УДК 519.21

В. О. Гасаненко (Ін-т математики НАН України, Київ)

МАЛІ ВІДХИЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ТРУБЧАСТИХ ОБЛАСТЯХ

We present an algorithm for the determination of a complete asymptotic expansion of the sojourn probability of a one-dimensional diffusion process in a thin domain with curvilinear boundary.

Наведено алгоритм для визначення повного асимптотичного розвинення ймовірності перебування одновимірного дифузійного процесу у вузькій області з криволінійними границями.

Дослідження з асимптотичного аналізу ймовірності перебування дифузійного процесу у вузькій трубчастій області традиційно спираються на два підходи: ймовірнісний та аналітичний. При ймовірнісному підході [1] застосовується так званий метод заміни міри, який зводить задачу для дифузійних процесів до задачі перебування вінерівського процесу у вузькій смузі. В [1] одержано результати стосовно головного члена асимптотики. Аналітичний підхід пов'язаний з тим фактом, що математичне сподівання деяких функціоналів від моменту виходу з трубчастих областей є розв'язком рівнянь у частинних похідних з граничними умовами для цих областей. Використовуючи цей зв'язок у зворотньому напрямку, тобто аналізуючи відповідні граничні задачі у частинних похідних, ми одержуємо твердження для ймовірностей перебування. У такий спосіб були отримані результати для головного члена асимптотики дифузійного процесу в [2, 3] та для повного асимптотичного розвинення ймовірності перебування для вінерівського процесу в [4, 5]. У даній роботі аналітичним методом визначено алгоритм повного асимптотичного розвинення ймовірності перебування для дифузійного процесу.

Нехай задано функції $G_1(t)$ (нижня границя) та $G_2(t)$ (верхня границя) такі, що виконуються співвідношення

$$G_1(t) < G_2(t), \quad t \geq 0, \quad G_1(0) < 0 < G_2(0).$$

Далі розглянемо випадковий процес $\xi(t)$, який задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))\, d(t) + \sigma(t, \xi(t))\, d\omega(t), \quad \xi(0) = x, \tag{1}$$

для всіх t таких, що $G_1(t) < \xi(t) < G_2(t)$ та $\xi(t) = G_i(t)$ для $t > t'$, коли $\xi(t') = G_i(t')$.

Такий процес має назву випадкового дифузійного процесу з поглинанням. Теорема про існування такого процесу міститься в ([5], § 22). Умови подальших теорем будуть забезпечувати відповідні достатні умови згаданої теореми існування.

У даній роботі буде досліджуватися момент поглинання

$$\tau = \inf\{s : \xi(s) \overline{\in} D_s\}, \quad D_s = [G_1(s), G_2(s)], \quad \xi(0) = 0.$$

Розглянемо перетворення

$$D = \{(x, t) \colon G_1(t) < x < G_2(t),\ t \geq 0\}$$

в область з границями, незалежними від часу $L = \{(x, t) \colon 0 \leq x \leq 1,\ t \geq 0\}$, тобто в смугу з верхньою границею $G_2(t) = 1$ та з нижньою $G_1(t) = 0$. Це перетворення може здійснювати функція $f(t, x) = (x - G_1(t)) / G(t)$, де $G(t) = G_2(t) - - G_1(t)$, $x \in D_t$.

Таким чином, процес $\eta = f(t, \xi(t))$ є процесом з поглинанням у області L. Отримаємо для процесу $\eta(t)$ стохастичне диференціальне рівняння. Для цього необхідна обернена до $f(t, x)$ функція. Тобто така функція $p(t, x)$, що $f(t,$

© В. О. ГАСАНЕНКО, 1997

$p(t, x)) = x$, $x \in [0, 1]$, та $p(t, f(t, y)) = y$, $y \in [G_1(t), G_2(t)]$. Очевидно, що $p(t, x) = xG(t) + G_1(t)$, $x \in [0, 1]$.

