УДК 519.41/47

М. М. Семко (НДІ педагогіки АПН України, Київ)

БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ НЕНІЛЬПОТЕНТНИХ УЩН[ ]-ГРУП

We prove a theorem that gives a constructive description of locally graded nonnilpotent CDN-groups.

Доведено теорему, яка конструктивно описує локально ступінчасті ненільпотентні УЩН[ ]-групи.

У багатьох роботах (див., наприклад, [1 – 16]) вивчались групи, в яких певна властивість V підгрупи групи G є щільною в групі G. Властивість V підгрупи групи G називається щільною в G, якщо для підгрупи A з підгрупи B групи G існує підгрупа N із властивістю V така, що $A \leq N \leq B$. Вибираючи A власною чи власною немаксимальною підгрупою з B, одержуємо різні поняття щільності V, які виділяють досить широкі класи груп, що значно узагальнюють клас груп, у яких всі підгрупи мають властивість V. В даній роботі також розглядаються групи з деякими умовами щільності для підгруп (УЩН[ ]-групи).

УЩН[ ]-групою називається така група G, у якої для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A — власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A \leq N \leq B$. Властивості УЩН[ ]-груп вивчались в [10, 11, 15]. Теорема, доведена у даній роботі, конструктивно описує локально ступінчасті ненільпотентні УЩН[ ]-групи.

Означення 1. *Нехай* G *— група,* A *та* B *— її підгрупи,* $A \leq B$. *Відрізком* $[A; B]$ *називається множина всіх тих і тільки тих підгруп* X *із* G, *для яких* $A \leq X \leq B$.

Означення 2. *Модулем відрізка* $|[A; B]|$ *називається число його елементів.*

Лема 1. *Скінченні ненільпотентні УЩН[ ]-групи* G, *що містять ненадрозв'язні групи Шмідта, вичерпуються групами типів*:

1) $G = P \leftthreetimes Q$, $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ $|a| = |b| = p^2$, $|Q| = q$, p *і* q *— різні прості числа,* $q > 2$, *2 — показник* p *за модулем* q, $p \neq 3$, $\Phi(P) \leftthreetimes Q$ *— ненільпотентна група Міллера – Морено*;

2) $G = (P \times R) \leftthreetimes Q$, $|P| = p^2$, $|R| = r$, $|Q| = q$, p, q *і* r *— попарно різні прості числа,* $q > 2$, $p \neq 3$, $r \equiv 1 \pmod q$, *2 — показник* p *за модулем* q, $P \leftthreetimes Q$ *і* $R \leftthreetimes Q$ *— ненільпотентні групи Міллера – Морено*;

3) $G = P \leftthreetimes Q$, P *— елементарна абелева група порядку* $p^{\alpha} > 2$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $Q = \langle x \rangle$, $|x| = q^{\beta}$, $\beta \in \{1, 2, 3\}$, p *і* q *— різні прості числа,* α *— показник* p *за модулем* q, $q > 2$, $C_Q(P) = \left\langle x^{q^{\gamma}} \right\rangle$, $\gamma \in \{1, 2\}$, $\gamma \leq \beta$, $P \leftthreetimes \left\langle x^{q^{\gamma-1}} \right\rangle$ *— ненільпотентна група Міллера – Морено,* $\alpha + \beta - \gamma < 4$;

4) $G = P \leftthreetimes \langle x \rangle$, P *— елементарна абелева група порядку* p^{α}, $p > 5$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $|x| = qr$, p, q *і* r *— попарно різні прості числа,* $q > 2$, $p > 2$, α *— показник* p *за модулем* q, α *— показник* p *за модулем* r, $P \leftthreetimes \langle x^q \rangle$ *та* $P \leftthreetimes \langle x^r \rangle$ *— ненільпотентні групи Міллера – Морено*;

5) $G = (P \leftthreetimes \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, P *— елементарна абелева група порядку* p^2, $|x| = q$, $|z| = r$, p, q *і* r *— прості числа,* $p \neq q$, $p \neq 3$, *2 — показник* p *за модулем* q, $q > 2$, $P \leftthreetimes \langle x \rangle$ *— ненільпотентна група Міллера – Морено*;

6) $G = P \leftthreetimes Q$ *— група Шмідта,* $|P| = p^3$, $\exp(P) = |P'| = p > 3$, $|Q| = q$, p *і* q *— різні прості числа,* $q > 2$, *2 — показник* p *за модулем* q;

7) $G = P \leftthreetimes Q$ — *група Шмідта,* P — *група кватерніонів порядку* 8, $Q = \langle x \rangle$, $|x| \in \{3, 9\}$;

8) $G = P \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|P| = p^2$, $|x| = qr$, p, q *і* r — *попарно різні прості числа,* $p > 3$, $q > 2$, $P \leftthreetimes \langle x^r \rangle$ — *ненільпотентна група Міллера – Морено,* $P \leftthreetimes \langle x^q \rangle$ — *ненільпотентна надрозв'язна мінімальна неметациклічна група.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. За умовою леми G містить ненадрозв'язну групу Шмідта $M = P \leftthreetimes Q$, яка може бути лише групою одного з типів 1 – 3 теореми 3.1 з [15]. Тоді $|P| = p^{\alpha}$, $\alpha \in \{2, 3\}$, $Q = \langle b \rangle$, $|b| = q^{\Delta}$, $\Delta \in \{1, 2\}$, p і q — різні прості числа. Зрозуміло, що M — неметациклічна група. Якщо $M = G$, то G — група одного з типів 7, 6, 3 розглядуваної леми.

Нехай $M < G$. Тоді при $M \ntriangleleft G$ M та G задовольняють умову теореми 3.4 з [15] і G — група одного з типів 1, 2 розглядуваної леми.

Нехай $M \lhd G$. Тоді за лемою Фраттіні [17] $G = MU = PU$, $P \lhd G$, $U = N_G(Q)$, $U \cap P = \Phi(P)$, $\Phi(P) \leq Z(M)$. Зрозуміло, що $U \ntriangleleft G$. Тому U — група одного з типів 1 – 6 теореми 2.2 з [15]. Очевидно, що $\Phi(P) \times Q < U$. Можливі випадки: 1) U — ненільпотентна група; 2) U — нільпотентна група.

