УДК 517.9

Л. П. Лисовик (Киев. ун-т)

ОБ АКСИОМАТИЗАЦИЯХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

We construct some new axiomatic systems for the Boolean algebra. In particular, the axiomatic system for disjunction and logical negation has three axioms. The independence of the axiomatic systems proposed is proved.

Побудовано деякі нові системи аксіом для булевої алгебри. Зокрема, аксіоматична система для диз'юнкції та логічного заперечення має три аксіоми. Для запропонованих аксіоматичних систем доведено їх незалежність.

Аксиоматизации булевых алгебр интенсивно изучались в период 1900–1940 гг. Большое влияние на эти исследования оказала ранняя работа Хантингтона [1], которая была продолжена в [2]. Однако, несмотря на многочисленные использования этих работ (см., например, [3]), работа [4] показывает, что возможна неоднозначная трактовка одного из известных результатов Хантингтона. В [5] указана система аксиом I–VII булевой алгебры, причем для ее полноты достаточно групп аксиом II, V–VII (по две аксиомы в группе). Эти аксиомы как раз и составляют одну из основных систем Хантингтона [1]. В [4] показано, что на самом деле Хантингтон не имел доказательства независимости аксиом группы VII, и, по-видимому, подразумевал под аксиомами этой группы такую группу аксиом:

(VII)* Если (различные) элементы 0, 1 существуют и единственны, то

$$\forall x \quad \exists x' \quad (x \vee x' = 1,\ x \wedge x' = 0).$$

Независимость системы аксиом, состоящей из групп II, V, VI (VII)* доказана в [4].

Интерес к рассмотрению систем аксиом булевой алгебры связан также с построением программ для автоматического доказательства теорем.

В данной работе построены некоторые новые аксиоматизации булевой алгебры. В частности, здесь построена полная независимая система аксиом $\mathfrak{A}_1$ для булевой алгебры в сигнатуре $\neg, \vee, \wedge, 0, 1$. Ее аксиомы (1–3) определяют все тождества для логического отрицания и дизъюнкции, а аксиомы (4–6) служат определениями для конъюнкции, нуля и единицы. Соответственно из аксиом (1–6) образуется восемь полных и независимых подсистем. Построена также новая полная система $\mathfrak{A}_9$, состоящая из четырех аксиом для $\vee, \wedge, \neg$.

Условимся, что обозначения x', $\overline{x}$ и $\neg x$ означают „логическое отрицание x", а $x+y$ и $x \vee y$ — „дизъюнкцию x и y". Соответственно xy и $x \wedge y$ означают „конъюнкцию x и y". Под формулой здесь подразумеваем любую формулу булевой алгебры в сигнатуре $\neg, \vee, \wedge, 0, 1$. Символы x, y, z, w используются для обозначения формул. Вместо символа $\wedge$ используем символ умножения, который, как правило, опускается. Будем использовать обычные соглашения относительно употребления скобок. (Всюду в статье речь идет о системах схем аксиом. Это означает, что вместо переменных x, y, z и т. д. может быть подставлена любая формула булевой алгебры.)

Приведем систему (схем) аксиом $\mathfrak{A}_1$:

1) $x+y = y+x$;
2) $(y+y')'+x = x$;
3) $x+(y+z)' = ((x+y')'+(x+z')')'$;
4) $xy = (x'+y')'$;
5) $(x+x')' = 0$;
6) $x+x' = 1$.

Правило вывода, называемое правилом подстановки, определяется следующим образом. Пусть есть тождества $B = C$ и $B_1 = C_1$, где B_1 — подформула формулы B. (В частности, возможно, что B_1 совпадает с B.) Тогда из них по правилу подстановки получаем тождество $B' = C$, где формула B' образована из формулы B заменой ее подформулы B_1 на подформулу C_1.

Заметим, что тождество $x = x$ выводимо из аксиомы (2). Действительно, аксиома (2) имеет вид $B = x$. Тогда, применяя правило подстановки, в предположении, что формулы C, B_1, C_1 есть соответственно формулы x, B, x из тождества $B = x$, повторенного дважды, получаем тождество $x = x$. Значит, любое тождество вида $B = B$ выводимо. По правилу подстановки из $B = B$ и $B = C$ выводимо $C = B$, поэтому вместе с любой аксиомой (1–6) вида $B = C$ выводимо симметричное к ней тождество $C = B$. Такие тождества будем называть s-аксиомами. Покажем, что из $A = B$ и $B = C$ выводимо $A = C$. Действительно, из $A = B$ выводимо $B = A$. Отсюда и из $B = C$ выводимо $C = A$, а следовательно, и $A = C$.

