УДК 519.41/47

В. А. Крекнин, И. И. Мельник (Херсон. пед. ин-т)

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ДОПОЛНЯЕМЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПРИМАРНЫМИ ЦИКЛИЧЕСКИМИ ПОДГРУППАМИ

We study finite nonprimary groups with complementable maximal primary cyclic subgroups and describe all supersolvable groups of this sort.

Вивчаються скінченні непримарні групи вказаного типу і дається опис усіх таких надрозв'язних груп.

Известно [1], что если в конечной группе каждая примарная циклическая подгруппа имеет дополнение, то она является вполне факторизуемой группой. В таких группах каждая примарная циклическая подгруппа имеет простой порядок и является максимальной примарной циклической подгруппой этой группы. Естественно возникает задача изучения класса конечных групп, в которых каждая максимальная примарная циклическая подгруппа имеет дополнение. Такие группы называются DM-группами.

Очевидно, класс конечных DM-групп существенно шире класса вполне факторизуемых групп [2]. Впервые описание конечных абелевых DM-групп осуществил С. Н. Черников [3]. Неабелевы группы, близкие к DM-группам, рассматривались в [4, 5]. В частности, из результатов [5] можно получить описание конечных регулярных p-групп с дополняемыми максимальными циклическими подгруппами. В [4] установлено, что конечная абелева группа является DM-группой тогда и только тогда, когда она является прямым произведением циклических подгрупп согласованных порядков.

Примарные DM-группы описаны в [2, 6, 7]. Здесь изучаются непримарные конечные DM-группы.

Пусть A — произвольная конечная группа и R — система всех ее максимальных примарных циклических подгрупп. Элементы из R будут называться R-подгруппами группы A. Если каждая R-подгруппа имеет в A дополнение, то группа A называется DM-группой.

Пусть A — произвольная конечная непримарная DM-группа. Наибольшее число, являющееся порядком некоторой R-подгруппы, называется локальной экспонентой группы A и обозначается через $l(A)$.

Положим $l(A)=p^k$, и пусть D — множество всех элементов порядка p из тех R-подгрупп, порядок которых равен $l(A)$. Подгруппа $T=\langle D\rangle$ является инвариантной в A и называется цокольной подгруппой группы A.

Лемма 1. *Цоколь T конечной DM-группы A содержится в каждой подгруппе, индекс которой в A меньше локальной экспоненты $l(A)$.*

Доказательство. Пусть H — произвольная подгруппа группы A, причем $[A:H]<l(A)$. Обозначим через Y гомоморфное отображение (представление) группы A в группу подстановок множества левых смежных классов по подгруппе H (см. [8], теорема 5.3.1). Такое представление в дальнейшем будем обозначать через $Y=Y(A,H)$.

Рассмотрим элемент $d\in D$. Тогда из определения множества D следует, что $d\in\langle f\rangle$, где элемент f имеет порядок $l(A)$. Так как индекс H в A меньше $l(A)$, то $Y(f)$ имеет порядок, меньший числа $l(A)$, поэтому $Y(d)=1$. Отсюда получаем, что $d\in H$. Таким образом, $D\subset H$, но тогда и $T\subset H$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Цокольная подгруппа T конечной DM-группы A содержится в дополнении к каждой R-подгруппе L, порядок которой меньше $l(A)$.*

Доказательство. Пусть L — произвольная R-подгруппа, $|L| < l(A)$ и H является дополнением к L в группе A. Ясно, что $[A : H] = |L|$, поэтому на основании леммы 1 $T(A) \subset H$. Лемма доказана.

Непосредственно из определений и леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. *Цокольная подгруппа T конечной DM-группы A является p-группой и всякий элемент порядка p из T принадлежит множеству D.*

Рассмотрим теперь R-подгруппу H группы A, и пусть $|H| = l(A) = p^k$. Пусть L — дополнение к H в группе A и $Y = Y(A, L)$ — соответствующее представление. Для элемента z порядка p^k положим $m(z) = z^r$, $r = p^{k-1}$.