Випадок 1. У цьому випадку U — підгрупа типу 2 чи 6 теореми 2.2 з [15]. Нехай спочатку U — група типу 2 згаданої теореми. Тоді U — добуток двох різних простих чисел. Звідси $\Phi(P) = 1$, $P \cap U = 1$. Тому $U = Q \leftthreetimes \langle y \rangle$ — ненільпотентна група Міллера – Морено порядку qr, $|Q| = q$, $|y| = r$, $q \equiv 1 \pmod r$, $U' = Q$. Ясно, що M — ненільпотентна група Міллера – Морено, α — показник p за модулем q, $q > 2$. При $\alpha = 2$ $p \neq 3$. Нехай $V = P \leftthreetimes \langle y \rangle$. Зрозуміло, що $C_Q(P) = 1$. Якщо $C_U(P)$ містить $\langle y \rangle$, то $\langle y \rangle \lhd U$, що неможливо. Отже, $C_{\langle y \rangle}(P) = C_U(P) = 1$. При $\alpha = 3$ за теоремою 3.4 з [15] $G / P \cong U$ — дедекіндова група, що не так. Отже, $\alpha = 2$. Ясно, що U — підгрупа з $\operatorname{Aut} P$. За теоремою 2.3 з [15] G — дисперсивна група і тому при $r = p$ одержуємо, що $P \leftthreetimes \langle y \rangle$ — силовська нормальна p-підгрупа з G. Але тоді $\langle y \rangle \lhd U$, що не так. Отже, $r \neq p$, V — ненільпотентна група і $V \ntriangleleft G$. За теоремою 2.2 з [15] V — група лише типу 6 цієї теореми і V — мінімальна неметациклічна група типу 6 теореми 3.3 з [15]. Звідси V та G задовольняють умову теореми 3.4 з [15] і G є групою одного з типів 1, 2 згаданої теореми. Але тоді $M \leq G'$ — нільпотентна група, що неможливо. Отже, U не може бути групою типу 2 теореми 2.2 з [15].

Нехай U — група типу 6 теореми 2.2 з [15]. Тоді $U = R \leftthreetimes \langle y \rangle$ — ненільпотентна група Міллера – Морено, $|R| = r^{\gamma}$, $|y| = t^{\Delta}$, $\Delta > 0$, r і t — різні прості числа, $R \times \langle y^t \rangle \lhd G$. Звідси $R \lhd G$, $\langle y^t \rangle \lhd G$. Ясно, що $\langle y \rangle \ntriangleleft U$. Покладемо $V = P \langle y \rangle$. Якщо $V \lhd G$, то $V \cap U = \Phi(P) \langle y \rangle \lhd U$, $V \cap U = U$ і $G = V$. Звідси $\Phi(P) = R$, $|R| = p \neq t$, $G = P \leftthreetimes \langle y \rangle$, $p \equiv 1 \pmod t$, $p > 2$, $y^t \in Z(G)$. Оскільки $Q \leq U$, $P \leftthreetimes Q$ — група Шмідта і $y^t \in Z(G)$, то $Q = \langle y \rangle$ і $M = G$, що не так. Звідси $V \ntriangleleft G$. При $t = p$ $r = q$, R не є нормальною в G силовською q-підгрупою і оскільки G — дисперсивна група, то V — нормальна силовська p-підгрупа з G, що неможливо. Отже, $p \neq t$ і V — група типу 6 теореми 2.2 з [15]. Зрозуміло, що $V < G$. Тоді $R \not< P$. Звідси $r \neq p$, G' містить ненільпотентну підгрупу $P \leftthreetimes R$. Тепер знову V та G задовольняють умову теореми 3.4 з [15], за твердженням якої G' — нільпотентна група, що не так. Таким чином, випадок 1 неможливий.

Випадок 2. Оскільки M — ненадрозв'язна група Шмідта, то показник p за модулем q більший 1. Тому $Q \leq U$ — не 2-група. Нехай U — непримарна група. Звідси U може бути лише підгрупою типу 2 чи 4 теореми 2.2 з [15]. Тоді $U = \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, $\langle y \rangle$ — q-група, $|z| = r$, q і r — різні прості числа, $y^q \in Z(G)$. Зрозуміло, що $M = P \leftthreetimes \langle y \rangle$, $Q = \langle y \rangle$. Якщо $z \in \Phi(P)$, то $G = M$, що не так. Отже, $\langle z \rangle \bigcap P = \Phi(P) = 1$ і P — елементарна абелева група.

Припустимо, що $r = p$. Тоді $P \leftthreetimes \langle z \rangle$ не є нормальною в G силовською p-підгрупою, комутант якої — власна підгрупа з P, нормальна в G. Оскільки P — мінімальна нормальна підгрупа з M, то $[P, \langle z \rangle] = 1$. Тому в G існує підгрупа $P \times \langle y^q \rangle \times \langle z \rangle$. За теоремою 2.3 з [15] нededекіндова група G не містить підгруп, що розкладаються в прямий добуток чотирьох неодиничних прямих множників. Звідси $\alpha = 2$, $|y| = q$ і G — група типу 5 розглядуваної леми. При $p \neq r$ $G = P \leftthreetimes U$, $\Phi(P) = 1$. Якщо $y^q \neq 1$, то U — група типу 5 теореми 2.2 з [15], $\langle y^q \rangle \times \langle z \rangle \lhd G$ і G містить підгрупу $P \times \langle y^q \rangle \times \langle z \rangle$, для якої, як і раніше, $|y| = q$, що не так. Отже, $|y| = q$ і тому $|U| = qr$. Якщо $[P, \langle z \rangle] = 1$, то в G існує підгрупа $P \times \langle z \rangle$, у якої P — група типу (p, p), і тому G — група типу 5 розглядуваної леми. Нехай $[P, \langle z \rangle] \neq 1$. Покладемо $V = P \leftthreetimes \langle z \rangle$. Тоді V — нenільпотентна підгрупа з G. Якщо V — підгрупа Міллера – Морено, то покладемо $U = \langle x \rangle$ і одержимо, що $|x| = qr$ і G — група типу 4 розглядуваної леми. Нехай V не є підгрупою Міллера – Морено. Тоді V містить власну підгрупу Міллера – Морено $S = P_1 \leftthreetimes \langle y \rangle$, $|P_1| = p^{\alpha_1}$, $|\alpha_1| \in \{1, 2\}$, $P_1 < P$.

