряда с асимптотическим поведением показателей при использовании порядка роста в октанте $\rho_Q(a_1,\ldots,a_n)$ и порядка степенного роста $\rho_{QD}(a_1,\ldots,a_n)$.

В настоящей работе, использовав R-порядок роста в октанте $\rho_{QR}(a_1,\ldots,a_n)$, установим связь асимптотического поведения положительных показателей ряда с асимптотическим поведением коэффициентов ряда (1) при подходе по любому спрямляемому пути внутри открытого октанта к вершине октанта.

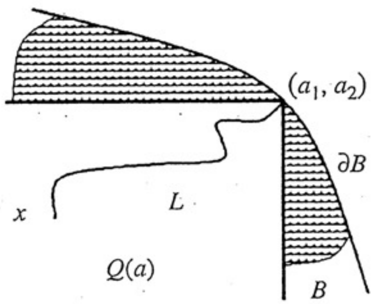
Пусть $a_k - x_k = u_k > 0$, $k = 1,\ldots,n$, $d = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k^2\right)^{1/2}$, $|\lambda_p| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)}$.

Введем понятие R-порядка роста в октанте Q.

Определение. *Величину*

$$\rho_{QR}(a_1, \ldots, a_n) = \varlimsup_{\substack{d \to 0+ \\ x \in B \cap Q}} \frac{\ln \ln M(G, x_1, \ldots, x_n)}{\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}}$$

назовем R*-порядком роста суммы ряда* (1) *при подходе к точке* $(a_1, \ldots, a_n) \in \in \partial B$ *внутри открытого октанта* $Q(a) \subset B$. *Сделаем иллюстрацию в случае* $n = 2$, $B \subset \boldsymbol{R}^2$, $Q \subset B$, L *— спрямляемая кривая,* $L \subset Q$.



Предварительно для ряда (1) докажем аналог неравенств Коши.

Лемма. *Для коэффициентов ряда* (1) *справедлива оценка для всех* $p \in N$:

$$|A_p| \leq M(G, x_1, \ldots, x_n) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} x_k\right).$$

Доказательство. Пусть $(t_1, \ldots, t_n)$ — фиксированная точка. Воспользуемся очевидным равенством

$$\frac{\int_{t_1}^{s_1} \ldots \int_{t_n}^{s_n} G(z_1, \ldots, z_n) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} z_k\right) dy_1 \ldots dy_n}{\prod_{k=1}^{n} s_k} =$$

$$= \frac{\int_{t_1}^{s_1} \ldots \int_{t_n}^{s_n} A_p \, dy_1 \ldots dy_n}{\prod_{k=1}^{n} s_k} +$$

$$+ \frac{\int_{t_1}^{s_1} \ldots \int_{t_n}^{s_n} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq p}}^{T} A_r \exp\left(\sum_{k=1}^{n} (\lambda_r^{(k)} - \lambda_p^{(k)}) z_k\right) dy_1 \ldots dy_n}{\prod_{k=1}^{n} s_k} +$$

$$+ \frac{\int_{t_1}^{s_1} \ldots \int_{t_n}^{s_n} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} z_k\right)\left(\sum_{r=T+1}^{+\infty} A_r \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_r^{(k)} z_k\right)\right) dy_1 \ldots dy_n}{\prod_{k=1}^{n} s_k}.$$

Заметим, что

$$\left|\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} z_k\right)\left(\sum_{r=T+1}^{+\infty} A_r \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_r^{(k)} z_k\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\lambda_p^{(k)}x_k\right)\sum_{r=T+1}^{+\infty}|A_r|\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_r^{(k)}x_k\right)\to 0+,$$