Лемма 4. *Образ $Y(T)$ цокольной подгруппы $T = T(A)$ при представлении $Y = Y(A, L)$ является элементарной абелевой группой.*

Доказательство. Покажем, что для любого элемента d из D образ $Y(d)$ принадлежит центру группы $Y(T)$. Пусть $Y(d) \neq 1$. Существует такой элемент f порядка $l(A)$, что $d \in F = \langle f \rangle$, причем $d = m(f)$. Элемент $Y(f)$ имеет порядок, равный $l(A)$. Так как $[A : L] = l(A)$, то $Y(f)$ является циклом длины $l(A)$. Из теоремы 5.1.3 [4] следует, что циклическая подгруппа $Y(f)$ является самоцентрализирующейся в группе подстановок степени p^k. Но так как подгруппа T инвариантна в A, то FT является p-подгруппой. Поэтому образ $Y(FT)$ имеет нетривиальный центр, который содержится в циклической подгруппе $Y(F)$. Следовательно, $Y(d)$ принадлежит центру группы $Y(FT)$ и, тем более, центру группы $Y(T)$. Так как элемент d произвольный из D, то подгруппа $Y(D)$ является элементарной абелевой группой. Ясно, что эта подгруппа совпадает с $Y(T)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Цокольная подгруппа T конечной DM-группы A является элементарной абелевой группой.*

Дпказательство. Пусть локальная экспонента группы A равна p^k. Покажем, что экспонента группы T равна p. Пусть это не так, тогда в T существует элемент t порядка p^2. Элемент $f = t^p$ имеет порядок p и в силу леммы 3 принадлежит D. Следовательно, в группе A существует R-подгруппа F, содержащая элемент f. Пусть H — дополнение к F в группе A и $Y = Y(A, H)$ — соответствующее представление. Образ $Y(T)$ на основании леммы 4 — элементарная абелева группа. С другой стороны, $(Y(t))^p = Y(t^p) = Y(f) \neq 1$, так как $f \in F$ и ограничение представления Y на подгруппе F является точным. Полученное противоречие и показывает, что экспонента подгруппы T равна p.

Докажем теперь, что T — абелева группа. Допустим, что существуют такие элементы x, y в T, что $[x, y] = z \neq 1$. Так как $\exp T = p$, то $z^p = 1$. По лемме 3 элемент $z \in D$ и если R-подгруппа L группы A содержит элемент z, то $|L| = l(A) = p^k$. Пусть Q — дополнение к L в A. Рассмотрим представление $Y = Y(A, Q)$. Очевидно, $Y(z) \neq 1$. С другой стороны, в силу леммы 4 $Y(T)$ является элементарной абелевой подгруппой, поэтому $Y(z) = [Y(x), Y(y)] = 1$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

В леммах 6–8 рассматривается R-подгруппа H конечной DM-группы A, $|H| = l(A) = p^k$, дополнение L к H в группе A и соответствующее представление $Y = Y(A, L)$.

Непосредственно получаются следующие результаты.

Лемма 6. *Справедливы следующие утверждения:* 1) $Y(T \cap L) = \{1\}$; 2) *если* $p^k \neq 4$, *то* $Y(T) \subset Y(H)$; 3) *подгруппа* $L \cap T$ *инвариантна в* A; 4) *подгруппа* $L \cap T$ *является дополнением к подгруппе* $H \cap T$ *в группе* T.

Доказательство *утверждения* 1. Пусть $y \in T \cap L$, тогда подстановка $Y(y)$ оставляет неподвижным смежный класс L. С другой стороны, в силу леммы 3 из включения $y \in T$ вытекает, что $y = m(g)$ для некоторого элемента g из A. Пусть $Y(y) \neq 1$; тогда элемент $Y(g)$ имеет порядок p^k, а так как $[A : L] = p^k$, то $Y(g)$ является циклом длины p^k. Отсюда следует, что $Y(y) = m(Y(g))$ является произведением p^{k-1} циклов длины p и, следовательно, не имеет неподвижных элементов. Полученное противоречие и доказывает первое утверждение леммы.

Утверждения 2, 3 и 4 проверяются непосредственно. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если локальная экспонента конечной DM-группы A отлична от* 4, *то фактор-группа $\overline{A} = A/T$ группы A по ее цокольной подгруппе T является DM-группой.*

Доказательство. Пусть $\overline{F} = \langle \bar{f} \rangle$ — R-подгруппа группы $\overline{A}$, где f — прообраз элемента $\bar{f}$ в группе A, порядок которого есть степень простого числа. Очевидно, $F = \langle f \rangle$ является R-подгруппой группы A. Пусть L — дополнение к F в группе A. Ясно, что $\overline{A} = \overline{FL}$, где $\overline{L}$ — образ L для указанной факторизации. Пусть $\bar{a} \in \overline{F} \cap \overline{L}$. Тогда $\bar{a} = \bar{f}^n$ и $a = f^n \cdot w$, где $a \in L$, $w \in T$. В силу утверждения 4 леммы 6 элемент $w = xy$, $x \in F \cap T$, $y \in L \cap T$. Поэтому $a = f^n \cdot xy$ или $ay^{-1} = f^n \cdot x = 1$. Следовательно, $a = y \in T$, т. е. $\bar{a} = \bar{1}$. Таким образом, $\overline{F} \cap \overline{L} = \{\bar{1}\}$ и R-подгруппа $\overline{F}$ имеет в $\overline{A}$ дополнение $\overline{L}$. Так как $\overline{F}$ — произвольная R-подгруппа из фактор-группы $\overline{A}$, то тем самым доказано, что $\overline{A}$ является DM-группой. Теорема доказана.

