УДК 517. 944

Н. Г. Хома (Тернопіл. акад. нар. госп-ва)

ПРО ОДИН ТОЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

We establish conditions under which the problem $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t)$, $u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$ possesses the classical solution.

Встановлено умови, за яких задача $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t)$, $u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$ має класичний розв'язок.

Встановимо умови існування точного розв'язку крайової задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad 0 < t < \pi, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad u(x, \pi) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Позначимо через $C_{\pi x}$ простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\mathbb{R} \times [0, \pi]$, через $G_{\pi x}$ — простір функцій двох змінних x і t, неперервних і обмежених на $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ разом з похідною по x.

Для функції $f \in C_{\pi x}$ розглянемо оператор

$$(Pf)(x, t) = -\frac{1}{4}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau)\, d\xi + \frac{1}{4}\int_\tau^\pi d\tau \int_{x+t-\tau}^{x-t+\tau} f(\xi, \tau)\, d\xi - \frac{1}{4}\int_0^\pi d\tau \int_{x-t-\tau}^{x+t+\tau} f(\xi, \tau)\, d\xi. \tag{3}$$

Справедливе допоміжне твердження.

Лема. *Для кожної функції* $f \in C_{\pi x} \cap \tilde{C}_3$ ($\tilde{C}_3 = \{f(x, t) = -f(x + \tilde{\omega}_3/2, t)\}$, $\tilde{\omega}_3 = 4\pi/(2s-1)$, s — *натуральне число), справедлива рівність*

$$f(x + \tilde{\omega}_3/2, t) = f(x + 2\pi, t) = -f(x, t). \tag{4}$$

Доведення. На основі означення простору $\tilde{C}_3$ маємо

$$f(x + \tilde{\omega}_3/2, t) = f(x + 2\pi/(2s-1) - 2\pi + 2\pi, t) =$$
$$= f(x - 4\pi(s-1)/(2s-1) + 2\pi, t) = -f(x, t).$$

Звідси, враховуючи, що $f - 4\pi/(2s-1)$ — періодична функція, переконуємось у виконанні рівності (4).

Сформулюємо і доведемо твердження про розв'язність крайової задачі (1), (2).

Теорема. *Якщо* $f \in G_{\pi x} \cap \tilde{C}_3$, *то функція* $u = Pf$ *є єдиною із простору* $C^{2,2}_{\pi x} \cap \tilde{C}_3$, *яка не тільки задовольняє умови* (1), (2), *але і є розв'язком крайової періодичної задачі* $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t)$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, \pi) = 0$, $u(x + \tilde{\omega}_3, t) = u(x, t)$, *причому*

$$\|u(x, t)\|_{C_{\pi x}} \le \pi^2 \|f(x, t)\|_{C_{\pi x}} \tag{5}$$

$$\|u_l(x, t)\|_{C_{\pi x}} \le \pi \|f(x, t)\|_{C_{\pi x}}, \qquad l = t, x, \tag{6}$$

де $\|f(x, t)\|_{C_{\pi x}} = \sup\{|f(x, t)| : x \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le \pi\}$.

Доведення. Безпосередньою перевіркою переконуємось, що функція

$$(P_1 f)(x, t) = \int_0^\pi Q(\tau)\, d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau)\, d\xi, \tag{7}$$

де $Q(\tau) = 1/4$ при $0 \le \tau \le t$, і $Q(\tau) = -1/4$ при $t < \tau \le \pi$, є розв'язком неоднорідного рівняння (1), а функція

$$(Vf)(x, t) = \frac{1}{4}\int_0^\pi d\tau \int_{x-t-\tau}^{x+t+\tau} f(\xi, \tau)\, d\xi \tag{8}$$

є розв'язком однорідного рівняння $(Vf)_{tt} - (Vf)_{xx} = 0$. Тому функція $u = Pf \equiv \equiv P_1 f - Vf$, визначена формулами (3), (7) і (8) є розв'язком неоднорідного рівняння (1).

