УДК 517.946.9

О. М. Боярський, Т. В. Скрипник (Ін-т теорет. фізики НАН України, Київ)

ВИРОДЖЕНІ ОРБІТИ ПРИЄДНАНОГО ПРЕДСТАВЛЕННЯ ОРТОГОНАЛЬНИХ ТА УНІТАРНИХ ГРУП ЯК АЛГЕБРАЇЧНІ ПІДМНОГОВИДИ*

We suggest a method for describing some types of singular orbits of orthogonal and unitary groups in the corresponding Lie algebras as level surfaces of special collection of polynomial functions. This method allows to describe the orbits of types $SO(2n)/SO(2k)\times SO(2)^{n-k}$, $SO(2n+1)/SO(2k+1)\times SO(2)^{n-k}$, and $(S)U(n)/(S)(U(2k)\times U(2)^{n-k})$ in $so(2n)$, $so(2n+1)$, and $(s)u(n)$, respectively. Moreover, we show that the orbits of minimal dimensions of groups under consideration can be described in the corresponding algebras as intersections of quadrics. In particular, this approach is used to describe the orbit $CP^{n-1}\subset u(n)$.

Описано деякі типи вироджених орбіт ортогональних та унітарних груп у відповідній алгебрі Лі як поверхні рівня спеціального набору поліноміальних функцій. Даний метод дозволяє описати орбіту типу $SO(2n)/SO(2k)\times SO(2)^{n-k}$, $SO(2n+1)/SO(2k+1)\times SO(2)^{n-k}$ та $(S)U(n)/(S)(U(2k)\times U(2)^{n-k})$ в $so(2n)$, $so(2n+1)$ і $(s)u(n)$ відповідно. Крім того, показано, що орбіти мінімальних розмірностей даних груп можуть бути описані у відповідній алгебрі як перетин квадрик. Зокрема, таким чином описується орбіта $CP^{n-1}\subset u(n)$.

Вступ. Група Лі, діючи в алгебрі приєднаним чином, розшаровує її на орбіти. У випадку компактної групи Лі невироджені орбіти (орбіти максимальної розмірності) є фактор-просторами цієї групи за максимальним тором [2]. Вони також є алгебраїчними підмноговидами у відповідній алгебрі Лі [1], які задаються поверхнями рівня повного набору поліноміальних функцій (з деякими уточненнями цей факт справедливий для довільної групи Лі [3]).

Вироджені орбіти (орбіти немаксимальної розмірності) компактних груп Лі також описані [4]: всі вони є компактними келеровими многовидами. Однак опис цих орбіт як алгебраїчних підмноговидів у відповідній алгебрі Лі не відомий. Це питання є важливим для теорії інтегровних систем на орбітах скінченновимірних груп Лі.

У цій роботі ми розв'язуємо задачу про задання вироджених орбіт ортогональних та унітарних груп типу $SO(2n)/SO(2k)\times SO(2)^{n-k}$, $SO(2n+1)/SO(2k+1)\times SO(2)^{n-k}$ та $(S)U(n)/(S)(U(2k)\times U(2)^{n-k})$ як алгебраїчних підмноговидів у відповідній алгебрі Лі.

Вироджені орбіти для своєї фіксації потребують більшого числа поліноміальних функцій, ніж існує функціонально незалежних інваріантів. Ми показуємо, що необхідні для цього додаткові поліноми є наборами коваріантів, кожен з яких при обмеженні на відповідну орбіту стає інваріантом. А це означає, що для гамільтонових систем на вироджених орбітах ці функції завжди будуть додатковими геометричними інваріантами. Отже, цей результат може бути використаний в теорії інтегровних систем. Ми сподіваємося також, що він буде корисним у теорії геометричного квантування [2] і в теорії представлень.

Автори висловлюють вдячність П. І. Голоду та А. У. Клімику за змістовне обговорення.

1. Функції Казиміра та інваріантні підмноговиди ортогональних груп. У цьому пункті буде показано, що незалежні примітівні поліноміальні інваріанти ортогональних груп можуть бути подані у вигляді суми повних квадратів многочленів спеціального вигляду (пфафіанів). Використовуючи цей факт, ми отримуємо цілу серію умов виродження для орбіт приєднаного представлення.

* Робота частково підтримана грантом № 142CRDF.

Нехай $X \in so(d) = \{X \in \mathrm{Mat}(d, R) \mid X + X^T = 0\}$,

$$X = \begin{vmatrix} 0 & x_{12} & \dots & \dots & x_{1d} \\ -x_{12} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & x_{d-1d} \\ -x_{1d} & \dots & \dots & -x_{d-1d} & 0 \end{vmatrix}.$$

З'ясуємо структуру функцій Казиміра ортогональних груп. Доцільно за повний набір інваріантів вибрати коефіцієнти характеристичного многочлена $\{p_k\}$:

$$\det(X - \lambda I) = \sum_{k=0}^{d} p_k \lambda^{d-k}.$$

Ці інваріанти пов'язані з „трейсовими" інваріантами $S_k = \mathrm{Tr}\, X^k / k$ відомою формулою [5]

$$p_k = -\frac{1}{k}\left(S_k + \sum_{i=1}^{k-1} S_{k-i} p_i\right).$$

Справедлива наступна лема.