Припустимо, що функції $G_i(t)$, $i = 1, 2$, мають обмежені другі похідні. Тоді, застосовуючи формулу Іто, для процесу $\eta(t)$ маємо стохастичне диференціальне рівняння

$$d\eta(t) = \overline{a}(t, \eta(t))\,dt + \overline{\sigma}(t, \eta(t))\,dw(t), \qquad \eta(0) = -\frac{G_1(0)}{G(0)}, \tag{2}$$

де

$$\overline{a}(t, x) = f_t(t, p(t, x)) + f_x(t, p(t, x))\,a(t, p(t, x)),$$
$$\overline{\sigma}(t, x) = f_x(t, p(t, x))\,\sigma(t, p(t, x)).$$

Умови гладкості границь гарантують існування процесу $\eta(t)$, який задовольняє (2), з поглинанням на границі області L.

Позначимо через τ момент поглинання для процесу $\eta(t)$:

$$\tau = \inf\{s : \eta(s) \overline{\in} L\}, \qquad \eta(0) = y = -\frac{G_1(0)}{G(0)}.$$

Як відомо, $P(\tau > T)$ дорівнює $u(T, y)$, де $u(t, z)$, $0 \le t \le T$, $z \in [0, 1]$, є розв'язком початково-граничної задачі

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, z) = \overline{a}(T - t, z)\frac{\partial}{\partial z}u(t, z) + \frac{1}{2}\overline{\sigma}^2(T - t, z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}u(t, z), \tag{3}$$
$$u(0, z) = 1, \quad z \in (0, 1); \quad u(t, 1) = u(t, 0) = 0, \quad 0 \le t \le T.$$

Розглянемо вузьку область $D_\varepsilon = \{(x, t) : \varepsilon G_1(t) < x < \varepsilon G_2(t),\ t \ge 0\}$.

Виходячи з означення функцій $\overline{a}$, $\overline{\sigma}$, у цьому разі функція розподілу моменту поглинання визначається рівністю $P(\tau_{\varepsilon, y} > T) = u_\varepsilon(T, y)$. Тут $u_\varepsilon(t, z)$ є розв'язком задачі (3) у випадку, коли коефіцієнти $\overline{a}$, $\overline{\sigma}$ залежать від параметра ε:

$$\overline{a}_\varepsilon(T - t, z) = -\frac{\dot{g}(t)}{g(t)}z - \frac{\dot{g}_1(t)}{g(t)}(+) + \varepsilon^{-1}\frac{a(T - t, \varepsilon(zg(t) + g_1(t)))}{g(t)},$$
$$\overline{\sigma}_\varepsilon(T - t, z) = \frac{\sigma(T - t, \varepsilon(zg(t) + g_1(t)))}{g(t)\varepsilon},$$

де $g_i(t) = G_i(T - t)$, $i = 1, 2$; $g(t) = g_2(t) - g_1(t)$.

Таким чином, для розкладу $u_\varepsilon(T, y)$ ми повинні отримати розвинення розв'язку (3) з коефіцієнтами $\overline{a}_\varepsilon$, $\overline{\sigma}^2_\varepsilon$ у точці (T, y). Необхідний розклад одержуємо методом вичерпування. Для демонстрування алгоритму припустимо, що функції $G_i(t)$, $a(t, x)$, $\sigma(t, x)$ є аналітичними.

Позначимо

$$a_k(t) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}a(T - t, 0); \qquad \sigma_k(t) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\sigma^2(T - t, 0).$$

Тоді маємо

$$a(T - t, \varepsilon(zg(t) + g_1(t))) = \sum_{k \ge 0} a_k(t)\varepsilon^k(zg(t) + g_1(t))^k,$$
$$\sigma^2(T - t, \varepsilon(zg(t) + g_1(t))) = \sum_{k \ge 0} \sigma_k(t)\varepsilon^k(zg(t) + g_1(t))^k. \tag{4}$$