если $T\to+\infty$, т. е. в последнем n-кратном интеграле, подынтегральная функция представляет собой некоторую бесконечно малую функцию $\beta(T)\to 0+$, $T\to+\infty$. Тогда

$$\lim_{\substack{s_k\to+\infty\\ k=\overline{1,n}}}\left\{\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}s_k}\int_{t_1}^{s_1}\ldots\int_{t_n}^{s_n}\left|\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\lambda_p^{(k)}z_k\right)\sum_{r=T+1}^{+\infty}A_r\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_r^{(k)}z_k\right)\right|dy_1\ldots dy_n\right\}\leq$$

$$\leq\lim_{\substack{s_k\to+\infty\\ k=\overline{1,n}}}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{t_k}{s_k}\right)\beta(T) = \beta(T).$$

Для второго интеграла имеем

$$\frac{\int_{t_1}^{s_1}\ldots\int_{t_n}^{s_n}\sum_{\substack{r=1\\ r\neq p}}^{T}A_r\exp\left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_r^{(k)}-\lambda_p^{(k)})z_k\right)dy_1\ldots dy_n}{\prod_{k=1}^{n}s_k}=$$

$$=\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}s_k}\sum_{\substack{r=1\\ r\neq p}}^{T}A_r\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_r^{(k)}-\lambda_p^{(k)})x_k\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int_{t_1}^{s_1}\ldots\int_{t_n}^{s_n}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_r^{(k)}-\lambda_p^{(k)})iy_k\right)dy_1\ldots dy_n\right)=$$

$$=\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}s_k}\sum_{\substack{r=1\\ r\neq p}}^{T}A_r\left(\exp\left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_r^{(k)}-\lambda_p^{(k)})x_k\right)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{k=1}^{n}\int_{t_k}^{s_k}\exp\left(i(\lambda_r^{(k)}-\lambda_p^{(k)})y_k\right)dy_k\right)=$$

$$=\sum_{\substack{r=1\\ r\neq p}}^{T}A_r\exp\left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda_r^{(k)}-\lambda_p^{(k)})x_k\right)\times$$

$$\times\frac{\prod_{\substack{k=1\\ r\neq p}}^{n}\left[\exp\left(i(\lambda_r^{(k)}-\lambda_p^{(k)})s_k\right)-\exp\left(i(\lambda_r^{(k)}-\lambda_p^{(k)})t_k\right)\right]}{i^n\prod_{\substack{k=1\\ r\neq p}}^{n}(\lambda_r^{(k)}-\lambda_p^{(k)})\prod_{k=1}^{n}s_k}\to 0,$$

если $s_k\to+\infty$, $k=1,\ldots,n$, так как согласно формуле Эйлера

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\left|\exp\left(i(\lambda_r^{(k)}-\lambda_p^{(k)})s_k\right)\right|}{s_k}=\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}s_k}\to 0+,\qquad s_k\to+\infty,\quad k=1,\ldots,n,$$

и второй интеграл представляет собой бесконечно малую функцию, следовательно,

$$A_p = \lim_{\substack{s_k \to +\infty \\ k=\overline{1,n}}} \frac{\int_{t_1}^{s_1} \ldots \int_{t_n}^{s_n} G(z_1, \ldots, z_n) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} z_k\right) dy_1 \ldots dy_n}{\prod_{k=1}^{n} s_k},$$

откуда для всех p имеем

$$|A_p| \leq M(G, x_1, \ldots, x_n) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} x_k\right),$$

что и требовалось доказать.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть показатели ряда* (1) *удовлетворяют условию*

$$\overline{\lim_{p \to +\infty}} \frac{\ln \ln p}{\ln |\lambda_p|} = \alpha < 1.$$

Тогда R-порядок $\rho_{QR}(a_1, \ldots, a_n) = \rho_{QR}(a)$ вычисляется по формуле

$$\rho_{QR}(a_1, \ldots, a_n) = \overline{\lim_{p \to +\infty}} \frac{\ln |\lambda_p|}{|\lambda_p|} \ln^+ \left(|A_p| \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} a_k\right)\right).$$