Лема 1. *Нехай $X \in so(d)$, p_k — коефіцієнти характеристичного полінома; $\left|\overline{X}^{i_1 i_2 \dots i_k}_{i_1 i_2 \dots i_k}\right|$ — головний доповнювальний мінор матриці X до елементів (i_1, i_1), (i_2, i_2), … (i_k, i_k), $Pf_{i_1 i_2 \dots i_k}(X)$ — однорідні поліноми порядку l $(d - k = 2l)$:*

$$\mathrm{Pf}_{i_1 i_2 \dots i_k} = \left(\left|\overline{X}^{i_1 i_2 \dots i_k}_{i_1 i_2 \dots i_k}\right|\right)^{1/2}.$$

Тоді $p_{d-k} = 0$, коли $d - k = 2l + 1$:

$$p_{d-k} = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le d} \mathrm{Pf}^2_{i_1 i_2 \dots i_k},$$

коли $d - k = 2l$.

Для доведення леми встановимо наступне твердження.

Твердження 1. *Для будь-якого $A \in \mathrm{Mat}(d, R)$ виконується співвідношення*

$$\det A = \sum_{k=0}^{d} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le d} a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \dots a_{i_k i_k} \left|\overline{M}^{i_1 i_2 \dots i_k}_{i_1 i_2 \dots i_k}\right|,$$

$\left|\overline{M}^{i_1 i_2 \dots i_k}_{i_1 i_2 \dots i_k}\right|$ — головний доповнювальний мінор до елементів (i_1, i_1), (i_2, i_2), … …, (i_k, i_k) матриці $M_{ij} = a_{ij} - a_{ii}\delta_j$.

Доведення. Нехай $p\{1 \dots d\}$ — довільна перестановка елементів $\{1 \dots d\}$. Тоді

$$\det A = \sum_{p \in S_n,\, \{i_1, \dots, i_d\} = p\{1, \dots, d\}} (-1)^{\delta(p)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \dots a_{d i_d} =$$

$$= \sum_{k=0}^{d} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le d} a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \dots a_{i_k i_k} \sum_{\{i_s, \dots, i_q\} = p'\{1, \dots, d\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}}^{p' \in \bar{\tilde{S}}_{d-k}} (-1)^{\delta(p')} a_{s i_s} \dots a_{q i_q},$$

$\tilde{S}_{d-k} \subset S_{d-k}$ — множина перестановок в S_{d-k}, що не мають нерухомих елементів.

Тут ми переписали стандартну формулу детермінанта так, щоб у внутрішній сумі не було діагональних матричних елементів. При цьому ми фактично здійснили розбиття групи перестановок на множини перестановок, що мають по k нерухомих елементів.

Нехай δ — функція парності перестановки $(i_1, \ldots i_d)$. Оскільки очевидно, що $\delta(i_1, \ldots i_{j-1}, j, i_{j+1} \ldots i_d) = \delta(i_2, \ldots i_{j-1}, i_{j+1} \ldots i_d)$, то, зробивши заміну $m_{ij} = a_{ij} - a_{ii}\delta_j$, маємо

$$\det A =$$

$$= \sum_{k=0}^{d} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le d} a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \ldots a_{i_k i_k} \sum_{\{i_s, \ldots, i_q\} = p\{1, \ldots d\} \setminus \{i_1, \ldots i_k\}}^{p \in \tilde{S}_{d-k}} (-1)^{\delta(p')} m_{s i_s} \ldots m_{q i_q}.$$

Звідси за визначенням головного доповнювального мінора одержимо

$$\det A = \sum_{k=0}^{d} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le d} a_{i_1 i_1} a_{i_2 i_2} \ldots a_{i_k i_k} \left| \overline{M}_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k} \right|.$$

Доведене твердження дозволяє обчислювати характеристичний поліном довільної матриці. Особливо зручно ним користуватися, коли матриця A бездіагональна. У цьому випадку випадку справедливий наступний результат.

***Наслідок* 1.** *Якщо* $(A)_{ii} = 0$, $A \in \mathrm{Mat}(d, R)$, p_{d-k} — *коефіцієнти характеристичного полінома,*

$$\Delta(A, \lambda) = \det(A - \lambda I) = \sum_{k=0}^{d} p_{d-k} \lambda^k,$$

то

$$p_{d-k} = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le d} \left| \overline{A}_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k} \right|,$$

де $\left| \overline{A}_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k} \right|$ — *головний доповнювальний мінор до елементів* (i_1, i_1), (i_2, i_2), $\ldots$ (i_k, i_k) *матриці* A.