Лемма 7. *Пусть T — цокольная подгруппа конечной DM-группы A. Для любой подгруппы из T существует дополнение в T, которое является инвариантным в A.*

Доказательство. Пусть Q — произвольная подгруппа из T, причем $|Q| = p^r$ и $|T| = p^s$. Доказательство проведем индукцией по числу r. Если $r = 0$, то все очевидно. Пусть утверждение выполняется для любой подгруппы из T, порядок которой равен p^r. Рассмотрим подгруппу Q из T порядка p^{r+1}. По индукции для максимальной подгруппы $B \subset Q$ существует дополнение M в подгруппе T, которое инвариантно в группе A. Рассмотрим в пересечении $Q \cap M$ элемент $y \neq 1$ и R-подгруппу H из A, содержащую y. Пусть V — дополнение к H в A и $N = (V \cap T) \cap M$. По лемме 6 подгруппы $V \cap T$ и M инвариантны в A и поэтому подгруппа N инвариантна в A. Так как $|H| = l(A)$, то по лемме 6 подгруппа $V \cap T$ является дополнением к $H \cap T$ в группе T. Но тогда $T = (V \cap T) \cdot (H \cap T)$ и поэтому $T = M(V \cap T)$. Достаточно доказать, что $|Q||N| = |T|$ и $Q \cap N = \{1\}$. Имеем $|M| = p|N|$, поэтому $|Q||N| = p^r|M| = |B||M| = |T|$.

Пусть теперь элемент $a \in Q \cap N$. Так как $Q = (Q \cap M)B$, то $a = zb$, где $a \in Q \cap M$ и $b \in B$. Тогда $b = az^{-1} \in B \cap M = \{1\}$, т. е. $b = 1$ и $a = z \in Q \cap \cap M \cap N \subset H \cap N$, так как $Q \cap M$ — подгруппа простого порядка и элемент $y \in H \cap Q \cap M$. Следовательно, $Q \cap M \subset H$. Так как $H \cap N \subset H \cap V = \{1\}$, то $a = 1$, т. е. $Q \cap N = \{1\}$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Цокольная подгруппа T конечной DM-группы A является прямым произведением циклических подгрупп простого порядка, каждая из которых инвариантна в группе A.*

Доказательство. Обозначим через F максимальную подгруппу из T, которая может быть представлена в виде прямого произведения инвариантных в A циклических подгрупп простого порядка и докажем, что $F=T$.

Допустим, что $F \neq T$ и пусть $F \subset L \subset T$, где L — максимальная подгруппа в T. По лемме 7 в T существует подгруппа Q, которая инвариантна в A и является дополнением к L в подгруппе T. Так как Q является циклической подгруппой простого порядка, то подгруппа $F \times Q$ представима в виде прямого произведения инвариантных в A циклических подгрупп простого порядка. Это противоречит максимальности подгруппы F. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть P — произвольная силовская p-подгруппа конечной DM-группы A с локальной экспонентой $l(A)=p^k \neq 4$. Тогда в подгруппе P существует такая система элементов $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$, что $T=\langle a_1 \rangle \times \times \langle a_2 \rangle \times \ldots \times \langle a_r \rangle$, где $a_i = m(b_i)$, и подгруппа $\langle a_i \rangle$ инвариантна в A, $i = = 1, \ldots, r$.*

Доказательство. Согласно лемме 8 цокольная подгруппа T представима в виде прямого произведения инвариантных в A подгрупп $\langle a_i \rangle = F_i$ порядка p, $i=1, \ldots, r$. Рассмотрим R-подгруппу H_i из A, содержащую F_i. По лемме 3 H_i имеет порядок p^k. Пусть Q — силовская p-подгруппа группы A, содержащая H_i. Тогда для некоторого элемента g из A выполняется равенство $P=g^{-1}Qg$. Так как F_i инвариантна в A, то $F_i = g^{-1}F_i g$, $g^{-1}H_i g = M_i \subset P$, причем M_i — циклическая подгруппа порядка p^k. Из включения $a_i \in M_i$ следует, что существует такой элемент b_i, что $a_i = m(b_i)$. Так как индекс i произвольный, то тем самым установлено существование в подгруппе P системы элементов B с требуемым условием. Лемма доказана.