Правило A-подстановки определяется так же, как и правило подстановки, но дополнительно требуется, чтобы тождество $B_1 = C_1$ было аксиомой или s-аксиомой. Будем говорить, что булева формула B' образуется из булевой формулы B с помощью A-правила (относительно фиксированной системы аксиом), если B' образуется из B заменой ее подформулы B_1 на формулу C_1, где $B_1 = C_1$ — аксиома или s-аксиома. Заметим, что A-правило обратимо: если B' образуется из B с помощью A-правила, то и B образуется из B' с помощью A-правила.

Дедуктивная мощность исчисления $\mathfrak{L}_1$, основанного на системе аксиом $\mathfrak{A}_1$ (и любого последующего исчисления $\mathfrak{L}_i$, основанного на системе аксиом $\mathfrak{A}_i$), не изменится, если вместо правила подстановки использовать правило A-подстановки. Это нетрудно доказать методом математической индукции.

Пусть система $\mathfrak{A}_2$ состоит из аксиом (1–4), а система $\mathfrak{A}_3$ — из аксиом (1–3). Для удобства считаем, что если B — любая булева формула, то под $\overline{B}$ и $\neg B$ подразумевается B'. (Формально в языках исчислений $\mathfrak{L}_i$ символов $\bar{}$ или $\neg$ нет.)

Теорема 1. *Из формулы $\bar{x} + x$ конечным применением A-правила относительно системы аксиом $\mathfrak{A}_3$ выводима любая тождественно истинная булева формула (не имеющая вхождений символов конъюнкции, нуля или единицы).*

Эта теорема следует из полноты системы $\mathfrak{A}_3$, которая доказывается ниже. Теорема 1 дает исчисление высказываний с одной пропозициональной аксиомой $\bar{x} + x$ и пятью унарными правилами вывода (вариантами A-правила). Известно исчисление высказываний в сигнатуре $\neg, \vee$, имеющее ту же пропозициональную аксиому $\neg x \vee x$ и четыре правила вывода (расширения, сокращения, ассоциативности и сечения) [6].

Теорема 2. *Система аксиом $\mathfrak{A}_1$ полна и независима.*

Доказательство. Очевидно, что каждая из аксиом 4–6 независима, так как эти аксиомы определяют конъюнкцию, ноль и единицу. Более точным является такое формальное рассуждение. Допустим, что одна из аксиом 4–6 выводима. Пусть, например, аксиома (4) выводима. Тогда, заменяя в выводе всюду символ конъюнкции на символ дизъюнкции, получаем вывод формулы $x + y = (x' + y')'$, которая опровергается на обычной двухэлементной модели. (Следует отметить, что класс тождеств, истинных в двухэлементной модели, замкнут относительно правила подстановки.) Аналогично, предполагая выводимость (5) или (6), получаем выводимость формулы $(x + x')' = z$ или $x + x' = z$, что также опровергается на двухэлементной модели.

Независимость аксиомы коммутативности (1) получим с помощью синтаксических соображений, а независимость аксиом (2, 3) — рассмотрением конечных моделей. Пусть система $\mathfrak{A}_4$ образуется из системы $\mathfrak{A}_3$ добавлением аксиомы

7) $x + x' = y + y'$.

Тогда тождество $x = x + (y + y')'$ не выводимо из аксиом (2, 3, 7), так как при любом выводе из x с помощью правила подстановки символ x всегда остается справа. Отсюда следует независимость аксиомы (1) от аксиом (2, 3, 7). Тогда аксиома (1) независима и от аксиом (2–7). Действительно, допуская, что аксиома (1) выводима из аксиом (2–7), получаем, что она выводима из аксиом (2, 3, 7), так как при наличии аксиомы (7) вспомогательные определяемые функциональные символы $\wedge$, 0 и 1 можно исключить в выводе, следуя доказательству интерполяционной леммы Крейга и используя обычные приемы, связанные с расширениями (теорий первого порядка), с помощью определений [6].

Независимость аксиомы (2) получаем с помощью трехэлементной модели $M_1 = \{0, a, 1\}$, где $0 + a = 0 + 1 = a + 1 = 1$, $\overline{0} = 1$, $\overline{a} = 0$, $\overline{1} = 0$ и выполняются законы коммутативности $x + y = y + x$ и идемпотентности $x + x = x$.