Доведення. Поклавши у формулі для детермінанта $a_{ii} = -\lambda$ і врахувавши, що $(M)_{ij} \equiv (A)_{ij}$, одержимо

$$\Delta(A, \lambda) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \lambda^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le d} \left| \overline{A}_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{i_1 i_2 \ldots i_k} \right|.$$

Тепер для доведення леми достатньо зауважити, що для кососиметричної матриці X $\det(X) = 0$, якщо $d = 2n + 1$, або $\det(X) = \mathrm{Pf}^2(X)$, якщо $d = 2n$, де

$$\mathrm{Pf}(X) = \sum_{i_1 < i_2; i_3 < i_4; \ldots; i_{n-1} < i_n; i_1 < i_3 < \ldots < i_{n-1}} (-1)^{\delta(p)} x_{i_1 i_2} x_{i_3 i_4} \ldots x_{i_{n-1} i_n}.$$

Оскільки матриця, одержана з матриці X викреслюванням $i_1, \ldots i_k$ рядків і стовпців, є також кососиметричною, то її детермінат теж буде повним квадратом полінома спеціального вигляду — пфафіана $\mathrm{Pf}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$. Застосовуючи тепер наслідок 1, одержуємо твердження леми 1.

Примітка. Якщо $p_{d-k}(X) = 0$, то $p_{d-k+i}(X) = 0$ при $i = 1, \ldots, k$, що є наслідком леми 1 та того простого факту, що для пфафіанів $(m+1)$-го порядку існує розклад за елементами рядка чи стовпчика на відповідні „доповнювальні" пфафіани порядку m [6].

Отже, множина нулів коефіцієнтів характеристичного полінома належить тій „множині міри нуль", на якій вони стають залежними. Звідси, зокрема, випливає, що орбіта, яка описується цими значеннями функцій Казиміра, є виродженою або, іншими словами, має немаксимальну розмірність. Це випливає також з леми 1, враховуючи дійсність розглядуваних алгебр.

Наслідок 2. *Рівняння $p_{d-k}(X) = 0$ приводить до ще C_d^k алгебраїчних рівнянь:*

$$\mathrm{Pf}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(X) = 0, \quad 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le d. \tag{*}$$

Доведення. Оскільки $p_{d-k}(X)$ є сумою повних квадратів дійсних доданків, то умова $p_{d-k}(X) = 0$ автоматично веде до рівності нулю кожного з них.

Отже, при умові $p_{d-k}(X) = 0$ за допомогою інваріантних функцій фіксується підмноговид корозмірності, більшої за ранг відповідної алгебри: з необхідністю виконуються ще рівняння системи (*). Але щоб використати систему (*) для класифікації вироджених орбіт як алгебраїчних підмноговидів, вкладених у відповідну алгебру, необхідно довести, що ця система має інваріантний характер (адже кожна функція $\mathrm{Pf}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ окремо взята не є інваріантною).

Лема 2. *Нехай*

$$P = \{X \in so(d) \mid \mathrm{Pf}_{i_1 i_2 \ldots i_k}(X) = 0, 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le d\}.$$

Тоді P — Ad-інваріантний підмноговид в $so(d)$.

Для доведення цієї леми нам буде необхідний наступний результат.

Твердження 2. *На поверхні P функції $\mathrm{Pf}_{l_1 l_2 \ldots l_k}$ є функціями Казиміра, тобто комутують з кожним елементом алгебри стосовно дужки Пуассона*:*

$$\left\{x_{ij}, \mathrm{Pf}_{l_1 l_2 \ldots l_k}(X)\right\}\Big|_P = 0$$

$$\forall\, i, j \in 1, \ldots, d, \quad \forall\, k \in 0, \ldots, d; \quad \forall\, l_1 \ldots l_k \in 1, \ldots, d.$$

Використовуючи комутаційні співвідношення

$$\{x_{ij}, x_{kl}\} = \delta_{jk} x_{il} - \delta_{jl} x_{ik} + \delta_{il} x_{jk} - \delta_{ik} x_{jl}$$

можна переконатися, що існують три різні випадки:

1) $(i,j) \subset \{l_1, \ldots l_k\} \Rightarrow \{x_{ij}, \mathrm{Pf}_{l_1 l_2 \ldots l_k}(X)\} = 0.$

($\mathrm{Pf}_{l_1 l_2 \ldots l_k}(X)$ не залежить від тих x_{kl}, з якими x_{ij} не комутує.)

2) $(i,j) \not\subset \{l_1, \ldots l_k\} \Rightarrow \{x_{ij}, \mathrm{Pf}_{l_1 l_2 \ldots l_k}(X)\} = 0.$

(У цьому випадку $x_{ij} \in so(d-k)$, для якої $\mathrm{Pf}_{l_1 l_2 \ldots l_k}(X)$ — функція Казиміра.)