Доказательство. Пусть функция $G(z_1, \ldots, z_n)$ имеет конечный R-порядок $\rho_{QR}(a) < +\infty$, тогда из определения R-порядка следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и для всех $d \in (0, d_0(\varepsilon))$ выполняется неравенство

$$M(G, x_1, \ldots, x_n) < \exp\left(\exp\left(\rho \sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}\right)\right),$$

где

$$\rho = \rho_{QR}(a_1, \ldots, a_n) + \varepsilon,$$

и так как для всех $p \in N$ согласно лемме

$$|A_p| \leq M(G, x_1, \ldots, x_n) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} x_k\right),$$

имеем

$$\ln\left(|A_p| \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} a_k\right)\right) < \exp\left(\rho \sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}\right) + \sum_{k=1}^{n} u_k \lambda_p^{(k)}. \qquad (2)$$

Выберем точку $u(u_1, \ldots, u_n)$ с координатами

$$u_k = u_k' = \frac{\rho_n}{\ln \frac{\rho |\lambda_p|^{1+\varepsilon}}{\ln |\lambda_p|}}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

ε — фиксировано. Учитывая, что $u_k' \to 0$, $p \to +\infty$, $k = 1, \ldots, n$, а следовательно, для всех $p \geq p_0$ координаты точки $(u_1', \ldots, u_n')$ удовлетворяют неравенству (2), имеем

$$\ln\left(|A_p| \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} a_k\right)\right) < \frac{\rho|\lambda_p|^{1+\varepsilon}}{\ln|\lambda_p|} + \frac{\rho|\lambda_p| n}{(1+\varepsilon)\ln|\lambda_p| + \ln\frac{\rho}{\ln|\lambda_p|}}$$

или

$$\frac{\ln|\lambda_p|}{|\lambda_p|^{1+\varepsilon}} \ln\left(|A_p| \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} a_k\right)\right) <$$

$$< \rho + \frac{\rho_n}{|\lambda_L|^{\varepsilon}\left\{1 + \varepsilon + \frac{\ln\rho}{\ln|\lambda_p|} - \frac{\ln\ln|\lambda_p|}{\ln|\lambda_p|}\right\}}.$$

Переходя к пределу при $p \to +\infty$, получаем

$$\overline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{\ln|\lambda_p|}{|\lambda_p|^{1+\varepsilon}} \ln^+\left(|A_p| \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} a_k\right)\right) \leq \rho_{QR}(a_1, \ldots, a_n) + \varepsilon;$$

переходя к пределу при $\varepsilon \to 0+$, имеем

$$\gamma = \overline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{\ln|\lambda_p|}{|\lambda_p|^{1+\varepsilon}} \ln^+\left(|A_p| \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} a_k\right)\right) \leq \rho_{QR}(a_1, \ldots, a_n).$$

Теперь докажем, что $\gamma \geq \rho_{QR}(a_1, \ldots, a_n)$. Для любого достаточно малого числа $\varepsilon \geq 0$, существует такое p_1, что для всех $p \geq p_1 \in N$ выполняется неравенство

$$|A_p| < \exp\left\{\frac{(\gamma+\varepsilon)|\lambda_p|}{\ln|\lambda_p|} - \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_p^{(k)}\right\}. \tag{3}$$

Воспользовавшись формулой Эйлера, оценим сумму ряда (1) по модулю:

$$|G(z_1, \ldots, z_n)| \leq \sum_{p=1}^{+\infty} |A_p| \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} x_k\right) = G_1(x_1, \ldots, x_n)$$

или, введя константу C_1 и использовав неравенство (3), получим

$$M(G, x_1, \ldots, x_n) \leq C_1 \sum_{p=1}^{+\infty} \exp\left\{\frac{(\gamma+\varepsilon)|\lambda_p|}{\ln|\lambda_p|} - \sum_{k=1}^{n} u_k \lambda_p^{(k)}\right\} =$$

$$= C_1 \sum_{p=1}^{+\infty} \exp\left\{\frac{(\gamma+2\varepsilon)|\lambda_p|}{\ln|\lambda_p|} - \sum_{k=1}^{n} u_k \lambda_p^{(k)}\right\} \exp\left(-\varepsilon\frac{|\lambda_p|}{\ln|\lambda_p|}\right). \tag{4}$$