Зробимо регуляризаційне перетворення

$$u_\varepsilon(t,z) = \exp\left(\int_0^t\left(-\varepsilon^{-2}f(s)-\varepsilon^{-1}\varphi(s)+\sum_{k\ge 0}\varepsilon^k\alpha_k(s)\right)ds\right)v_\varepsilon(t,z).$$

Надалі, коли це не буде викликати непорозумінь, будемо опускати в функціях позначення аргументів. Для v_ε маємо задачу

$$-\varepsilon^{-2}fv_\varepsilon-\varepsilon^{-1}\varphi v_\varepsilon+\sum_{k\ge 0}\varepsilon^k\alpha_k v_\varepsilon+\frac{\partial}{\partial t}v_\varepsilon = \overline{a}_\varepsilon(T-t,z)\frac{\partial}{\partial z}v_\varepsilon+\frac{1}{2}\overline{\sigma}_\varepsilon^2(T-t,z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}v_\varepsilon,$$

$$v_\varepsilon(0,z) = 1,\quad z\in(0,1);\quad v_\varepsilon(t,1) = v_\varepsilon(t,0) = 0,\quad t\in[0,T]. \tag{5}$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді

$$v_\varepsilon(t,z) = \sum_{k\ge 0}\varepsilon^k v_k(t,z). \tag{6}$$

Тепер підставимо (4) та (6) у (5). Коли порівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε у лівій та правій частинах (4) та перенесемо відповідно граничні та початкові умови, тоді будемо мати систему задач для визначення функцій v_k з (6). Позначимо через $B(t)$, $t\ge 0$, оператор, який діє на функції з класу $C^2(0,1)$ за формулою

$$B(t)\psi(z) = -f(t)\psi(z)-\frac{\sigma_0(t)}{2g^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi(z).$$

Тепер вказана система має вигляд

$$B(t)v_0 = 0,\quad v_0(t,0) = v_0(t,1) = 0;\quad v_0(0,z) = 1,\quad z\in(0,1);$$

$$B(t)v_1 = \frac{1}{2g^2}\sigma_1(zg+g_1)\frac{\partial^2}{\partial z^2}v_0+\frac{a_0}{g}\frac{\partial}{\partial z}v_0+\varphi v_0;$$

$$v_1(t,0) = v_1(t,1) = 0;\quad v_1(0,z) = 1,\quad z\in(0,1); \tag{7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B(t)v_k = \frac{1}{2g^2}\sum_{l=0}^{k-1}\sigma_{k-l}(zg+g_1)^{k-l}\frac{\partial^2}{\partial z^2}v_l-\frac{\dot g_1}{g}\frac{\partial}{\partial z}v_{k-2}+$$

$$+\frac{1}{g}\sum_{l=0}^{k-1}a_{k-1-l}(zg+g_1)^{k-1-l}\frac{\partial}{\partial z}v_l-\frac{\dot g}{g}z\frac{\partial}{\partial z}v_{k-2}-\frac{\partial}{\partial t}v_{k-2}+\varphi v_{k-1}+\sum_{l=0}^{k-2}\alpha_l v_{k-2-l},$$

$$v_k(t,0) = v_k(t,1) = 0;\quad v_k(0,z) = 0,\quad z\in(0,1);\quad 0\le t\le T.$$

Перша задача з (7) має розв'язок тоді і лише тоді, коли $-f(t)$ дорівнює одному з власних чисел задачі

$$\frac{\sigma_0}{2g^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}l(t,z) = \lambda l(t,z),\quad l(t,0) = l(t,1) = 0.$$

Виходячи з того, що власні функції останньої задачі мають вигляд $\sin i\pi z$, $i\ge 1$, маємо

$$f(t) = f_i(t) = (i\pi)^2\frac{\sigma_0(t)}{2g^2(t)},\quad i\ge 1.$$

За допомогою системи (7) отримаємо вираз для головного члена асимптотики $P_\varepsilon(T) = P(\tau_\varepsilon > T)$. Для формулювання теореми означимо деякі функції. Функція-індикатор для додатних чисел має вигляд

$$\omega_{im} = \begin{cases} 0, & i+m \text{ — парне число,} \\ 1, & i+m \text{ — непарне число.} \end{cases}$$