Нехай спочатку $\alpha = 2$. Тоді $|P_1| = p$, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, r)$. За теоремою Машке [17] $P = P_1 \times P_2$, $|P_2| = p$, $P_2 \lhd V$. Якщо $[P_2, \langle z \rangle] = 1$, то $P_2 = Z(V) \lhd G$, що суперечить мінімальності P в G. Отже, $P_2 \leftthreetimes \langle y \rangle$ — група Міллера – Морено, V — мінімальна неметациклічна група типу 8 теореми 3.3 з [15] і тому G є групою типу 8 розглядуваної леми.

Нехай $\alpha = 3$. При $|P_1| = p^2$ знову за теоремою Машке [17] $P = P_1 \times P_2$, $P_2 \lhd V$, $|P_2| = p$, 2 — показник p за модулем r і тому $P_2 \leftthreetimes \langle z \rangle$ — нільпотентна група. Звідси $P_2 = Z(V)$ і знову $P_2 \lhd G$, що суперечить мінімальності P в G. Отже, $|P_1| = p$, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, r)$ і в G існує підгрупа $P_2 \leftthreetimes \langle y \rangle$, де $P_2 \times P_1 = P$, $P_2 \lhd G$. Знову якщо $[P_2, \langle z \rangle] = 1$, то $P_2 = Z(V)$, що неможливо. Тоді $[P_2, \langle y \rangle] \neq 1$. Як і раніше, $P_2 \leftthreetimes \langle z \rangle$ містить підгрупу Міллера – Морено $P_3 \leftthreetimes \langle y \rangle$, $P_3 \leq P_2$, $|P_3| = p$ і $|[\langle z \rangle; (P_3 \times P_1) \leftthreetimes \langle y \rangle]| > 2$. За означенням УЩН[ ]-груп $[\langle z \rangle; (P_3 \times P_1) \leftthreetimes \langle y \rangle] \ni N \lhd G$. За лемою Фраттіні [17] $V = ND = (P_3 \times P_1) \leftthreetimes \leftthreetimes D$, де $D = N_V(\langle z \rangle)$. Оскільки $P_3 \times P_1 < P$, то $D = \langle z \rangle \times \langle u \rangle$, $|u| = p$, $\langle u \rangle = = Z(V)$, $\langle u \rangle \lhd G$, що неможливо. Отже, при $\alpha = 3$ маємо суперечність. Випадок, коли U — непримарна група, розглянуто повністю.

Нехай тепер U — примарна група. Оскільки G — ненільпотентна група, то U — силовська q-підгрупа з $G = P \leftthreetimes U$, $\Phi(P) = 1$, $|U| > |Q|$, $C_U(P) \lhd G$. Оскільки α — показник p за модулем q, то $q > 2$ і U — група одного з типів 1, 2, 5 теореми 2.2 з [15].

Нехай U — група типу 1 теореми 2.2 з [15]. Тоді $U = \langle x \rangle$, $|x| = q^\beta$ і $Q < < \langle x \rangle$. Звідси $\beta > 1$. Зрозуміло, що $C_U(P) = \Phi(\Phi(U)) = \left\langle x^{q^2} \right\rangle$. Отже, $Q = = \langle x^q \rangle$, $\beta < 4$, $C_V(P) = \left\langle x^{q^\gamma} \right\rangle$, $\gamma \leq \beta$. При $\gamma = \beta$ $\alpha + \beta - \gamma < 4$ і G — група типу 3 розглядуваної леми.

Нехай $\beta > \gamma$. Тоді в нededекіндовій групі G існує підгрупа $P \times \left\langle x^{q^\gamma} \right\rangle$. За теоремою 2.3 з [15] $\alpha = 2$, $\alpha + \beta - \gamma < 4$ і G — група типу 3 розглядуваної леми.

Нехай U — група типу 2 теореми 2.2 з [15]. Тоді $U = \langle x \rangle \times \langle z \rangle$, $|x| = |z| = q$. Ясно, що $Q \leq U$. Без порушення загальності можна вважати, що $Q = \langle x \rangle$. Покладемо $V = P \leftthreetimes \langle z \rangle$. Ясно, що P і U — нециклічні елементарні абелеві підгрупи з G. В силу [18] G не є групою Фробеніуса. Тому можна вважати, що $V = P \leftthreetimes \langle z \rangle$ не є групою Фробеніуса і $V \lhd G$. Ясно, що $C_U(P) = 1$ і тому V — ненільпотентна група. Оскільки V не є групою Фробеніуса, то існує $u \in P$, $|u| = p$, $[u, z] = 1$. Тоді $u \in Z(V) \lhd G$ і $Z(V) < P$, що суперечить мінімальності P в G. Отже, U не може бути групою типу 2 теореми 2.2 з [15].

Нехай U — група типу 5 теореми 2.2 з [15]. Тоді G містить підгрупу $P \times D$, де D — група типу (q, q). Оскільки P містить підгрупу типу (p, p), то за теоремою 2.3 з [15] одержимо нільпотентність групи G, що не так і, значить, U не може бути групою типу 5 теореми 2.2 з [15]. Всі випадки розглянуто. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1 – 8 розглядуваної леми. Зрозуміло, що G — скінченна ненільпотентна група. Покажемо, що G — УЩН[ ]-група. Для груп G кожного з типів 1, 2 це встановлено в теоремі 3.4 з [15]. Група G кожного з типів 3 – 8 має вигляд $G = P \leftthreetimes G$, $G' = P$, $|P| \in \{p^2, p^3\}$, $C' = 1$ і G — група одного з типів 1 – 3 теореми 2.2.1 з [16] і тому G — метагамільтонова група. Далі достатність перевіряється безпосередньо. Лема доведена.

Лема 2. *Скінченні ненільпотентні метациклічні УЩН[ ]-групи G вичерпуються групами таких типів*:

1) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = pr$, p *і* r — *не обов'язково різні непарні прості числа*, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, q — *просте число*, $p \equiv 1 \pmod q$, $r \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

2) $G = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = p$ — *непарне просте число*, $|b| = q^\beta$, $\beta > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, q *і* r — *прості числа*, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $b^{q^2} \in Z(G)$; *при* $z \neq 1$ $Z(G) = \langle b^q \rangle \times \langle z \rangle$; *при* $|z| = p$ $\beta < 3$;

3) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = p$ — *непарне просте число*, $|b| = qr$, q *і* r — *різні прості числа*, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = 1$;

4) $G = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle)\langle x \rangle$, $|a| = p$ — *непарне просте число*, $\langle z, x \rangle$ — *група кватерніонів порядку* 8, $x^{-1} a x = a^{-1}$;

5) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes (\langle x \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle)$, $|a| = p$ — *непарне просте число*, $|x| = q^\beta$, $\beta > 2$, $|z| = q$ — *просте число*, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x, z] = x^{q^{\beta-1}}$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Тоді G задовольняє умову теореми 3.2 з [15] і може бути ненільпотентною групою одного з типів 1 – 16 згаданої теореми. Легко бачити, що G — група лише одного з типів 12 – 16 теореми 3.2 з [15] і тому G — група відповідно одного з типів 1 – 5 леми. Необхідність доведена.