3) $j \in \{l_1, \ldots, l_k\}$, $i \notin \{l_1, \ldots, l_k\}$. Нехай $j = l_p$. Тоді

$$\{x_{ij_p}, \mathrm{Pf}_{l_1 l_2 \ldots l_p \ldots l_k}(X)\} = \pm\, \mathrm{Pf}_{l_1 l_2 \ldots \bar{l}_p i \ldots l_k}(X),$$

що перевіряється безпосереднім обчисленням. Твердження доведене.

---

*$\{\ ,\ \}$ — дужка Лі–Пуассона: якщо x_i — координата елемента $X \in \mathfrak{g}$, розглядувана ак лінійна функція на $\mathfrak{g}$, то на лінійному просторі $\mathrm{Span}\{x_i\}$ визначена $\{\ ,\ \}$ — дужка Лі–Пуассона $\{x_i, x_j\} = c_{ij}^k x_k$, c_{ij}^k — структурні константи алгебри $\mathfrak{g}$.

Звідси випливає, зокрема, що $\tilde{X}_{ij}\,\mathrm{Pf}_{l_1 l_2 \ldots l_k}(X)\big|_P = 0$; $\tilde{X}_{ij}$ — приєднані векторні поля. Тому $\exp\left(\tau \tilde{X}_{ij}\right)\mathrm{Pf}_{l_1 l_2 \ldots l_k}(X)\big|_P = 0$. Отже, з рівнянь $\mathrm{Pf}_{i_1 \ldots i_k}(X) = 0$ випливають рівняння $\mathrm{Ad}_g \cdot \mathrm{Pf}_{i_1 \ldots i_k}(X) = 0$ для всіх $g \in G$, тобто якщо $X \in P$, то $\mathrm{Ad}_g \cdot X \in P$, що й доводить лему 2.

Примітка. Інваріантний підмноговид P, що задається системою рівнянь $(*)$, є особливою поверхнею в $\mathfrak{g}$: ранг системи $(*)$ менший, ніж C_d^k.

Для ідентифікації отриманих інваріантних підмноговидів як сукупності деяких G-орбіт в $\mathfrak{g}$ необхідні викладені нижче теоретико-групові міркування.

2. Вироджені орбіти ортогональних груп. Як відомо, для компактних груп Лі існує взаємооднозначна відповідність між орбітами приєднаного представлення і точками камери Вейля. Причому виродженим орбітам при цій біекції відповідають точки на стінках камери Вейля.

Оскільки ортогональні групи компактні, то до них застосовні попередні міркування, з яких випливає, зокрема, твердження, що кожна орбіта проходить через підалгебру Картана. Тому обмеживши $(*)$ на підалгебру Картана, ми знайдемо, в яких точках інваріантний підмноговид P її перетинає. Це дозволить ототожнити побудований підмноговид із сукупністю вироджених орбіт приєднаного представлення.

Твердження 3. *$SO(d)$-інваріантний підмноговид P в $so(d)$, що задається системою рівнянь $(*)$, яка у випадках 1) $d = 2n$ і 2) $d = 2n+1$ має вигляд*

1) $\left\{\mathrm{Pf}_{i_1 \ldots i_{2k}}(X) = 0;\ 1 \le i_1 < \ldots < i_{2k} \le d;\ d = 2n;\right.$

2) $\left\{\mathrm{Pf}_{i_1 \ldots i_{2k+1}}(X) = 0;\ 1 \le i_1 < \ldots < i_{2k+1} \le d;\ d = 2n+1,\right.$

проходить через точки $\vec{H} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *з* $a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots a_{i_{k+1}} = 0$.

Доведення зводиться до простого обмеження рівнянь $(*)$ на підалгебру Картана. Виберемо її у вигляді підалгбри антидіагональних матриць

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_2 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & -a_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix} \in \eta .$$

Можна показати, що при цьому отримується наступна система рівнянь:

$$a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_{n-k}} = 0, \qquad 1 \le i_1 < \ldots < i_{n-k} \le d.$$

Звідси випливає, що деякі $k+1$ координат елемента H рівні нулю.

Твердження 4. *Через точки* $\vec{H}_{\sin g} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots a_{i_k} = 0$, $a_j \ne 0$ *при* $j \notin \{i_1 \ldots, i_k\}$, *проходять орбіти груп* $SO(d)$, *ізоморфні як многовиди фактор-просторам:*

1) $SO(2n)/SO(2k) \times SO(2)^{n-k}$, $d = 2n$;

2) $SO(2n+1)/SO(2k+1) \times SO(2)^{n-k}$, $d = 2n+1$.