Далі,

$$\gamma_i(t) = \frac{\sigma_1 (i\pi)^2 (g_1 + g_2)}{4g^2};$$

$$r_{mi}(t) = \left(\frac{2g\sigma_1 m i^3}{(m-i)^2(m+i)^2} + \frac{a_0 g 4m}{\pi(m^2-i^2)} \right) \left(\frac{1}{\sigma_0 \pi (m^2 - i^2)} \right);$$

$$\Phi_i(t) = -\frac{\sigma_2}{2g^2}\left((i\pi g_2)^2 - \frac{g}{2}\right) - \frac{\sigma_1}{g} \sum_{m \ge 0,\, m \ne i} \omega_{im} r_{im} \frac{2m^3 i}{(m-i)^2(m+i)^2} -$$

$$- \frac{a_0}{g} \sum_{m \ge 0,\, m \ne i} \omega_{im} r_{im} \frac{2im}{m^2 - i^2} - \frac{a_1}{2} + \frac{\dot{g}}{2g}.$$

Теорема 1. *Якщо виконуються наступні умови:*

1) *функції* $G_i(t)$, $i = 1, 2$, *мають перші обмежені похідні*;

2) $\sup\limits_{0 \le t \le T} \left(|a_1(t)| + |\sigma_2(t)| \right) < \infty$;

тоді має місце асимптотичне зображення

$$P_\varepsilon(T) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \exp\left(-\int_0^T \left(\left(\varepsilon^{-2} \frac{\pi^2 \sigma^2(x,0)}{2G^2(x)} + \varepsilon^{-1} \gamma_1(x) + \Phi_1(x) \right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \pi \gamma_1(x) \right) dx \right) \times$$

$$\times \sin\left(-\frac{G_1(0)}{G(0)} \pi \right) (1 + \varepsilon K_\varepsilon(T)),$$

при цьому $\sup_\varepsilon |K_\varepsilon(T)| < \infty$.

Доведення. Система власних функцій $\{\sqrt{2} \sin k\pi z = l_k(z),\ k \ge 1\}$ оператора $\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ є повною ортонормованою системою на множині функцій з $C^2(0, 1)$ з нулями на границі. Виходячи з типу задач системи (7), ми будемо шукати їх розв'язки у вигляді розкладів за системою функцій $l_k(z)$.

Далі, система задач (7) повинна розв'язуватися при кожному фіксованому власному числі $f_i(t)$. Таким чином, загальний розв'язок $u_\varepsilon(t, z)$ має вигляд

$$u_\varepsilon(t,z) = \sum_{i \ge 1} \exp\left(-\int_0^t \left(\varepsilon^{-2} f_i(x) + \varepsilon^{-1} \varphi_i(x) - \sum_{m \ge 0} \varepsilon^m \alpha_{i,m}(x) \right) dx \right) \sum_{k \ge 0} \varepsilon^k v_{k,i}(t,z). \tag{8}$$

З останнього випливає, що для визначення головного члена розкладу $P_\varepsilon(T)$ достатньо обчислити функції $v_{0,1}(t, z)$, $\varphi_1(x)$, $\alpha_{1,0}(x)$ та отримати оцінку наближення.

При фіксованому k перша задача з (7) має розв'язок $b_k(t) \sin k\pi z$. Функцію $b_k(t)$ визначимо за умов розв'язку подальших задач з (7). У той же час, виходячи з (8) та початкової умови $v_0(0, z) = 1$, значення $b_k(0)$ дорівнює коефіцієнту при k-й власній функції $l_k(z)$ у розкладі одиниці

$$1 = \sum_{k \ge 1} v_{0,k}(0,z) = \sum_{k \ge 1} b_k(0) l_k(z),$$

звідки маємо $b_k(0) = 2\sqrt{2}/k\pi$, коли k непарне, та $b_k(0) = 0$, коли k парне.