Независимость аксиомы (3) получаем с помощью пятиэлементной модели $M_2 = \{0, a_1, a_2, a_3, 1\}$, где $x + 1 = 1$, $a_i + a_j = 1$ при $i \neq j$, $\overline{0} = 1$, $\overline{a_1} = a_2$, $\overline{a_2} = a_3$, $\overline{a_3} = a_1$,. $\overline{1} = 0$ и выполняются аксиомы (1, 2) и закон идемпотентности $x + x = x$.

Продолжим доказательство теоремы 2. Введем следующие дополнительные аксиомы:

8) $x = \neg\neg x$;

9) $x = x + x$:

10) $x + 1 = 1$;

11) $(x + y)y = y$;

12) $x(y + z) = xy + xz$;

13) $x + (y + z) = (x + y) + z$;

14) $xy + x\overline{y}_b = x$.

Хантингтон в 1933 г. построил полную независимую систему аксиом $\mathfrak{B}_1$:

$$x + y = y + x,$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$xy + xy' = x,$$

$$xy = (\overline{x} + \overline{y})'.$$

Она состоит из аксиом (1, 13, 14, 4). Таким образом, система аксиом (1–4) различается с системой Хантингтона $\mathfrak{B}_1$ по двум аксиомам. Пусть $\mathfrak{A}_5$ — система, состоящая из аксиом (1–6, 8–13). Ее полнота очевидна. Например, аксиома (14) имеет такой вывод из аксиом (1–3, 8):

$$xy + x\overline{y} = \neg\neg(xy + x\overline{y}) = \neg\neg((\overline{x} + \overline{y})' + (\overline{x} + y'')') =$$

$$= \left(\overline{x} + (\overline{y} + y'')'\right)' = \left((\overline{y} + y'')' + \overline{x}\right)' = \neg\neg x = x.$$

Аксиома (7) легко выводима из аксиом (1, 3, 8). Действительно, пусть 1_v есть $v + \overline{v}$ для любой булевой формулы v. Тогда, используя аксиомы (1, 3, 8), получаем такой вывод:

$$1_x = \neg\neg 1_x = \neg(\neg 1_y + \neg 1_x) = \neg(\neg 1_x + \neg 1_y) = \neg\neg 1_y = 1_y.$$

Покажем, что тождества (8–13) выводимы из аксиом 1)–6). Одновременно будут доказаны некоторые вспомогательные тождества. Отметим, что в доказательстве полноты системы $\mathfrak{A}_1$ наиболее существенно доказательство выводимости аксиомы ассоциативности (13). Для этого вначале выводятся тождества $(x+y)y=y$ и $x(y+z)=xy+xz$. Затем выводится тождество $y+(x+y)=x+y$ и, наконец, тождество $(x+y)+(y+z)=x+(y+z)$. После этого аксиома (13) легко выводится. Доказательству тождества $(x+y)y=y$ предшествуют доказательства тождеств $x=0+x$, $x=\neg\neg x$, $x=x+x$, $x+1=1$. Способ построения этой цепочки тождеств и их доказательств был чисто синтаксическим, и поэтому он осуществим соответствующей программой автоматического доказательства тождеств.

Тождество $x=0+x$ следует из аксиом (2, 5).

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любой формулы* x *существует формула* w *такая, что выводимо тождество* $x=\neg w$.

Доказательство. Возьмем $w=(x+\bar{x})'+(x+\neg\neg x)'$. Тогда по аксиомам (1–3) получаем $\neg w=x+(x'+x'')'=(x'+x'')'+x=x$.

Ниже в случаях, когда в выводах используется формула w, будем считать, что w есть $(x+\bar{x})'+(x+\neg\neg x)'$.

Тождество $x=\neg\neg x$ выводимо:

$$x = 0+x = 0+(0+w)' = \left((0+\bar{0})'+(0+\bar{w})'\right)' =$$
$$= (\bar{1}+\neg\neg w)' = \neg\neg\neg w = \neg\neg x.$$

Тождество $x=x+x$ выводимо:

$$x = 0+x = x+0 = x+(w+x)' = \left((x+\bar{w})'+(x+\bar{x})'\right)' =$$
$$= \left((x+x)'+\bar{1}\right) = \left(\bar{1}+(x+x)'\right)' = \neg\neg(x+x) = x+x.$$

Тождество $x+1=1$ выводимо:

$$1 = x+(0+x)' = \left((x+\bar{0})'+(x+\bar{x})'\right)' = \left((x+1)'+\bar{1}\right) = \neg\neg(x+x) = x+1.$$