Для доведення цього факту необхідно показати, що стабілізаторами точок $\vec{H}_{\sin g}$ є підгрупи

$$SO(2k) \times SO(2)^{n-k},\ d = 2n, \quad \text{або} \quad SO(2k+1) \times SO(2)^{n-k}, \quad d = 2n+1,$$

відповідно. Для цього достатньо зауважити, що з елементами $x_{ij} \in \mathfrak{g}^*$ не комутують стосовно дужки Лі–Пуассона лише ті координатні функції, що попадають у рядки та стовпці з номерами i та j відповідно (вони зображені на малюнку штриховими лініями):

$$X = \begin{vmatrix} & | & & | & \\ — & — & — & x_{ij} & — \\ — & x_{ij} & — & | & — \\ & | & & | & \\ & | & & | & \\ & | & & | & \end{vmatrix}.$$

Тепер, не зменшуючи загальності, покладемо $i_1 = n$, $i_k = n - 1 - k$. Тоді з попередніх міркувань випливає, що підалгебра, заповнена зірочками на малюнку, стабілізує елемент $\vec{H}_{\sin g}$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & n-k+1 & & n+k-1 & \end{array} \\ X = \begin{vmatrix} & & | & & | & \\ — & — & * & * & * & — \\ & & * & * & * & \\ — & — & * & * & * & — \\ & & | & & | & \\ & & | & & | & \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ n-k+1 \\ \\ n+k-1 \\ \\ \\ \end{array}. \end{array}$$

Звідси випливає, що у випадку $d = 2n$ стабілізатором є підалгебра $so(2k)$, а у випадку $d = 2n+1$ — підалгебра $so(2k+1)$. Крім того, очевидно, що в стабілізатор входить ще й „залишок" підалгебри Картана, породжений елементами $\vec{H} = (a_1, \ldots, a_{n-k}, 0, 0, \ldots, 0)$, тобто $so(2)^{n-k}$, що й доводить твердження.

Припустимо, що $p_{2n-2k} = 0$, $p_{2n-2k-2} = c_{2n-2k-2} \neq 0$, і додамо до системи $(*)$ решту ненульових варіантів:

$$p_2 = c_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_{2n-2k-2} = c_{2n-2k-2},$$

$$\mathrm{Pf}_{i_1 i_2 \ldots i_l}(X) = 0, \qquad 1 \leq i_1 < \ldots < i_l, \tag{**}$$

$$l = 2k, \quad d = 2n,$$

$$l = 2k+1, \quad d = 2n+1.$$

Обмежимо систему $(**)$ на картанівську підалгебру. З твердження 3 випливає, що $k+1$-ша координата на ній при цьому рівна нулю, тому решта координат однозначно фіксуються $n-k-1$ ненульовими інваріантами. Оскільки множина розв'язків системи $(*)$, обмеженої на підалгебру Картана, так само як і

* x_{ij} розглядаються як елементи дуального до $\mathfrak{g}$ простору лінійних функцій.

функції Казиміра, інваріантна відносно групи Вейля, то розв'язки системи (**), обмеженої на картанівську підалгебру, можуть бути переведені один в одного перетвореннями з групи Вейля. А це означає, що система (**) задає єдину орбіту, опис якої дає твердження 4. Тобто ми довели наступну теорему.

Теорема 1. *Приєднані орбіти групи* $SO(d)$ *типу:*

1) $SO(2n)/SO(2(k+1)) \times SO(2)^{n-k-1}$, $d=2n$;

2) $SO(2n+1)/SO(2(k+1)+1) \times SO(2)^{n-k-1}$, $d=2n+1$,

задаються в алгебрі $so(d)$ *системою рівнянь вигляду*

$$p_2(X) = c_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_{2n-2k-2}(X) = c_{2n-2k-2},$$

$$\mathrm{Pf}_{i_1 i_2 \ldots i_l}(X) = 0, \quad 1 \le i_1 < \ldots < i_l \le d,$$

$$l = 2k, \quad d = 2n,$$

$$l = 2k+1, \quad d = 2n+1.$$

Тут $p_2, p_4, \ldots p_{2[d/2]}$ *— повний набір інваріантів її приєднаного представлення, вибраний у вигляді коефіцієнтів характеристичного многочлена матриці* X, $X_{i_1 i_2 \ldots i_l}$ *— матриця, утворена з матриці* X *викреслюванням* $i_1, \ldots i_l$ *рядків та стовпців,* $\mathrm{Pf}_{i_1 i_2 \ldots i_l}(X) = \left(\det X_{i_1 i_2 \ldots i_l}\right)^{1/2}$.

***Наслідок* 3.** *Орбіти мінімальної розмірності груп* $SO(d)$, $d \neq 4, 6$, *можуть бути задані в* $so(d)$ *як перетин квадрик.*

Доведення. З попередньої теореми випливає, що орбіти $SO(d)/SO(d-2) \times \times SO(2)$ фіксуються квадратичним інваріантом та набором квадратичних пфафіанів. Як показано в роборі [7], вони і є орбітами мінімальних розмірностей (за винятком випадку $d=4, 6$).