Аналогічно переконуємось, що $P: \tilde{C}_3 \to \tilde{C}_3$.

Отже, для доведення теореми залишається показати, що функція $u = Pf$ задовольняє крайові умови $(Pf)(x, 0) = (Pf)(x, \pi) = 0$, для неї та її похідних справедливі оцінки (5) і (6) і розв'язок $u = Pf$ єдиний.

На основі формули (3) отримуємо $(Pf)(x, 0) = 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$(Pf)(x, \pi) = \frac{1}{4}\int_0^\pi d\tau \int_{x-\pi+\tau}^{x+\pi-\tau} f(\xi, \tau)\, d\xi - \frac{1}{4}\int_0^\pi d\tau \int_{x-\pi+\tau}^{x+\pi-\tau} f(\xi, \tau)\, d\xi.$$

Обчислюючи похідну $(Pf)'_x(x, \pi)$, маємо

$$(Pf)'_x(x, \pi) = \frac{1}{4}\int_0^\pi \{ f(x + \pi - \tau, \tau) - f(x - \pi + \tau, \tau) \} d\tau -$$

$$- \frac{1}{4}\int_0^\pi \{ f(x + \pi + \tau, \tau) - f(x - \pi - \tau, \tau) \} d\tau.$$

Беручи до уваги, що $f \in C_{\pi x} \cap \tilde{C}_3 = \{ f(x + \omega_3'/2, t) = - f(x, t) \}$, на основі рівності (4) одержуємо $(Pf)'_x(x, \pi) \equiv 0$, а тому $(Pf)(x, \pi) = \mathrm{const}$ для всіх $x \in \in \mathbb{R}$. Знайшовши для $f \in C_{\pi x} \cap \tilde{C}_3$ значення $(Pf)(\pi, \pi)$, переконуємось, що $(Pf)(\pi, \pi) = 0$, а отже, $(Pf)(x, \pi) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Таким чином, функція $u = Pf$ задовольняє крайові умови (2).

Тепер із (7) і (8) для функцій $P_1 f$ і Vf випливає справедливість оцінок

$$4|(P_1 f)(x, t)| \le \pi^2 \| f(x, t)\|_{C_{\pi x}}; \quad 4|(Vf)(x, t)| \le 3\pi^2 \| f(x, t)\|_{C_{\pi x}}.$$

Звідси для функції $u = Pf \equiv P_1 f - Vf$ випливає оцінка (5).

Аналогічно, обчислюючи похідні $(Pf)_l(x, t)$ і $(Vf)_l(x, t)$, $l = t, x$, одержуємо

$$2|(P_1 f)_l(x, t)| \le \pi \| f(x, t)\|_{C_{\pi x}}, \quad l = t, x,$$

$$2|(Vf)_l(x, t)| \le \pi \| f(x, t)\|_{C_{\pi x}}, \quad l = t, x.$$

Отже, для похідних $u_l(x, t) = (Pf)_l(x, t) \equiv (P_1 f)_l(x, t) - (Vf)_l(x, t)$, $l = t, x$, справедливі оцінки (6).

Оскільки $\tilde{C}_3$ є підпростором більш загального простору $C_3 = \{ f(x, t) = = - f(x + \omega_3/2, t)\}$, де $\omega_3 = 4\pi p/(2s - 1)$, $p \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$, і в просторі C_3 однорідна крайова періодична задача $u^0_{tt} - u^0_{xx} = 0$, $u^0(x, 0) = u^0(x, \pi) = 0$, $u^0(x + + \omega_3, t) = u^0(x, t)$ має лише тривіальний розв'язок [1], то крайова періодична задача (1), (2) має єдиний розв'язок $u = Pf$.

Теорему доведено.

1. *Митропольський Ю. О., Хома Г. П., Цинайко П. В.* Періодична задача для неоднорідного рівняння коливання струни // Укр. мат. журн.– 1997. – **49**, №4. – С. 558 – 565.

Одержано 10. 03. 98