Пусть A — произвольная конечная DM-группа, Q — силовская q-подгруппа группы A и $\exp A = q^s$, где q — некоторый простой делитель порядка группы A. Обозначим через $M(Q)$ множество всех таких элементов g, которые можно представить в виде $g=m(z)$, где $z \in Q$. Пусть $E(Q)$ — подгруппа, порожденная множеством $M(Q)$.

Лемма 10. *Пусть $l(A)=p^k \neq 4$ и P — силовская p-подгруппа группы A. Тогда выполняется равенство $E(P)=T(A)$.*

Доказательство. Непосредственно из определения следует, что $E(P)$ содержится в цокольной подгруппе $T=T(A)$. На основании леммы 9 получаем и обратное включение. Лемма доказана.

Лемма 11. *Если Q — силовская q-подгруппа конечной DM-группы G, то $E(Q)$ содержится в центре $Z(Q)$ подгруппы Q, причем $E(Q)$ является элементарной абелевой подгруппой группы G.*

Доказательство. Допустим, что лемма не верна. Обозначим через G минимальный контрпример. Пусть локальная экспонента $l(G)$ группы G равна $p^k \neq 4$ и T — ее цокольная подгруппа. По теореме 1 фактор-группа $\overline{G} = G/T$ является DM-группой. Если простое число $q \neq p$, то подгруппа $\overline{Q}$ как образ Q при этой факторизации изоморфна Q и, следовательно, является силовской q-подгруппой $\overline{G}$. При этом $E(\overline{Q})$ изоморфна подгруппе $E(Q)$ и, учитывая минимальность группы G, $E(\overline{Q}) \subset Z(\overline{Q})$. Поэтому $E(Q) \subset Z(Q)$.

Пусть теперь $p=q$. Обозначим через Q силовскую q-подгруппу группы G. В силу леммы 10 $E(Q)=T$, причем подгруппа T представима в виде прямого произведения инвариантных в G подгрупп порядка q. Но эти подгруппы содержатся в центре подгруппы Q, поэтому и $T \subset Z(Q)$.

Наконец отметим, что в каждом из этих случаев подгруппа $E(Q)$ абелева и ее экспонента равна q. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть Q — силовская q-подгруппа конечной DM-группы G, причем* $\exp Q = q^s$, $s > 2$. *Тогда для любых элементов x, z из Q $[t(x), z]$ принадлежит подгруппе $E(Q)$, где $t(x) = x^h$, $h = q^{s-2}$.*

Доказательство. Пусть локальная экспонента группы G равна $l(G) = p^k$, $p^k \neq 4$, и T — цокольная подгруппа группы G. Рассмотрим сначала случай $p \neq q$. Согласно теореме 1 фактор-группа $\overline{G} = G/T$ является DM-группой. По индукции можно предположить, что для DM-группы $\overline{G}$, порядок которой меньше порядка G, данная лемма справедлива. Так как силовская q-подгруппа $\overline{Q}$ фактор-группы $\overline{G}$ изоморфна Q, то для подгруппы Q утверждение леммы выполняется.

Докажем лемму для случая $p = q$. Пусть P — силовская p-подгруппа группы G. Обозначим через $\overline{a}$, $\overline{z}$, $\overline{x}$ и $\overline{P}$ образы элементов $t(x)$, z, x и подгруппы P в фактор-группе $\overline{G}$ соответственно. Заметим, что $\overline{P}$ является силовской p-подгруппой группы $\overline{G}$. Так как подгруппа $\overline{P}$ имеет экспоненту p^{k-1}, то $\overline{a} \in E(\overline{P})$. В силу леммы 11 коммутатор $[\overline{a}, \overline{z}] = \overline{1}$, поэтому $[t(x), z]$ принадлежит подгруппе $E(P)$.

Непосредственно из лемм 12 и 9 выводятся следующие утверждения.

Лемма 13. *Пусть подгруппа Q и элементы $a = t(x)$, z те же, что и в лемме 12. Тогда, если $q > 2$, то $(az)^q = a^q z^q$.*

Лемма 14. *Пусть q — произвольный простой делитель порядка конечной DM-группы A и Q — произвольная силовская q-подгруппа, причем $q > 2$ и* $\exp Q = q^s$, $s \geq 2$. *Тогда для любого элемента b из подгруппы $E(Q)$ существует в Q такой элемент y, что $b = m(y)$.*

Лемма 15. *Пусть Q — такая же подгруппа, как и в лемме 14. Если элементы a, b принадлежат Q, то $(ab)^n = a^n b^n$, $n = q^{s-1}$.*