Примітка. Виключення випадків $d = 4, 6$ пов'язане з ізоморфізмами малих розмірностей, а саме з тим, що $so(4) \approx so(3) \oplus so(3)$, $so(6) \approx su(4)$. Тому в цих випадках орбіти $SO(d)/SO(d-2) \times SO(2)$ не є орбітами мінімальних розмірностей. Ними є орбіти $SO(6)/S(U(3) \times U(1))$ і $SO(4)/SO(3) \times \times SO(2)$ відповідно.

Даний метод допускає перенесення на унітарні та спеціальні унітарні групи.

3. Вироджені орбіти унітарних груп. Як відомо, $u(n) \approx SO(2n) \bigcap sp(n, R)$, довільний елемент $Z \in u(n)$, $Z = X + iY$, $X \in SO(n)$, $Y \in \mathrm{Symm}(n, R)$, може бути поданий у вигляді

$$r(Z) = \begin{vmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{vmatrix}.$$

Обмежуючи інваріанти групи $SO(2n)$ на $u(n)$, ми дістаємо n незалежних поліноміальних інваріантів групи $U(n)$. Знайдемо зв'язок між цими інваріантами унітарної групи і її повним набором примітивних інваріантів, вибраних у вигляді коефіцієнтів характеристичного многочлена. Справедливе наступне твердження.

Твердження 5. *Нехай*

$$\Delta(r(Z), \lambda) = \sum_{k=0}^{n} p_{2(n-k)}(r(Z))\lambda^{2k}, \quad \Delta(Z, \lambda) = \sum_{k=0}^{n} p^c_{(n-k)}(Z)\lambda^k.$$

Тоді .

1) $p^c_{(n-k)}(z) = (-1)^{(n-k)/2} p_{(n-k)}(z), \; p_{(n-k)} \in R$;

2) $p_{2(n-k)}(r(Z)) = \sum\limits_{1 \le i, j \le n;}^{n} (-1)^{i+j} p_i(Z) p_j(Z).$

Доведення. Оскільки

$$p^c_k(Z) = \sum_{1 \le i_1 \ldots i_k \le n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_k},$$

де λ_i — власне число матриці Z, і матриця Z антиермітова, то $\lambda_i = \sqrt{-1} a_i$, $a_i \in R$, що й доводить першу частину твердження;

$$\det(r(Z) - \lambda) = \det(r(Z - \lambda)) =$$
$$= |\det(Z - \lambda)|^2 \Rightarrow \Delta(r(Z), \lambda) = \Delta(Z, \lambda) \overline{\Delta}(Z, \lambda),$$

звідки випливає доведення другої частини твердження.

Перенесемо тепер результати, отримані для ортогональних груп, на унітарний випадок.

Теорема 2. *Приєднані орбіти групи* $U(n)$ *типу* $U(n)/U(k+1) \times U^{n-k-1}(1)$, *що перетинають підалгебру Картана у точках* $\bar{H}_{\sin g}$ *з* $a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots a_{i_{k+1}} = 0$, *задаються в алгебрі* $u(n)$ *системою рівнянь вигляду**

$$p_2(r(Z)) = c_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (***)$$
$$p_{2n-2k-2}(r(Z)) = c_{2n-2k-2},$$
$$\mathrm{Pf}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}}(r(Z)) = 0, \quad 1 \le i_1 < \ldots < i_{2k} \le n.$$

Тут $Z \in u(n)$, $p_2(r(Z)), p_4(r(Z)), \ldots, p_{2n}(r(Z))$ — повний набір інваріантних функцій, вибраних у вигляді коефіцієнтів характеристичного многочлена матриці $r(Z)$, $r(Z)_{i_1 i_1 \ldots i_l}$ — матриця, утворена з матриці $r(Z)$ викреслюванням $i_1, \ldots, i_l$ рядків та стовпців $\mathrm{Pf}_{i_1 i_2 \ldots i_l}(r(Z)) = (\det r(Z)_{i_1 i_1 \ldots i_l})^{1/2}$.

Доведення. Для ототожнення поверхні рівня системи рівнянь (***) із вказаною орбітою підалгебру Картана в алгебрі $so(2n)$ виберемо у вигляді підалгебри блочно-діагональних матриць

$$H = \left| \begin{array}{cccccc} 0 & \ldots & 0 & a_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & a_n \\ -a_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -a_n & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right|$$

Очевидно, що ніякі міркування в доведенні теореми 1 не зміняться. Зокре-

* Приєднані орбіти групи $U(n)$ типу $U(n)/U(k+1) \times U^{n\,k-1}(1)$ перетинають підалгебру Картана у точках з $a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots a_{i_{k+1}} = a$, де a — довільне додатне число. Вимога $a = 0$ в умові теореми пов'язана з використанням вкладення $r: u(n) \to so(2n, R) \cap sp(n, R)$.