Сделаем верхнюю оценку для выражения $\dfrac{(\gamma+2\varepsilon)|\lambda_p|}{\ln|\lambda_p|} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} u_k$. Преобразуем его, считая, что для всех $p \geq p_2 > p_1$, $|\lambda_p| \geq e$

$$\frac{(\gamma+2\varepsilon)\,|\lambda_p|}{\ln|\lambda_p|} - \frac{|\lambda_p|}{\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}} + \frac{|\lambda_p|}{\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} u_k \le$$

$$\le \max_{[e,+\infty)} \left\{ \frac{(\gamma+2\varepsilon)\,t}{\ln t} - \frac{t}{\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}} \right\} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}} - u_k \right) \lambda_p^{(k)}. \tag{5}$$

Сначала в неравенстве (5) определим знак второго слагаемого. Легко видеть, что

$$\frac{1}{u_k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}} < u_k \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}} - u_k < 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

согласно условию $0 < \lambda_p^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$,

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}} - u_k \right) \lambda_p^{(k)} < 0$$

и это слагаемое можно опустить. Тогда получим

$$\frac{(\gamma+2\varepsilon)\,|\lambda_p|}{\ln|\lambda_p|} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_p^{(k)} u_k < \max_{[e,+\infty)} \left\{ \frac{(\gamma+2\varepsilon)\,t}{\ln t} - \frac{t}{\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}} \right\}.$$

Исследуем гладкую функцию

$$\Psi(t) = \frac{(\gamma+2\varepsilon)\,t}{\ln t} - \frac{t}{\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}}$$

на $[e, +\infty)$ и найдем абсолютный максимум.

Сначала исследуем поведение на границе луча $[e, +\infty)$. При $t \to +\infty$ $\Psi(t) \to -\infty$, а при $t \to e+$ $\Psi(e) = e(\gamma+2\varepsilon) - \dfrac{e}{\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}}$ и в достаточно малой окрестности точки e величина $\Psi(e)$ ограничена.

Найдем первую производную по переменной t и стационарные точки:

$$\Psi_t'(t) = (\gamma+2\varepsilon)\frac{\ln t - 1}{\ln^2 t} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}} = 0.$$

Получим квадратное уравнение

$$\ln^2 t - (\gamma+2\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} u_k^{-1} \ln t + (\gamma+2\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} u_k^{-1} = 0 \;\Rightarrow$$

$$t_1 = \exp\left\{ \frac{(\gamma+2\varepsilon)}{2} \sum_{k=1}^{n} u_k^{-1} \left(1 + \left(1 - \frac{4}{(\gamma+2\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}} \right)^{1/2} \right) \right\},$$

$$t_2 = \exp\left\{ \frac{(\gamma+2\varepsilon)}{2} \sum_{k=1}^{n} u_k^{-1} \left(1 - \left(1 - \frac{4}{(\gamma+2\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}} \right)^{1/2} \right) \right\}.$$

Из двух корней t_1 и t_2 выбираем t_1, так как в точке t_1 достигается локальный и абсолютный максимумы для достаточно большой $\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}$ и малых $d \in (0, d'')$, а величина

$$t_2 = \exp\left\{2\left(1+\left(1-\frac{4}{(\gamma+2\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}}\right)^{1/2}\right)^{-1}\right\} \to e$$

ограничена, если $d \to 0+$.