Розв'язок k-ї задачі з (7) при фіксованому i-му власному числі $f_i(t)$ будемо шукати у вигляді

$$v_{k,i}(t,z) = \sum_{m\geq 1} c_{m,k}^{(i)}(t) l_m(z). \tag{9}$$

Обчислимо функцію $v_{1,i}(t,z)$. Підставимо вираз для $v_{1,i}(t,z)$ з (9) в операторну частину другої задачі з (7). Надалі домножимо праву та ліву частину рівняння цієї задачі на $l_m(z)$ та проінтегруємо на проміжку $[0, 1]$. У такий спосіб визначимо коефіцієнти $c_{m,1}^{(i)}(t)$. Праву частину рівняння другої задачі позначимо

$$\beta_{1,i}(t,z) = \frac{\sigma_1(zg+g_1)}{2g^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}v_{0,i} + \frac{a_0}{g}\frac{\partial}{\partial z}v_{0,i} + \varphi_i v_{0,i}.$$

Тоді, коли $m \neq i$,

$$c_{m,1}^{(i)}(t) = \frac{2g^2}{\sigma_0\big((m\pi)^2-(i\pi)^2\big)}\int_0^1 l_m(z)\beta_{1,i}(t,z)\,dz = b_i(t)\omega_{im}r_{im}, \tag{10}$$

При $m = i$ маємо невизначений коефіцієнт $c_{i,1}^{(i)}(t)$. Цю функцію обчислимо за умов розв'язку третьої задачі та початкових умов другої задачі з (7). Далі, функцію $\varphi_i(t)$ визначимо за умови

$$\int_0^1 l_i(z)\beta_{1,i}(t,z)\,dz = b_i(t)\left(-\frac{\sigma_1(t)(i\pi)^2(g_2(t)+g_1(t))}{4g^2(t)} + \varphi_i(t)\right) = 0. \tag{11}$$

Позначино через $\beta_{2,i}(t,z)$ праву частину рівняння третьої задачі з (7). З ортогональності $l_i(z)$ та $\beta_{2,i}(t,z)$ випливає співвідношення

$$\int_0^1 l_i(z)\beta_{2,i}(t,z)\,dz = b_i(t)\Phi_i(t) - \dot{b}(t) + \varphi_i(t) + \alpha_{0,i}(t)b_i(t) -$$

$$- c_{i,1}^{(i)}(i\pi)^2\,\sigma_1(t)\left(\frac{g_1(t)+g_2(t)}{4g^2(t)}\right) \equiv 0. \tag{12}$$

Забезпечимо тотожність (12) наступним чином. Функція $b_i(t)$ задовольняє рівняння $\dot{b}_i(t) = \Phi_i(t)b_i(t)$, $b_i(0) = 2\sqrt{2}(i\pi)^{-1}\omega_{i0}$. А функція $c_{i,1}^{(i)}(t)$, у свою чергу, задовольняє рівняння

$$c_{i,1}^{(i)}(i\pi)^2\,\sigma_1\frac{g_1+g_2}{4g^2} = \varphi_i + \alpha_{0,i}(t)b_i. \tag{13}$$

Таким чином, $b_i(t) = \exp\left(\Phi_i(t)\right)b_i(0)$.

Далі, виходячи зі згаданого вигляду $\varphi_i(t)$, що визначається співвідношенням (11), та уникаючи ділення на нуль, функцію $\alpha_{0,i}(t)$ будемо шукати у вигляді $(i\pi)^2\sigma_1(g_1+g_2)\alpha_{0,i}/g^2$. Константу $\alpha_{0,i}$ визначимо з початкових умов для $v_{1,i}(t,z)$. При $t = 0$ маємо

$$\sum_{i\geq 1} v_{1,i}(0,z) = \sum_{i\geq 1}\sum_{m\geq 1} c_{m,1}^{(i)}(0)l_m(z) = 0.$$

Звідси

$$c_{i,1}^{(i)}(0) = \sum_{j\neq i} c_{i,1}^{(j)}(0).$$

Виходячи з останньої рівності та (10), маємо

$$c_{i,1}^{(i)}(0) = \begin{cases} 0, & i \text{ непарне}, \\ -\sum\limits_{k \geq 0} c_{i,1}^{(2k+1)}(0), & i \text{ парне}. \end{cases} \tag{14}$$

Далі, з того, що $b_i(t) \equiv 0$, коли i парне, маємо свободу вибору функції $\varphi_i(t)$ стосовно тотожності (11) для парних i.