ма, твердження 3 п. 2 залишиться справедливим і в цьому випадку, тобто з системи (***) випливатиме, що $a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots a_{i_{k+1}} = 0$. Оскільки $\eta = r(\eta')$, де

$$\eta' = \begin{vmatrix} ia_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & ia_n \end{vmatrix}$$

— підалгебра Картана стандартної реалізації алгебри $u(n)$ косоермітовими матрицями, то стабілізатором точки $\bar{H}_{\sin g} = (0, 0, \ldots, ia_{n-k-1}, \ldots, ia_n)$, яка є розв'язком системи (***), обмеженої на підалгберу Картана, є підгрупа $U(k+$ $+1) \times U(1)^{n-k-1}$. Це доводить теорему.

Примітка. На відміну від ортогонального випадку не всі поліноми $\mathrm{Pf}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}}(r(Z))$. будуть функціонально незалежними. Це пояснюється „вищою симетрією" матриці $r(Z) \in so(2n)$ порівняно з довільною матрицею $X \in$ $\in so(2n)$. Тобто кількість незалежних рівнянь у системі (2) менша ніж C_n^k.

***Наслідок* 4.** *Проективний простір CP^{n-1} може бути заданий в $u(n)$ за допомогою системи квадратичних рівнянь.*

Доведення випливає з теореми 2 і проводиться аналогічно доведенню наслідку 3, враховуючи, що $CP^{n-1} \approx U(n)/U(n-1) \times U(1)$.

Зрозуміло, що аналогічне вкладення можна здійснити і для спеціальних унітарних груп. При цьому справедливими залишаться всі попередні твердження за одним винятком: система „квадратичних пфафіанів" буде задавати лише нульову орбіту, Дійсно, як випливає з теореми 2, нуль „квадратичних пфафіанів" при обмеженні на підалгебру Картана з необхідністю дає рівняння $a_{i_1} =$ $= a_{i_2} = \ldots a_{i_{n-1}} = 0$. Але для

$$su(n): \sum_{1 \le i \le n} a_i = 0,$$

звідки $a_i = 0$, $1 \le i \le n$, тобто орбіта проходить через нуль, а отже, з ним співпадає. Це цілком узгоджується з тим фактом, що $\operatorname{rank} SU(n) = n-1$, в той час як $\operatorname{rank} SO(2n) = n$, звідки випливає, що серед n інваріантів $p_i(r(Z))$, $Z \in$ $\in su(n)$, є лише $n-1$ незалежних. А оскільки кількість різних типів вироджених орбіт, що фіксуються описаним методом, рівна кількості цих незалежних інваріантів, то цілком очевидно, що даним методом не відстежується (додатково до тих орбіт, які не відстежувались і для унітарних груп) ще одна вироджена орбіта спеціальної унітарної групи, а саме: як було показано вище, орбіта мінімальної розмірності CP^{n-1}.

4. Додаток.

***Приклад* 1. $SO(5)$.** Введемо координати наступним чином:

$$X = \begin{vmatrix} 0 & -x_3 & x_2 & y_1 & z_1 \\ x_3 & 0 & -x_1 & y_2 & z_2 \\ -x_2 & x_1 & 0 & y_3 & z_3 \\ -y_1 & -y_2 & -y_3 & 0 & w \\ -z_1 & -z_2 & -z_3 & -w & 0 \end{vmatrix}.$$

Група $SO(5)$ має лише одну нетривіальну вироджену орбіту описаного в теоремі типу $SO(5)/SO(3)\times SO(2)$, яка згідно з викладеним вище задається фіксацією квадратичного інваріанта

$$p_2 = \sum_{i=1,2,3}\left(x_i^2+y_i^2+z_i^2\right)+w^2 = c_2$$

і рівняннями

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pf}_1 &= x_1w + y_2z_3 - y_3z_2 = 0,\\
\mathrm{Pf}_2 &= x_2w + y_3z_1 - y_1z_3 = 0,\\
\mathrm{Pf}_3 &= x_2w + y_1z_2 - y_2z_1 = 0,\\
\mathrm{Pf}_4 &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0,\\
\mathrm{Pf}_5 &= x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 = 0.
\end{aligned}$$

Легко бачити, що останні два рівняння при $w\neq 0$ випливають з трьох попередніх. Тобто система дійсно задає шестивимірну орбіту. Умова
вибором локальних карт на орбіті.