Легко видеть, что

$$\max_{[e,+\infty)} \Psi(t) = \Psi(t_1) =$$

$$= \left\{(\gamma+2\varepsilon)\left[\frac{(\gamma+2\varepsilon)}{2}\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}\left(1+\left(1-\frac{4}{(\gamma+2\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}}\right)^{1/2}\right)\right]^{-1} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}}\right\} \exp\left\{\frac{(\gamma+2\varepsilon)}{2}\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}\left\{1+\left(1-\frac{4}{(\gamma+2\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}}\right)^{1/2}\right\}\right\} <$$

$$< \exp\left\{(\gamma+2\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}\right\}. \tag{6}$$

Используя (6), неравенство (4) примет вид

$$M(G, x_1, \ldots, x_n) \le C_1 \sum_{p=1}^{p_2-1} \exp\left\{\frac{(\gamma+\varepsilon)|\lambda_p|}{\ln|\lambda_p|} - \sum_{k=1}^{n} u_k \lambda_p^{(k)}\right\} +$$

$$+ C_1 \sum_{p=p_2}^{+\infty} \exp\left\{\exp\left\{(\gamma+2\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}\right\}\right\} \exp\left(-\varepsilon\frac{|\lambda_p|}{\ln|\lambda_p|}\right) <$$

$$< C_1 \exp\left\{\exp\left\{(\gamma+2\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}\right\}\right\} \sum_{p=p_2}^{+\infty} \exp\left(-\varepsilon\frac{|\lambda_p|}{\ln|\lambda_p|}\right) + C_2 <$$

$$< \exp\left\{\exp\left\{(\gamma+3\varepsilon)\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}\right\}\right\} \sum_{p=p_2}^{+\infty} \exp\left(-\varepsilon\frac{|\lambda_p|}{\ln|\lambda_p|}\right). \tag{7}$$

По условию теоремы для достаточно малых $\delta > 0$ и для всех $p \ge p_3 > p_2$

$$\ln\ln p < (\alpha+\delta)\ln|\lambda_p|, \qquad \ln p < |\lambda_p|^{\alpha+\delta},$$

откуда следует

$$\frac{\varepsilon}{\ln|\lambda_p|}|\lambda_p|^{\varphi}\ln p < \frac{\varepsilon}{\ln|\lambda_p|}|\lambda_p|\ln p, \qquad \varphi = 1-\alpha-\delta > 0, \ \Rightarrow$$

$$\sum_{p=p_3}^{+\infty} \exp\left(-\varepsilon \frac{|\lambda_p|}{\ln|\lambda_p|}\right) < \sum_{p=p_3}^{+\infty} p^{-\varepsilon \frac{|\lambda_p|^{\varphi}}{\ln|\lambda_p|}} < +\infty \quad \Rightarrow$$

по признаку сравнения и ряд в правой части неравенства (7) сходится для фиксированного ε. Тогда для всех $d \in (0, d''') \subset (0, d'')$ выполняется неравенство

$$\ln M(G, x_1, \ldots, x_n) < \exp\left\{(\gamma + 3\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}\right\},$$

откуда по определению R-порядка

$$\rho_{QR}(a_1, \ldots, a_n) = \overline{\lim_{\substack{d \to 0+ \\ x \in B \cap Q}}} \frac{\ln\ln M(G, x_1, \ldots, x_n)}{\sum_{k=1}^{n} u_k^{-1}} \le \gamma + 3\varepsilon, \quad \varepsilon \to 0+ \quad \Rightarrow$$

$$\rho_{QR}(a_1, \ldots, a_n) \le \gamma,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Понятие открытого октанта существует для пространств $\boldsymbol{R}^n$, где $n \ge 2$, поэтому и результаты, полученные в работе, являются новыми для $n \ge 2$. Если характеристика роста отлична от нуля, значит подход осуществляется к особой точке границы основания, например полюсу или существенно особой точке.

1. *Макаров В. Ю.* Характеристики степенного роста многомерного ряда экспонент // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 4. – С. 438–442.
2. *Makarov V. Yu.* The characteristics of the sum of a multidimensional series // Там же. – 1994. – **46**, № 7. – С. 886–892.

Получено 26.02.98