Тождество $(x+y)y=y$ выводимо:

$$y = y+0 = y+(w+1)' = \left((y+\bar{w})'+(y+\bar{1})'\right)' =$$
$$= \left((y+x)'+\bar{y}\right)' = (y+x)y = (x+y)y=y.$$

Докажем тождество $x\cdot 1=x$. Имеем

$$x(y+y') = \left(x'+(y+y')'\right)' = \left((y+y')'+x'\right)' = x'' = x.$$

Тождество $x(y+z)=xy+xz$ выводимо:

$$x(y+z) = \left(\bar{x}+(y+z)'\right)' = \neg\neg\left((\bar{x}+\bar{y})'+(\bar{x}+\bar{z})'\right) = xy+xz.$$

Тождество $y+(x+y)=x+y$ выводимо:

$$y+(x+y) = (x+y)y+(x+y) = (x+y)y+(x+y)1 =$$
$$= (x+y)(y+1) = (x+y)1 = x+y.$$

Докажем тождество $(x+y)+(y+z)=x+(y+z)$. Имеем

$$(x+y)+(y+z) = \left((x+y)+(y+z)\right)\cdot 1 = \left((x+y)+(y+z)\right)(x+\bar{x}) =$$
$$= \left((x+y)+(y+z)\right)x+\left((x+y)+(y+z)\right)\bar{x} =$$
$$= \left((x+y)x+(y+z)x\right)+\left((x+y)\bar{x}+(y+z)\bar{x}\right) =$$
$$= \left(x+(y+z)x\right)+\left((x\bar{x}+y\bar{x})+(y+z)\bar{x}\right) =$$

$$= (1 \cdot x + (y+z)x + ((0 + y\overline{x}) + (y+z)\overline{x}) =$$
$$= (1 + (y+z))x + (y\overline{x} + (y+z)\overline{x}) =$$
$$= x + (y + (y+z))\overline{x} = x + (y+z)\overline{x} = x + ((y+z)' + \neg\neg x)' =$$
$$= x + ((y+z)' + x)' = ((x + \neg\neg(y+z))' + (x + \overline{x})')' =$$
$$= ((x + (y+z))' + 0)' = \neg\neg(x + (y+z)) = x + (y+z).$$

Отсюда получаем такой вывод для аксиомы ассоциативности:

$$x + (y+z) = (x+y) + (y+z) = (z+y) + (y+x) = z + (y+z) = (x+y) + z.$$

Теорема 2 доказана.

Воспользуемся тем, что аксиомы (4–6) служат определениями для конъюнкции, нуля и единицы. Действуя аналогично процедуре исключения в выводах вспомогательных определяемых функциональных и предикатных символов [6], получаем, что из системы $\mathfrak{A}_1$ образуется восемь полных и независимых подсистем путем вычитания произвольного подмножества множества аксиом (4–6). Заметим, что при этом используется следующий факт. Тождество $(x + x')' = (y + y)'$ выводимо из аксиом (1, 2), и отсюда тождество $x + x' = y + y'$ выводимо из аксиом (1–3) с помощью тождества $x = \neg\neg x$. Последнее выводимо из аксиом (1–3), как показано выше. (Что касается использования символов 0 и 1, то они в выводе $x = \neg\neg x$ выполняют фактически лишь роль обозначений.) Это показывает, что хотя с помощью аксиом (5, 6) выводимы тождества $x + x' = y + y'$ и $(x + x')' = (y + y')'$, при наличии аксиом (1–3) добавление аксиом (4–6) не ведет к расширению списка выводимых тождеств относительно формул в сигнатуре $\neg, \vee$.

Из полноты системы $\mathfrak{A}_3$ следует полнота системы $\mathfrak{A}_6$:

1) $\neg\neg x = x$;

2) $\neg(y + \overline{y}) + x = x$;

3) $x + \neg(y+z) = \neg(\neg(x + \overline{z}) + \neg(x + \overline{y}))$.

Действительно, пусть $0 = \neg(u + \overline{u})$. Тогда

$$\neg(y+z) = 0 + \neg(y+z) = \neg(\neg(0 + \overline{z}) + \neg(0 + \overline{y})) =$$
$$= \neg(\neg\neg z + \neg\neg y) = \neg(z+y).$$

Отсюда с помощью аксиомы (1) получаем $y + z = z + y$.

Из полноты системы $\mathfrak{A}_3$ следует полнота системы $\mathfrak{A}_7$:

1) $\neg\neg x = x$;

2) $x + \neg(y + \overline{y}) = x$;

3) $x + \neg(y+z) = \neg(\neg(\overline{z} + x) + \neg(\overline{y} + x))$.