***Приклад* 2.** $\boldsymbol{SO(6)}$. Введемо координати наступним чином

$$X = \begin{vmatrix} 0 & -x_3 & x_2 & y_1 & z_1 & u_1\\ x_3 & 0 & -x_1 & y_2 & z_2 & u_2\\ -x_2 & x_1 & 0 & y_3 & z_3 & u_3\\ -y_1 & -y_2 & -y_3 & 0 & -w_3 & w_2\\ -z_1 & -z_2 & -z_3 & w_3 & 0 & -w_1\\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & -w_2 & w_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вироджена орбіта групи $SO(6)$, що описується даним методом, це $SO(6)/SO(4)\times SO(2)$. Вона задається фіксацією квадратичного інваріанта

$$p_2 = \sum_{i=1,2,3}\left(x_i^2+y_i^2+z_i^2+u_i^2+w_i^2\right) = c_2$$

та рівняннями

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pf}_{12} &= w_1y_3 + w_2z_3 + w_3u_3 = 0, & \mathrm{Pf}_{26} &= x_2w_3 + y_1z_3 - y_3z_1 = 0,\\
\mathrm{Pf}_{13} &= w_1y_2 + w_2z_2 + w_3u_2 = 0, & \mathrm{Pf}_{34} &= x_3w_1 + u_1z_2 - u_2z_1 = 0,\\
\mathrm{Pf}_{23} &= w_1y_1 + w_2z_1 + w_3u_1 = 0, & \mathrm{Pf}_{35} &= x_3w_2 - u_1y_2 + u_2z_1 = 0,\\
\mathrm{Pf}_{14} &= x_1w_1 + u_2z_3 - u_3z_2 = 0, & \mathrm{Pf}_{36} &= x_3w_3 + y_3z_2 - y_2z_3 = 0,\\
\mathrm{Pf}_{15} &= x_1w_2 - u_2y_3 + u_3y_2 = 0, & \mathrm{Pf}_{45} &= x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0,\\
\mathrm{Pf}_{16} &= x_1w_3 + y_3z_2 - y_2z_3 = 0, & \mathrm{Pf}_{46} &= x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 = 0,\\
\mathrm{Pf}_{24} &= x_2w_1 - u_3z_1 + u_3z_1 = 0, & \mathrm{Pf}_{56} &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0.\\
\mathrm{Pf}_{25} &= x_2w_2 + u_1y_3 - u_3y_1 = 0, & &
\end{aligned}$$

***Приклад* 3.** $\boldsymbol{U(3)}$. Введемо координати наступним чином: для довільних $Z\in u(3)$

$$Z = \begin{vmatrix} ih_1 & -x_3+iy_3 & x_2+iy_2\\ x_3+iy_3 & ih_2 & -x_1+iy_1\\ -x_2+iy_2 & x_1+iy_1 & ih_3 \end{vmatrix}.$$

Тоді

$$r(Z) = \begin{vmatrix} 0 & -x_3 & x_2 & h_1 & y_3 & y_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 & y_3 & h_2 & y_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 & y_2 & y_1 & h_3 \\ -h_1 & -y_3 & -y_2 & 0 & -x_3 & x_2 \\ -y_3 & -h_2 & -y_1 & x_3 & 0 & -x_1 \\ -y_2 & -y_1 & -h_3 & -x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вироджена орбіта CP^2 є спільною поверхнею рівня квадратичного інваріанта

$$p_2 = \sum_{i=1,2,3} \left(x_i^2 + y_i^2 + h_i^2\right) = c_2$$

та дев'яти квадратичних пфафіанів

$$\mathrm{Pf}_{12} = \mathrm{Pf}_{45} = x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 h_3 = 0,$$

$$\mathrm{Pf}_{13} = \mathrm{Pf}_{46} = x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 h_2 = 0,$$

$$\mathrm{Pf}_{23} = \mathrm{Pf}_{56} = x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_1 h_1 = 0,$$

$$\mathrm{Pf}_{15} = \mathrm{Pf}_{24} = x_1 x_2 - y_2 y_1 + y_3 h_3 = 0,$$

$$\mathrm{Pf}_{16} = \mathrm{Pf}_{34} = x_1 x_3 - y_3 y_1 + y_2 h_2 = 0,$$

$$\mathrm{Pf}_{26} = \mathrm{Pf}_{35} = x_3 x_2 - y_2 y_3 + y_1 h_1 = 0,$$

$$\mathrm{Pf}_{14} = x_1^2 + y_1^2 - h_2 h_3 = 0,$$

$$\mathrm{Pf}_{25} = x_2^2 + y_2^2 - h_1 h_3 = 0,$$

$$\mathrm{Pf}_{36} = x_3^2 + y_3^2 - h_2 h_1 = 0.$$

1. *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
2. *Харт Н.* Геометрическое квантование в действии. – М.: Мир, 1985. – 343 с.
3. *Кириллов А. А.* Некоммутативный гармонический анализ // ВИНИТИ. – 1988. – **22.** – С. 5–162.
4. *Borel A.* Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1954. – **40.** – P. 1147.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
6. *Монтролл Э.* Лекции по модели Изинга // Устойчивость и фазовые переходы. – М.: Мир, 1973. – С. 92–163.
7. *Wolf J.* Representation associated to minimal coadjoint orbits // Lect. Notes Math. – 1978. – **676.** – P. 329.

Одержано 30.01.96