Лемма 16. *Пусть q — нечетный простой делитель порядка конечной DM-группы A, экспонента силовской q-подгруппы Q равна q^s и M — некоторая q-подгруппа группы A. Пусть a и $z = y^h$, $h = q^{s-2}$, — элементы из M, а y из Q. Тогда в M существует такой элемент c, что выполняется равенство $c^q = a^q z^q$.*

Теорема 2. *Пусть A — произвольная конечная DM-группа. Всякая силовская q-подгруппа группы A при $q > 2$ является DM-группой.*

Доказательство. Достаточно установить, что любая R-подгруппа силовской q-подгруппы Q является R-подгруппой группы A. Пусть локальная экспонента $l(A)$ не превышает 4, тогда единственным нечетным простым делителем порядка группы A является число 3. Очевидно, в данном случае всякая R-подгруппа силовской 3-подгруппы Q имеет порядок 3 и является R-подгруппой группы A.

Пусть теперь $p^k > 4$. Тогда по теореме 1 фактор-группа $\overline{A}$ группы A по цокольной подгруппе T является DM-группой. Если $p \neq q$, то подгруппа Q изоморфна силовской q-подгруппе $\overline{Q}$, относительно указанной факторизации. Если H — R-подгруппа группы Q, то H будет R-подгруппой в $\overline{Q}$. По индукции можно полагать, что $\overline{H}$ является R-подгруппой группы $\overline{A}$. Но тогда и H будет R-подгруппой группы A.

Допустим теперь, что $p = q$, и пусть P — силовская p-подгруппа группы A.

Если $k = 1$, то теорема очевидна. Пусть $k > 1$ и $\overline{P}$ является образом силовской p-подгруппы P в группе $\overline{A}$. Рассмотрим в P R-подгруппу $H = \langle h \rangle$. Если $\overline{H}$ является R-подгрупой группы P, то по индукции можно полагать, что и $\overline{H}$ — R-подгруппа группы $\overline{A}$. Отсюда вытекает, что $\overline{H}$ является R-подгруппой группы A. Поэтому достаточно показать, что образ $\overline{H}$ R-подгруппы H из группы A будет R-подгруппой группы $\overline{P}$. Допустим, что это не выполняется. Тогда в $\overline{P}$ существует такой элемент $\overline{g}$, что $\overline{g}^p = \overline{h}$. Отсюда получаем, что $g^p = hz$ или $h = g^p z^{-1}$, где $z \in T$. В силу леммы 16 в подгруппе P существует такой элемент c, что $c^p = h$. Противоречие. Теорема доказана.

Лемма 17. *Пусть A — конечная DM-группа и $\{T_i\}$, $i = 0, \ldots, n$, — последовательность ее подгрупп таких, что выполняются условия*:

1) $T_l = \{1\}$;

2) *если $i < j$, то $T_i \subset T_j$;*

3) *фактор-группа группы T_j по подгруппе T_i является цокольной подгруппой группы A / T_{j-1};*

4) *локальная экспонента фактор-группы A / T_{n-1} больше* 4.

Тогда подгруппа T_n является DM-группой.

Доказательство. Рассмотрим произвольную R-подгруппу H группы A и пусть L — дополнение к H в группе A. Докажем соотношение $T_j = (T_j \cap \cap H) \cdot (T_j \cap L)$, $j = 1, \ldots, n$. При $j = 1$ это соотношение является следствием леммы 9. А дальше применяем индукцию.

Пусть теперь U — произвольная R-подгруппа группы T_n. Обозначим через H R-подгруппу группы A, содержащую подгруппу U. Очевидно, $U = H \cap T_n$ и по доказанному $T_n = U \cdot (L \cap T_n)$, где L — дополнение к H в группе A. Кроме того, $U \cap (L \cap T_n)$ содержится в подгруппе $(H \cap L) \cap T_n = \{1\}$. Поэтому $L \cap T_n$ является дополнением к подгруппе U в группе T_n. В силу произвольности R-подгруппы U подгруппа T_n является DM-группой. Лемма доказана.

Теорема 3. *Всякая конечная DM-группа A является сверхразрешимой или в A существует инвариантная сверхразрешимая подгруппа N, являющаяся DM-группой, причем фактор-группа A / N — DM-группа экспоненты* 12.