Достатність доведена в теоремі 3.2 з [15]. Лема доведена.

Лема 3. *Скінченні ненільпотентні мінімальні неметациклічні УЩН[ ]-групи G, у яких всі підгрупи Шмідта надрозв'язні, вичерпуються групами таких типів*:

1) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ — *непарне просте число*, $|x| \in \{q, q^2\}$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^q \rangle$;

2) $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle x\rangle$, $|a| = |b| = p$ — *непарне просте число*, $|x| = q^{\beta}$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $[\langle b\rangle, \langle x\rangle] = \langle b\rangle$, $Z(G) = \langle b^{q}\rangle$, $\langle a\rangle \times \langle b\rangle$ — *квазіцентральна підгрупа з* G;

3) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes (\langle x\rangle \leftthreetimes \langle z\rangle)$, $|a| = p$ — *непарне просте число*, $|x| = q^2$, $|z| = q$ — *непарне просте число*, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $[x, z] = x^{q}$, $[a, x^{q}] = [a, z] = 1$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Тоді вона задовольняє умову теореми 3.3 з [15] і може бути лише ненільпотентною групою одного з типів 8 – 10 цієї теореми. Звідси G — група відповідно одного з типів 1 – 3 розглядуваної леми. Необхідність доведена.

Достатність доведена в теоремі 3.3 з [15]. Лема доведена.

Лема 4. *Скінченні ненільпотентні УЩН[ ]-групи* G, *що містять власні ненільпотентні мінімальні неметациклічні підгрупи і в яких надрозв'язні всі підгрупи Шмідта, вичерпуються ненадрозв'язними групами Фробеніуса* $G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle x\rangle$, $|a| = |b| = p$ — *непарне просте число*, $|x| = qr$, q *і* r — *не обов'язково різні прості числа*, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $(\langle a\rangle \times \langle x\rangle) \leftthreetimes \langle x^{q}\rangle$ *та* $(\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle x^{r}\rangle$ — *ненільпотентні мінімальні неметациклічні групи.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Тоді G містить власну ненільпотентну мінімальну неметациклічну підгрупу C, у якої, як і в G, всі підгрупи Шмідта надрозв'язні. Зрозуміло, що C задовольняє умову леми 3 і може бути лише групою одного з типів 1 – 3 згаданої леми. Звідси $C = P \leftthreetimes Q$, де $P = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $|a| = p$, $|b| \in \{1, p\}$, p — непарне просте число, Q — силовська q-підгрупа з C, q — просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, Q] = \langle a\rangle$, $[\langle b\rangle, Q] = \langle b\rangle$, $N_C(Q) = Q$. За теоремою 3.4 з [15] $C \lhd G$. За лемою Фраттіні [17] $G = CU = P \leftthreetimes U$, де $U = N_G(Q)$, $Q < U$, $Q \ntriangleleft U$, $U \ntriangleleft G$ і U — підгрупа одного з типів 1 – 6 теореми 2.2 з [15], яка не містить власних неабелевих підгруп. Тому $Q' = 1$. Але тоді C — група лише одного з типів 1, 2 леми 3 і $Q = \langle y\rangle$, $|y| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $|b| = p$.

Припустимо, що G — надрозв'язна група. Тоді без порушення загальності можна вважати, що G містить ненільпотентну підгрупу $V = \langle a\rangle \leftthreetimes U$. Зрозуміло, що $G' = P$. Якщо $V \lhd G$, то G/V — абелева група і тому $V \geq G'$, що не так. Отже, $V \ntriangleleft G$. Звідси V — група одного з типів 2, 6 теореми 2.2 з [15]. Оскільки $(\langle a\rangle \leftthreetimes \langle y\rangle) < V$, то V — лише група типу 6 згаданої теореми. Тому $V = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle x\rangle$, $|x| = q^{\alpha}$, $\alpha > 0$, $\langle x\rangle \geq \langle y\rangle$. Нехай $\langle x\rangle = \langle y\rangle$. Тоді $C = G$, що неможливо. Звідси $y \in \langle x^{q}\rangle$. Ясно, що $Q \ntriangleleft G$. Із надрозв'язності групи G випливає, що $\langle a\rangle \lhd G$, $\langle b\rangle \lhd G$ і в G існують ненільпотентні ненормальні підгрупи $\langle a\rangle \leftthreetimes \langle x\rangle$, $\langle b\rangle \leftthreetimes \langle x\rangle$, які, очевидно, лише групи типу 6 теореми 2.2 з [15]. Але тоді $[a, x^{q}] = [a, y] = [b, x^{q}] = [b, y] = 1$, що неможливо. Отже, G — ненадрозв'язна група.

Оскільки всі підгрупи Шмідта з G надрозв'язні, то за теоремою 2.2 з [15] U — метациклічна група. Нехай $S = C_U(P)$. Покажемо, що $|S| \in \{1, t\}$, t — просте число. Дійсно, в противному разі за лемою 2.5 з [15] G містить підгрупу $P \times S$ і P — квазіцентральна підгрупа з G. Звідси G — надрозв'язна група, що не так. Отже, $|S| \in \{1, t\}$. Оскільки в підгрупі U типу 5 теореми 2.2 з [15] U містить нормальну в G неодиничну підгрупу непростого порядку і ця підгрупа належить S, то U — група одного з типів 1 – 4, 6 теореми 2.2 з [15].

Нехай U — підгрупа типу 6 теореми 2.2 з [15]. Тоді $U = R \leftthreetimes \langle x\rangle$, $R \times \langle x^{q}\rangle \lhd$

$\lhd G$. Звідси за попереднім $|R \times \langle x^q \rangle| = t$ і, значить, $|R| = t = r$, $|x| = q$. Отже, $G = (P \times R) \leftthreetimes \langle x \rangle$. За умовою $P \leftthreetimes \langle x \rangle$ містить тільки надрозв'язні групи Шмідта. Тому без порушення загальності можна вважати, що $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] \leq \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] \leq \langle b \rangle$ і G — надрозв'язна група, що суперечить вибору G. Отже, U — група одного з типів $1 - 4$ теореми 2.2 з [15].