Действительно, пусть $0 = \neg(u + \overline{u})$. Тогда можно последовательно вывести такие тождества:

$$x = x + \neg(x + \overline{x}) = \neg(\neg(\overline{\overline{x}} + x) + \neg(\overline{x} + x)) = \neg\neg(x + x) = x + x,$$
$$0 + \neg(x + x) = \neg x, \quad 0 + y = y, \quad \neg(y+z) = 0 + \neg(y+z) = \neg(z+y),$$

и отсюда $y + z = z + y$.

Из полноты системы $\mathfrak{A}_2$ следует полнота системы $\mathfrak{A}_8$:

1) $x + y = y + x$;

2) $y\overline{y} + x = x$;

3) $xy = \neg(\overline{x} + \overline{y})$;

4) $x + \neg(y+z) = (x + \overline{y})(x + \overline{z})$.

Пусть $\mathfrak{A}_9$ — система, состоящая из аксиом (1–3) системы $\mathfrak{A}_8$ и аксиомы

4′) $x+yz = (x+y)(x+z)$.

Теорема 3. *Система* $\mathfrak{A}_9$ *полна.*

Доказательство сводится в основном к выводу тождества $\neg\neg x = x$. Для этого вначале по x строится w такое, что выводимо тождество $x = \neg w$. Затем, положив $0 \equiv x_1\bar{x}_1$, $1_v \equiv v + \bar{v}$, $1 \equiv 1_{x_1\bar{x}_1}$, можно последовательно вывести такие тождества:

$$x\bar{x} = y\bar{y}, \quad \bar{1}_x = 0, \quad 1_x \cdot 0 = 0, \quad (x+1_y)x = x, \quad \neg\neg x = x \cdot 1_y,$$

$$\neg\neg(\bar{w} + 1_y) = \bar{w} + w1_y = 1_{\bar{w}}, \quad \neg\neg(x+x) = x + x\bar{x} = x,$$

$$(x+1_y)\cdot 1_z = 1_x, \quad \bar{0} = 1, \quad 1_x \cdot 1_y = 1,$$

$$1+1 = 1+1\cdot 1 = (1+1)(1+1) = \neg\left(\overline{1+1}+\overline{1+1}\right),$$

$$\overline{1+1} = \neg\bar{0}+\bar{0} = 0\cdot 0, \quad 0\cdot 0+0\cdot 0 = (0\cdot 0)\cdot(0\cdot 0), \quad \neg\neg(1+1) = 1,$$

$$\overline{1+1} = \neg(\neg\neg(1+1)+\neg\neg(1+1)) = \overline{1+1}\cdot\overline{1+1} = \overline{1+1}+\overline{1+1},$$

$$1 = \neg\neg(1+1) = \neg\left(\overline{1+1}+\overline{1+1}\right) = (1+1)(1+1) = 1+1,$$

$$1+x\cdot 1 = (1+x)(1+1) = (x+1)\cdot 1 = 1_x$$

(далее при $y = \neg\neg x$) $\neg\neg y = 1_x \cdot y = (1+y)y = y$.

Из полноты системы $\mathfrak{A}_9$ следует полнота системы $\mathfrak{A}_{10}$:

1) $x+y = y+x$;

2) $\neg(y+\bar{y}) + x = x$;

3) $xy = \neg(\bar{x}+\bar{y})$;

4) $x+yz = (x+y)(x+z)$.

1. *Huntington E. V.* Sets of independent postulates for the algebra of logic // Trans. Amer. Math. Soc. – 1904. – **5**. – P. 288–309.
2. *Huntington E. V.* New sets of postulates for the algebra and logic, with special reference to Whitehead and Russell's Principia Mathematica // Ibid. – 1933. – **35**. – P. 274–304; Corrections // Ibid. – 1933. – **35**. – P. 557–558. – P. 971.
3. *Столл Р.* Множества, логика, аксиоматические теории. – М.: Просвещение, 1968. – 231 с.
4. *Gerrish F.* The independence of Huntington's axioms for Boolean algebra // Math. Gazette. – 1978. – **62**. – № 419. – P. 35–40.
5. *Общая* алгебра / Под ред. Л. А. Скорнякова. – М.: Наука, 1991. – Т. 2. – 480 с.
6. *Шенфилд Дж.* Математическая логика. – М.: Наука, 1975. – 528 с.

Получено 03.04.96