Доказательство. Рассмотрим ряд подгрупп $\{T_i\}$, $i = \overline{1, n}$, группы A, удовлетворяющей условиям: 1) фактор-группа T_j / T_{j-1} является цокольной подгруппой группы A / T_{j-1}, $j = 1, \ldots, n$; 2) локальная экспонента фактор-группы A / T_j больше 4, а локальная экспонента группы A / T_n не превышает 4. По теореме 2 подгруппа T_n является DM-группой. Очевидно, что подгруппа T_n инвариантна в A. По лемме 12 подгруппа T_1 представима в виде прямого произведения инвариантных в A циклических подгрупп простого порядка A_i, $i = = 1, \ldots, n$. Поэтому в подгруппе T_1 существует ряд подгрупп $\{1\} = B \subset \subset B_1 \subset \ldots \subset B_r$, где $B_j = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_j$, $j = 1, \ldots, r$. Очевидно, факторы указанного ряда — циклические подгруппы простого порядка, причем каждая подгруппа B_j инвариантна в группе A. Отсюда по индукции выводим, что существует ряд подгрупп $\{1\} = D \subset D_1 \subset \ldots \subset D_t$, где подгруппа D_i содержится в T_n и инвариантна в A, фактор-группы D_i / D_{i-1} — циклические простого порядка, $i = 1, \ldots, t$. Отсюда следует, что T_n — сверхразрешимая подгруппа. Кроме того, если фактор-группа $\overline{A} = A/T_n$ сверхразрешима, то и группа A также сверхразрешима.

Покажем, что если A не сверхразрешима, то фактор-группа $\overline{A}$ имеет экспоненту 12. Действительно, так как локальная экспонентна DM-группы $\overline{A}$ не превышает 4 и $\overline{A}$ не является сверхразрешимой, то $\exp \overline{A} = 6$ или 12. Если $\exp \overline{A} = 6$, то ее локальная экспонента равна 3. Согласно леммам 8 и 12 силовская 3-подгруппа группы $\overline{A}$ является прямым произведением инвариантных в $\overline{A}$ циклических подгрупп порядка 3. Поэтому подгруппа F, являющаяся расширением T_n с помощью силовской 3-подгруппы группы $\overline{A}$, сверхразрешима. Кроме того, фактор-группа A/F — элементарная абелева 2-группа, поэтому и A сверхразрешима. Таким образом, если A не является сверхразрешимой, то $\exp \overline{A} = 12$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что всякая конечная DM-группа является разрешимой. Действительно, подгруппа T_n сверхразрешима, фактор-группа $\overline{A}$ бипримарна и, следовательно, разрешима. Отсюда получаем, что и A — также разрешимая группа.

Лемма 18. *Если Q — инвариантная силовская q-подгруппа конечной DM-группы A, то фактор-группа $A = A/Q$ является DM-группой.*

Доказательство. Пусть $\overline{H} = \langle \overline{h} \rangle$ — некоторая R-подгруппа фактор-группы $\overline{A}$ и порядок $\overline{H}$ равен r^n, где r — некоторый простой делитель порядка группы $\overline{A}$. Так как Q — силовская q- подгруппа, то числа r и q взаимно простые. Пусть h — элемент из группы A порядка r^n, образом которого является элемент $\overline{h}$. Тогда подгруппа $H = \langle h \rangle$ является R- подгруппой группы A. Следовательно, существует дополнение L к подгруппе H в группе A. Так как Q инвариантна в A, то Q содержится в L. Тогда для фактор-подгрупп $\overline{H}$ и $\overline{L}$, являющихся образами при рассматриваемой факторизации подгрупп H и L соответственно, выполняются равенства $\overline{A} = \overline{H} \cdot \overline{L}$, $\overline{H} \cap \cap \overline{L} = \{1\}$. Так как $\overline{H}$ — произвольная подгруппа из фактор-группы $\overline{A}$, то тем самым доказано, что $\overline{A}$ является DM-группой. Лемма доказана.

Лемма 19. *Пусть Q — инвариантная силовская q-подгруппа конечной DM-группы A, $q > 2$, и H — некоторая R-подгруппа группы A, содержащаяся в Q. Если L — дополнение к H в группе A и B — произвольная R-подгруппа из L нечетного порядка, то B — R-подгруппа группы A.*

Доказательство. Если локальная экспонента группы A не превышает числа 4, то единственным нечетным простым делителем порядка группы A является число 3. Так как при этом силовская 3-подгруппа группы A элементарная абелева, то утверждение леммы для этого случая выполняется.

Допустим, что $l(A) = p^k > 4$. Пусть порядок подгруппы B равен r^n, где $r > > 2$ — простой делитель порядка группы A. По теореме 1 фактор-группа $\overline{A} = = A/T$ является DM-группой. Рассмотрим случай, когда $p \neq r$. Пусть $\overline{B}$ и $\overline{L}$ — образы подгрупп B и L в фактор-группе $\overline{A}$. Если $\overline{B}$ — R-подгруппа группы $\overline{L}$, то по индукции можно считать, что $\overline{B}$ является R-подгруппой группы $\overline{A}$. Тогда подгруппа B будет R-подгруппой группы A и тем самым утверждение доказано.