Нехай U — підгрупа типу 4 теореми 2.2 з [15]. Тоді $U = \langle x \rangle \times \langle z \rangle$, $|x| = q^\beta$, $\beta > 0$, $|z| = r$ і $\langle x^q \rangle \times \langle z \rangle \lhd G$. За попереднім, $|x^q| = 1$ і $G = (P \times \langle x \rangle) \leftthreetimes \langle z \rangle$ — надрозв'язна група, що суперечить вибору G. Отже, U не може бути групою типу 4 теореми 2.2 з [15].

Легко бачити, що G — надрозв'язна група, якщо U — група типу 3 теореми 2.2 з [15].

Нехай U — підгрупа типу 2 теореми 2.2 з [15]. Якщо U — примарна група і U не є групою типу 1 теореми 2.2 з [15], то $|y| = |z| = q$. В силу [18] без порушення загальності можна вважати, що $[P, \langle z \rangle] \neq P$. Звідси $P \leftthreetimes \langle z \rangle$ має неодиничний центр, що належить P. Можна вважати, що $[a, z] = 1$. Але тоді $\langle a \rangle \lhd$ $\lhd G$ і $G / \langle a \rangle$ — надрозв'язна група. Звідси і G — надрозв'язна група, що не так. Нехай тепер U — неабелева група типу 2 теореми 2.2 з [15]. Тоді $U = \langle y \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle$, $|y| = q$, $|z| = r$, $[\langle y \rangle, \langle z \rangle] = \langle y \rangle$. Покладемо $V = P \leftthreetimes \langle z \rangle$. Зрозуміло, що $V \ntriangleleft G$, $\langle z \rangle \ntriangleleft U$, $C_U(P) = 1$. Оскільки G — дисперсивна група (теорема 2.3 з [15]), то V — непримарна група і тому $p \neq r$. Звідси V — ненільпотентна група. Оскільки $|P| = p^2$ і $V \ntriangleleft G$, то V — підгрупа типу 6 теореми 2.2 з [15]. Але тоді V — ненадрозв'язна група Шмідта, що неможливо за умовою леми. Таким чином, $U' = 1$, тобто $U = \langle y \rangle \times \langle z \rangle$, $|y| = q$, $|z| = r$, q і r — різні прості числа.

Нехай $V = P \leftthreetimes \langle z \rangle$ — примарна група, тобто $p = r$. Якщо $V' \neq 1$, то $V' =$ $= \langle c \rangle \leq P$, $|c| = p$, $\langle c \rangle \lhd G$ і $G / \langle c \rangle$ — надрозв'язна група. Звідси і G — надрозв'язна група, що неможливо. Отже, $V' = 1$. Але тоді $G = (P \leftthreetimes \langle y \rangle) \times \langle z \rangle$ — надрозв'язна група, що не так. Звідси $p \neq r$ і $V' = 1$. Оскільки підгрупи Шмідта з G надрозв'язні, то $P \leftthreetimes \langle z \rangle$ — надрозв'язна група.

Нехай V не є групою Фробеніуса. Тоді [18] $c \in P$, $|c| = p$, $[c, z] = 1$ і $\langle c \rangle =$ $= Z(V)$. Звідси $\langle c \rangle \lhd G$ і $G / \langle c \rangle$ — надрозв'язна група. Тому і G — надрозв'язна група, що не так. Отже, V — група Фробеніуса. Зрозуміло, що $U = \langle x \rangle$, $|x| = qr$ і тому $C = P \leftthreetimes \langle x^r \rangle$, $P \leftthreetimes \langle x^q \rangle = P \leftthreetimes \langle z \rangle = V$ — ненільпотентна група Фробеніуса, у якої всі підгрупи Шмідта надрозв'язні. Тому V — група типу 1 леми 3.3 з [15] *і* G — група з розглядуваної леми.

Нехай U — примарна циклічна підгрупа типу 2 теореми 2.2 з [15] або підгрупа типу 1 цієї теореми. Тоді $U = \langle x \rangle$, $|x| = q^\beta$, $\beta > 0$, $x^{q^2} \in Z(G)$, $y \in \langle x \rangle$. Якщо $\langle y \rangle = \langle x \rangle$, то $C = G$, що не так. Отже, $y \in \langle x^q \rangle$ і тому $\beta > 1$. Припустимо, що $\beta > 2$. Тоді $|[\langle a \rangle; (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle y \rangle)]| > 2$. За означенням УЩН[ ]-груп $[\langle a \rangle; (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle y \rangle)] \ni N \lhd G$ і $N \bigcap P = \langle a \rangle \lhd G$. Ясно, що $G / \langle a \rangle$ — надрозв'язна група і тому G — надрозв'язна група, що не так. Отже, $\beta = 2$ і G — група з леми. Всі випадки розглянуто. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$ — група з розглядуваної леми. Тоді $G = P \leftthreetimes \langle x \rangle$ — ненадрозв'язна група, де $P = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ — силовська p-підгрупа з G. Звідси P — мінімальна нормальна підгрупа з G. Оскільки $p \equiv$ $\equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$ і силовські підгрупи з G абелеві, то будь-яка підгрупа Шмідта з G надрозв'язна. Покажемо, що G — УЩН[ ]-група, тобто для $|[A; B]| > 2$ $[A; B] \ni N \lhd G$. Якщо $A \lhd G$ чи $B \lhd G$, то покладемо $A = N$ чи

$B = N$ і все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що $A \ntriangleleft G$, $B \ntriangleleft G$, $A \neq 1$, $G' \nless B$. Оскільки $|G|$ є добутком чотирьох простих чисел, то $|B|$ є добутком трьох простих чисел. Звідси $|B| = pqr$. Отже, $G = PB$, $P \cap B = P_1 \lhd G$, $|P_1| = p$, що суперечить мінімальності P в G. Таким чином, G — УЩН[ ]-група. Достатність доведена. Лема доведена.

Лема 5. *Нехай G — скінченна ненільпотентна УЩН[ ]-група, у якої всі підгрупи Шмідта надрозв'язні. Тоді всі силовські підгрупи з G метациклічні.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група. Припустимо, що G містить мінімальну неметациклічну p-підгрупу C. Тоді C — підгрупа одного з типів 1 – 5 теореми 3.3 з [15]. За теоремою 3.4 з [15] $C \lhd G$ і G/C — дедекіндова група. Звідси $G = P \leftthreetimes D$, P — силовська p-підгрупа з G, D — її холлівське дедекіндове p'-доповнення. Оскільки G — ненільпотентна група, то $D \ntriangleleft G$. Звідси D містить q-елемент x такий, що $[P, \langle x\rangle] \neq 1$, $p \neq q$ — просте число і $[P, \langle x^q\rangle] = 1$. Покладемо $V = P \leftthreetimes \langle x\rangle$. Ясно, що V — ненільпотентна група і V містить підгрупу Шмідта $S = R \leftthreetimes \langle d\rangle$, де $R = P \cap S$, $\langle d\rangle$ — силовська q-підгрупа з S, що не є нормальною. Оскільки S — надрозв'язна група Шмідта, то $|R| = p$ і $p \equiv 1 \pmod q$. Ясно, що $\langle d\rangle$ належить деякій силовській q-підгрупі з V, яка спряжена з $\langle x\rangle$ і $x^q \in Z(V)$. Звідси $\langle d\rangle$ — силовська q-підгрупа з V. Тому в подальшому без порушення загальності можна вважати, що $x = d$. Зрозуміло, що C — група одного з типів 1, 2 теореми 3.3 з [15]. Оскільки G/C — дедекіндова група, то $R \leq C$.

Нехай спочатку C — група типу 1 теореми 3.3 з [15] і $C' = 1$. Ясно, що $p > 2$. За теоремою Машке [17] $C = R \times Y$, де $[Y, \langle x\rangle] \leq Y$, Y — група типу (p, p). Покажемо, що $Y = \langle y\rangle \times \langle x\rangle$, де $[\langle y\rangle, \langle x\rangle] \leq \langle y\rangle$, $[\langle z\rangle, \langle x\rangle] \leq \langle z\rangle$. Якщо $[Y, \langle x\rangle] = 1$, то доводжуване твердження очевидне. Нехай $[Y, \langle x\rangle] \neq 1$. Тоді, як і раніше, в $Y \leftthreetimes \langle x\rangle$ існує підгрупа Шмідта $S_1 = R_1 \leftthreetimes \langle x\rangle$, $|R_1| = p$, $Y = R_1 \times R_2$, $[R_2, \langle x\rangle] \leq R_2$, $|R_2| = p$. Покладемо $R_1 = \langle y\rangle$, $R_2 = \langle z\rangle$ і будемо мати доводжуване твердження. Тепер ясно, що в G існують підгрупи $(R \times \langle y\rangle) \leftthreetimes \langle x\rangle$, $(R \times \langle z\rangle) \leftthreetimes \langle x\rangle$, $Y \leftthreetimes \langle x\rangle$, які не можуть бути підгрупами жодного з типів 1 – 6 теореми 2.2 з [15] і тому вони нормальні в G. Зрозуміло, що перетин згаданих підгруп співпадає з $\langle x\rangle$ і тому $\langle x\rangle \lhd G$, що не так. Отже, $C' \neq 1$. Тоді $C = (\langle c\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|c| = |a| = |b| = p$, $[a, b] = c$, $[c, b] = 1$. Зрозуміло, що $C' = \langle c\rangle \lhd G$. Покажемо, що C містить підгрупу $Y = \langle c\rangle \times \langle y\rangle$, де $|y| = p$, $[\langle y\rangle, \langle x\rangle] \leq \langle y\rangle$. Дійсно, оскільки $\langle c\rangle \lhd G$ і $C \lhd G$, то в $G/\langle c\rangle$ існує підгрупа $C/\langle c\rangle \leftthreetimes \langle x\langle c\rangle\rangle$. Якщо згадана підгрупа нільпотентна, то існує підгрупа $Y/\langle c\rangle$ така, що $[Y/\langle c\rangle, \langle x\langle c\rangle\rangle] \leq Y/\langle c\rangle$ і $|Y/\langle c\rangle| = p$. Звідси $|Y| = p^2$, $[Y, \langle x\rangle] \leq Y$. За теоремою Машке [17] $Y = \langle c\rangle \times \langle y\rangle$, де $[\langle y\rangle, \langle x\rangle] \leq \langle y\rangle$. Нехай $C/\langle c\rangle \leftthreetimes \langle x\langle c\rangle\rangle$ — ненільпотентна група. Тоді, як і раніше, вона містить підгрупу Шмідта $Y/\langle c\rangle\rangle \leftthreetimes \langle x\langle c\rangle\rangle$ і $|Y/\langle c\rangle| = p$. Звідси $|Y| = p^2$, $[Y, \langle x\rangle] \leq Y$. За теоремою Машке [17] $Y = \langle c\rangle \times \langle y\rangle$, $[\langle y\rangle, \langle x\rangle] \leq \langle y\rangle$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $y = a$. В G існує підгрупа $V_1 = Y \leftthreetimes \langle x\rangle$. Ясно, що V_1 не може бути підгрупою жодного з типів 1 – 6 теореми 2.2 з [15] і тому $V_1 \lhd G$. За теоремою Машке [17] $C/\langle c\rangle = Y/\langle c\rangle \times Z/\langle c\rangle$, $[Z/\langle c\rangle, \langle x\langle c\rangle\rangle] \leq Z/\langle c\rangle$. Як і раніше, $[Z, \langle x\rangle] \leq Z$, $Z = \langle c\rangle \times \langle b\rangle$, $[\langle b\rangle, \langle x\rangle] \leq \langle b\rangle$. В G існує підгрупа $V_2 = Z \leftthreetimes \langle x\rangle$. Як і для V_1, можна показати, що $V_2 \lhd G$. Ясно, що $V_1 \cap V_2 = V_3 = \langle c\rangle \leftthreetimes \langle x\rangle \lhd G$. Покладемо $N = C \leftthreetimes \langle x\rangle$. Оскільки $S \leq N$, то N — ненільпотентна група. За лемою Фраттіні [17] $N = V_3 U$, де $U = \langle x\rangle \times C_1 = N_N(\langle x\rangle)$, $C_1 = C \bigcap U$, $C_1 < C$. Звідси $\langle c\rangle \bigcap C_1 = 1$, $C = \langle c\rangle \times C_1$, що неможливо. Отже, C не може бути групою типу 1 теореми 3.3 з [15].