Допустим теперь, что подгруппа $\overline{B}$ не является R-подгруппой в $\overline{L}$. Тогда в группе $\overline{L}$ существует такой элемент $\overline{a}$, что $\overline{a}^r = \overline{b}$, где $\overline{b}$ — образующий элемент группы $\overline{B}$. Поэтому $a^r = bt$, где $a \in L$, $t \in T$ и b — образующий группы B. Докажем, что в подгруппе $T \bigcap L$ существует такой элемент z, что $bt = zbz^{-1}$. Действительно, так как a, b из подгруппы L, то элемент $t = b^{-1}a^r$ принадлежит пересечению T и L. По теореме Машке подгруппа $T \bigcap L$ есть прямое произведение $T_1 \times T_2$, где T_1 — централизатор элемента b в подгруппе $T \bigcap L$. Следовательно, $t = xy$, где $x \in T_2$, $y \in T_1$, так как T абелева и y принадлежит централизатору элемента b, поэтому y принадлежит централизатору элемента a^r. Следовательно, $b = a^r x^{-1} y^{-1}$ и, так как порядок элемента b равен $s = r^n$, то $1 = b^s = (a^r x^{-1} y)^s = (a^r x^{-1})^s y^s$. Отсюда следует, что $y^s = 1$. С другой стороны, числа r и p взаимно простые, поэтому из $y \in T$ следует, что $y^p = 1$ и $y = 1$. Следовательно, $a^r = bx$, где $x \in T_2$, и $b^{-1}T_2 b = T_2$. Рассмотрим отображение U подгруппы T_2 в себя, определяемое по правилу $U(x) = b^{-1}gbg^{-1}$, где $g \in T_2$. Известно, что U является инъективным отображением. Следовательно, существует такой элемент z из T, что $x = b^{-1}zbz^{-1}$, поэтому $bx = zbz^{-1}$. Если $a^r = bz$, то $(z^{-1}az)^r = z^{-1}a^r z = z^{-1}bxz = b$, причем элемент $z \in T_2 \subset L$ и $z^{-1}az \in L$. Это противоречит условию, что B является R-подгруппой группы L. Таким образом, $\overline{B}$ — R-подгруппа группы L и для случая $p \neq r$ утверждение леммы доказано.

Пусть теперь $r = p$. Обозначим через P силовскую p-подгруппу группы A. Если показатель k в локальной экспоненте p^k группы A равен 1, то P — элементарная абелева группа. Тогда R-подгруппа B группы L, содержащаяся в P, имеет порядок p и является R-подгруппой группы A. В этом случае лемма доказана. Допустим, что $k > 1$. Обозначим через d образующий элемент R-подгруппы D из L. Покажем, что $\overline{D}$ — R-подгруппа группы $\overline{L}$, где $\overline{D}$ и $\overline{L}$ — образы подгрупп D и L в фактор-группе $\overline{A} = A/T$, где T — цокольная подгруппа группы A. Допустим, что это не так. Тогда в группе $\overline{L}$ найдется такой элемент $\overline{g}$, что $\overline{g}^p = \overline{d}$. Пусть g — прообраз элемента $\overline{g}$ в группе A и $g \in L$. Рассмотрим силовскую p-подгруппу P группы A, содержащую элемент g. Тогда g принадлежит подгруппе $B = P \bigcap L$. Отсюда $g^p t = d$, где $t \in T$. Так как элементы g^p и d принадлежат подгруппе L, то и $t \in L \bigcap T$. По лемме 14 для некоторого элемента f из подгруппы P имеем равенство $t = f^s$, $s = p^{k-1}$. Покажем, что в подгруппе L найдется такой элемент z, что $t = z^s$. Действительно, $f = hz$, где $h \in H$, $z \in L \bigcap P$. Тогда $t = (hz)^s$ и по лемме 15 получаем, что $t = h^s z^s$ принадлежит подгруппе L. Поэтому $h^s = 1$ и $t = z^s$, $z \in L$. Положим $y = z^j$, $j = p^{k-2}$, тогда $t = y^p$, $u = g^p y^p$. На основании леммы 16 $g^p y^p = (gy)^p = d$, причем произведение gy принадлежит L. Противоречие. Следовательно, $\overline{D}$ — R-подгруппа группы $\overline{A}$ и, значит, D является R-подгруппой группы A. Лемма доказана.