Нехай C — група типу 2 теореми 3.3 з [15]. Тоді $C = A\langle u\rangle$, де $A = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, $|a| = |u| = 9$, $|b| = 3$, $[a, u] = b$, $[b, u] = a^3 = u^6$, $w(C) = \langle b\rangle \times \langle a^3\rangle = C' \lhd G$, $\langle a^3\rangle = Z(C) \lhd G$. За теоремою Машке [17] можна вважати, що $[\langle b\rangle, \langle x\rangle] \leq \langle b\rangle$. Ясно, що A — єдина абелева максимальна підгрупа з C. Звідси $A \lhd G$. За теоремою Машке [17] без порушення загальності можна вважати, що $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] \leq$ $\leq \langle a\rangle$.

Припустимо, що $[a, x] \neq 1$. Тоді G містить ненільпотентну підгрупу $N_1 =$ $= \langle a\rangle \lambda \langle x\rangle$. За теоремою 2.2 з [15] $N_1 \lhd G$. Звідси $C \bigcap N_1 = \langle a\rangle \lhd C$, що неможливо. Отже, $[a, x] = 1$. Не порушуючи загальності можна вважати, що $R = \langle b\rangle$. Покладемо $a^3 = c$ і $N = C \lambda \langle x\rangle$. Тоді $\langle c\rangle \lhd N$, N — ненільпотентна група, $\Phi(C) = w(C) \leq A$, $A / \Phi(C) \lhd N / \Phi(C)$. За теоремою Машке [17] $C/\Phi(C) = A/\Phi(C) \times Y/\Phi(C)$, де $|Y/\Phi(C)| = 3$, $[Y/\Phi(C), \langle x\Phi(C)\rangle] \leq$ $\leq Y/\Phi(C)$. Звідси $[Y, \langle x\rangle] \leq Y$. В N існує підгрупа $N_1 = Y \lambda \langle x\rangle$. Ясно, що $[C:$ $Y] = 3$ і всі підгрупи з C метациклічні, $|Y| = 27$, $\Phi(C) = \langle b\rangle \times \langle c\rangle \leq Y$, $c \in$ $\in Z(N_1)$, $Y/\langle c\rangle$ — абелева група. Звідси $Y' \leq \langle c\rangle$. В підгрупі C всі максимальні підгрупи, окрім A, неабелеві. Тому $Y = \langle y\rangle \lambda \langle b\rangle$, $|y| = 9$, $y^3 = c$. За теоремою Машке [17] $Y/\langle c\rangle = \langle b\langle c\rangle\rangle \times Z/\langle c\rangle$, де $[Z/\langle c\rangle, \langle x\langle c\rangle\rangle] \leq Z/\langle c\rangle$. Звідси $Y = Z \lambda \langle b\rangle$, $[Z, \langle x\rangle] \leq Z$. Оскільки Y — метациклічна група, то $Z = \langle z\rangle$, $|z| = 9$, $z^3 = c$. Оскільки $[c, x] = 1$, то за відомим результатом [19] $[z, x] = 1$. Очевидно, що $C = A\langle z\rangle$. Знову в силу відомого результату [19] $[a, x] = [z, x] =$ $= 1$. Звідси випливає, що $[C, \langle x\rangle] = 1$, що не так. Отже, G не може містити примарних мінімальних неметациклічних підгруп і тому всі силовські підгрупи з G метациклічні. Лема доведена.

Теорема. *Ненільпотентні локально ступінчасті УЩН[ ]-групи* G *є скінченними дисперсивними групами та вичерпуються групами таких типів*:

I. *Метагамільтонові групи*:

i) *метациклічні*:

1) $G = (\langle a\rangle \lambda \langle b\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = p$ — *непарне просте число*, $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, q *і* r — *прості числа*, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a\rangle, \langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $b^{q^2} \in$ $\in Z(G)$; *при* $z \neq 1$ $Z(G) = \langle b^q\rangle \times \langle z\rangle$; *при* $|z| = p$ $\beta < 3$;

2) $G = \langle a\rangle \lambda \langle b\rangle$, $|a| = p$ — *непарне просте число*, $|b| = qr$, q *і* r — *різні прості числа*, $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $[\langle a\rangle, \langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $Z(G) = 1$;

ii) *мінімальні неметациклічні ненадрозв'язні групи Шмідта*:

3) $G = P \lambda \langle x\rangle$ — *група Шмідта*, P — *група кватерніонів порядку* 8, $|x| \in$ $\in \{3, 9\}$;

4) $G = P \lambda \langle x\rangle$ — *ненільпотентна група Міллера – Морено*, P — *група типу* (p, p), $|x| \in \{q, q^2\}$, $Z(G) = \langle x^q\rangle$, 2 — *показник* p *за модулем* q, p *і* q — *різні прості числа*;

iii) *групи, що містять власні неметациклічні підгрупи*:

5) $G = P \lambda \langle x\rangle$, P — *елементарна абелева група порядку* p^{α}, $\alpha \in \{2, 3\}$, $|x| = qr$, p, q, r — *попарно різні прості числа*, α — *показник* p *за модулем* q, α — *показник* p *за модулем* r, $P \lambda \langle x^q\rangle$ *та* $P \lambda \langle x^r\rangle$ — *групи Міллера – Морено*;

6) $G = P \leftthreetimes \langle x \rangle$, P *— елементарна абелева група порядку* p^{α}, $\alpha \in \{2, 3\}$, $|x| = q^{\beta}$, $\beta \in \{2, 3\}$, α *— показник* p *за модулем* q, p *і* q *— різні прості числа,* $P \leftthreetimes \langle x^{q} \rangle$ *— група Міллера – Морено,* $\alpha + \beta < 6$;

7) $G = P \leftthreetimes \langle x \rangle$ *— група Шмідта,* $|P| = p^{3}$, $\exp(P) = p$, $|x| = q$, p *і* q *— різні прості числа*;

8) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = p$, $|x| = q$, $|z| = r$, p, q, r *— прості числа,* $p \neq q$, $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$ *— група Міллера – Морено,* 2 *— показник* p *за модулем* q, $p \neq 3$, $q > 2$;

II. *Неметагамільтонові групи*:

i) *метациклічні*:

9) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = pr$, p *і* r *— не обов'язково різні прості числа,* $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, q *— просте число,* $p \equiv 1 \pmod q$, $r \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $Z(G) = \langle b^{q} \rangle$;

10) $G = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle)\langle x \rangle$, $|a| = p$ *— непарне просте число,* $\langle z, x \rangle$ *— група кватерніонів порядку* 8, $x^{-1} a x = a^{-1}$;

11) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes (\langle x \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle)$, $|a| = p$ *— непарне просте число,* $|x| = q^{\beta}$, $\beta > 2$, $|z| = q$ — просте число, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x, z] = x^{q^{\beta - 1}}$, $[a, x^{q}] = [a, z] = 1$;

ii) *надрозв'язні мінімальні неметациклічні групи*:

12) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle z \rangle$, $|a| = |b| = p$ *— непарне просте число,* $|x| \in \{q, q^{2}\}$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^{q} \rangle$;

13) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p$ *— непарне просте число,* $|x| = q^{\beta}$, $\beta > 2$, $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle b \rangle] = \langle a \rangle$, $[\langle b \rangle, \langle x \rangle] = \langle b \rangle$, $Z(G) = \langle b^{q} \rangle$, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ *— квазіцентральна підгрупа з* G;

14) $G = \langle a \rangle \leftthreetimes (\langle x \rangle \leftthreetimes \langle z \rangle)$, $|a| = p$ *— непарне просте число,* $|x| = q^{2}$, $|z| = q$ *— непарне просте число,* $p \equiv 1 \pmod q$, $[\langle a \rangle, \langle x \rangle] = \langle a \rangle$, $[x, z] = x^{q}$, $[a, x^{q}] = [a, z] = 1$;

iii) *групи, що містять власні неметациклічні підгрупи*:

15) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|a| = |b| = p^{2}$, p *— просте число,* $p \neq 3$, $|x| = q$ *— просте число,* 2 *— показник* p *за модулем* q, $(\langle a^{p} \rangle \times \langle b^{p} \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$ *— ненільпотентна група Міллера – Морено*;

16) $G = (R \times P) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $|R| = r$, $|P| = p^{2}$, $|x| = q$, p, q *і* r *— попарно різні прості числа,* $p \equiv 1 \pmod q$, 2 *— показник* p *за модулем* q, $q > 2$, $R \leftthreetimes \langle x \rangle$ *і* $P \leftthreetimes \langle x \rangle$ *— ненільпотентні групи Міллера – Морено*;

17) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$ *— ненадрозв'язна група Фробеніуса,* $|a| = |b| = p$ *— непарне просте число,* $|x| = qr$, q *і* r *— не обов'язково різні прості числа,* $p \equiv 1 \pmod q$, $p \equiv 1 \pmod r$, $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x^{q} \rangle$ *та* $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x^{r} \rangle$ *— мінімальні неметациклічні групи.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай G задовольняє умову теореми. Якщо G — метациклічна група, то вона задовольняє умову леми 2 і є групою одного з типів 1 – 5 згаданої леми, а тому G — група одного з типів 9, 1, 2, 10, 11 розглядуваної теореми. В подальшому будемо вважати, що G — неметациклічна група. Оскільки G — ненільпотентна група, то вона містить підгрупи Шмідта. Можливі випадки: 1) G містить ненадрозв'язну підгрупу Шмідта; 2) всі підгрупи Шмідта з G надрозв'язні.

Випадок 1. У цьому випадку G задовольняє умову леми 1 і може бути групою одного з типів 1 – 8 згаданої леми. Тоді G — група одного з типів 15, 16, 3 – 8 розглядуваної теореми відповідно.

Випадок 2. Якщо всі власні підгрупи з G метациклічні, то G задовольняє умову леми 3 і може бути лише групою одного з типів 1 – 3 згаданої леми. Тому G — група одного з типів 12 – 14 розглядуваної теореми.

Нехай G містить власні неметациклічні підгрупи. За лемою 5 мінімальні неметациклічні підгрупи з G не можуть бути нільпотентними групами. Звідси G задовольняє умову леми 4 і тому G — група типу 17 розглядуваної леми. Всі випадки розглянуто. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай G — група одного з типів 1 – 17 теореми. Зрозуміло, що G — ненільпотентна локально ступінчаста і навіть скінченна дисперсивна група. Покажемо, що G — УЩН[ ]-група. Дійсно, для метациклічних груп це встановлено в лемі 2, для груп G, що мають ненадрозв'язні групи Шмідта, — в лемі 1, для груп G типів 12 – 14 — в лемі 3, а для груп G типу 17 — в лемі 4. Достатність доведена. Теорема доведена.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. *Best E., Taussky O.* A class of groups // Proc. PJA. Sect. A. – 1942. – **47**. – P. 55–62.
3. *Абрамовский И. Н., Каргаполов М. И.* Конечные группы со свойством транзитивности для нормальных делителей // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, вып. 3(81). – С. 242–243.
4. *Robinson D.* Groups in which normality is a transitive relation // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1964. – **60**. – P. 21–38.
5. *Пылаев В. В.* Конечные группы с обобщенно плотной системой субнормальных подгрупп // Исследования по теории групп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 111–139.
6. *Курдаченко Л. А., Горецкий В. Э.* Группы с плотной системой почти нормальных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 1. – С. 42–46.
7. *Горецкий В. Э.* Группы с плотной системой бесконечных инвариантных абелевых подгрупп // Теоретико-групповые исследования. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 127–138.
8. *Курдаченко Л. А., Кузенный Н. Ф., Пылаев В. В.* Бесконечные группы с обобщенно плотной системой инвариантных подгрупп // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 3. – С. 407–410.
9. *Mann A.* Groups with dense normal subgroups // Isr. J. Math. – 1968. – **6**, № 1. – P. 13–25.
10. *Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф.* Конечные ненильпотентные группы с обобщенно плотной системой инвариантных подгрупп. – Киев, 1980. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 19-25-80.
11. *Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф.* Конечные группы с плотной системой нормальных подгрупп. // XIV Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1977. – С. 57–58.
12. *Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф.* Конечные нильпотентные группы со строго плотной системой инвариантных подгрупп // VI Всесоюз. симп. по теории групп: Тез. докл. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 49–50.
13. *Кузенный Н. Ф., Пылаев В. В.* Конечные ненильпотентные группы со строго плотной системой инвариантных подгрупп ранга 1 и 2 // XV Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. докл. – Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1979. – С. 84–85.
14. *Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф.* Конечные ненильпотентные группы со строго плотной системой инвариантных подгрупп ранга 3 // Там же. – С. 126.
15. *Семко М. М.* Про будову груп з умовами щільності нормальності для підгруп. – Київ, 1996. – 67 с. – Деп. в ДНТБ України, № 743-Ук-96.
16. *Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Метагамільтонові групи та їх узагальнення. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – 232 с.
17. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп: 3-е изд. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
18. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. – М.: Наука, 1967. – 111 с.
19. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.

Одержано 04.07.95