На основании этой леммы и основного результата работы [2] вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 20. *Пусть Q — инвариантная силовская q-подгруппа конечной DM-группы A и $q > 2$. Тогда в группе A существует q-дополнение F и система циклических подгрупп A_i, $i = 1, \ldots, n$, для которых выполняются следующие условия*:

1) *подгруппа Q имеет точную факторизацию с помощью подгрупп A_i;*

2) *подгруппа F содержится в нормализаторе каждой подгруппы A_i;*

3) *подгруппы* A_i *имеют согласованные порядки*;

4) $A_iA_j = A_jA_i$.

Пусть теперь A — конечная сверхразрешимая DM-группа. Рассмотрим множество всех простых делителей ее порядка $q_1, q_2, \ldots, q_m$, расположенных в порядке возрастания. Обозначим через Q_i силовскую q-подгруппу группы A. Известно, что в сверхразрешимой группе A существует инвариантный ряд

$$A = G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_m \supset G_{m+1} = \{1\},$$

для которого фактор-группа G_i/G_{i+1} изоморфна подгруппе Q_i. Отсюда легко получить, что $G_i = (\ldots(Q_l \leftthreetimes Q_{l-1}) \leftthreetimes \ldots \leftthreetimes Q_{i+1}) \leftthreetimes Q_i$. Кроме того, $A = G_i \leftthreetimes \leftthreetimes F_i$, где $F_i = (\ldots(Q_{i-1} \leftthreetimes Q_{i-2}) \leftthreetimes \ldots \leftthreetimes Q_2) \leftthreetimes Q_1$.

Теорема 4. *Для того чтобы конечная сверхразрешимая группа* A *была* DM*-группой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) *силовская* q_1*-подгруппа* Q_1 *является* DM*-группой*;

2) *силовская* q_r*-подгруппа* Q_r, $r > 1$, *имеет систему циклических подгрупп* D_i, $i = 1, \ldots, s$, *которая удовлетворяет условиям* 1–4 *из леммы* 20, *при этом нормализатор каждой подгруппы* D_i *содержит в себе подгруппу* F_r.

Доказательство. Необходимость. Пусть A — конечная сверхразрешимая группа. Из леммы 19 вытекает, что группы $F_2, \ldots, F_m$ являются DM-группами. Так как $F_2 = Q_1$, то условие 1 выполняется. Если $r > 1$, то $q > 2$, поэтому в силу леммы 18 в DM-группе F_{r+1} существует система циклических подгрупп $\{D_i\}$, $i = 1, \ldots, s$, которая удовлетворяет условиям 1, 3, причем $N(D_i) \supset F_r$. Необходимость условий теоремы доказана.

Достаточность. Пусть H — произвольная R-подгруппа группы A, удовлетворяющей условиям 1, 2 данной теоремы. Из доказательства основной теоремы работы [2] следует, что эти условия обеспечивают существование в силовской q_r-подгруппе Q_r группы A дополнения B к R-подгруппе H. При этом в качестве дополнения B можно взять подгруппу $D_1D_2 \ldots D_{j-1}D_{j+1} \ldots D_s$. Так как нормализатор $N(D_i)$ содержит подгруппу F_r, то $N(B)$ содержит F_r. Отсюда легко получить, что подгруппа $(D_r \leftthreetimes B) \leftthreetimes F_r$ будет дополнением к подгруппе H в группе A. Так как H — произвольная R-подгруппа группы A, то A является DM-группой. Теорема доказана.

1. *Горчаков Ю. М.* Примитивно факторизуемые группы // Учен. зап. Перм. ун-та. – 1960. – **17**. – С. 15–31.
2. *Крекнин В. А., Малик В. Ф.* Конечные p-группы с дополняемыми максимальными циклическими подгруппами // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 6. – С. 780–785.
3. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
4. *Кляцкая Л. М.* Абелевы группы, в которых дополняемы все максимальные подгруппы фиксированного ранга // Группы с ограничениями для подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1971. – С. 159–184.
5. *Тузов А. Н.* О дополняемости сервантных подгрупп в регулярных p-группах. – Киев, 1981. – 58 с. (Препринт / АН Украины. Ин-т математики, 81.53).
6. *Крекнин В. А., Мельник И. И.* Достаточные условия дополняемости максимальных циклических подгрупп в конечной 2-группе // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1572–1575.
7. *Крекнин В. А., Мельник И. И., Малик В. Ф., Шиловская О. К.* Конечные 2-группы с дополняемыми максимальными циклическими подгруппами // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 104–143.
8. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд.-во иностр. лит., 1962. – 482 с.

Получено 18.09.95