Підсумовуючи наведені міркування, визначаємо шукані функції:

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \gamma_i(t), & i \text{ непарне}, \\ \gamma_i(t)\left(-\sum\limits_{k \geq 0} c_{i,1}^{(2k+1)}(0)\right), & i \text{ парне}, \end{cases}$$

$$\alpha_{0,i}(t) = \begin{cases} -\gamma_i(t) b_i^{-1}(0), & i \text{ непарне}, \\ 0, & i \text{ парне}, \end{cases}$$

$$c_{i,1}^{(i)}(t) = \begin{cases} 1 - b_i(t) b_i^{-1}(0), & i \text{ непарне}, \\ -\sum\limits_{k \geq 0} c_{i,1}^{(2k+1)}(0), & i \text{ парне}. \end{cases}$$

Такий набір функцій задовольняє умови (10) – (14).

Таким чином, ми побудували функції $v_{0,i}(t, z)$, $v_{1,i}(t, z)$, $i \geq 1$. Для завершення доведення теореми оцінимо наближення $u_\varepsilon - v_{0,\varepsilon}$, де

$$v_{0,\varepsilon}(t, z) = \sum_{i \geq 1} \exp\left\{ \int_0^t \left(-\varepsilon^{-2} f_i(x) - \varepsilon^{-1} \varphi_i(x) + \alpha_{0,i}(x) \right) dx \right\} v_{0,i}(t, z).$$

Зробимо заміну змінних

$$u_\varepsilon = \exp\left\{ \int_0^t \left(-\varepsilon^{-2} f_1 - \varepsilon^{-1} \varphi_1 + \Phi_1 + \alpha_{0,1} \right) dx \right\} v_\varepsilon.$$

Отже, v_ε є розв'язком задачі

$$-f_1 v_\varepsilon - \varepsilon \varphi_1 v_\varepsilon + \varepsilon^2 (\Phi_1 + \alpha_{0,1}) v_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial t} v_\varepsilon +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{g}(\varepsilon \dot{g}_1 - a(T - t, \varepsilon(zg + g_1)) + \varepsilon \dot{g} z) \frac{\partial}{\partial z} v_\varepsilon - \frac{1}{2g^2} \sigma^2 (T - t, \varepsilon(zg + g_1)) \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0,$$

$$v_\varepsilon(0, z) = 1, \quad z \in (0, 1); \quad v_\varepsilon(t, 1) = v_\varepsilon(t, 0) = 0.$$

Позначимо

$$m_i(\varepsilon, t) = \int_0^t \left(-\varepsilon^{-2}(f_i - f_1) - \varepsilon^{-1}(\varphi_i - \varphi_1) + (\Phi_i - \Phi_1) + (\alpha_{0,i} - \alpha_{0,1}) \right) dx.$$

Далі,

$$u_\varepsilon - v_{0,\varepsilon} = \exp\left(\int_0^t \left(-\varepsilon^{-2} f_1 - \varepsilon^{-1} \varphi_1 + \Phi_1 + \alpha_{0,1} \right) dx \right) r_\varepsilon,$$

де

$$r_\varepsilon(t, z) = v_\varepsilon(t, z) - \sum_{i \geq 1} b_i \exp\left(m_i(\varepsilon, t)\right) l_i(z).$$

Зобразимо $\sigma^2(T - t, \varepsilon(zg + g_1))$ першим наближенням при $\varepsilon \to 0$:

$$\sigma^2(T-t, \varepsilon(zg+g_1)) = \sigma^2(T-t, 0) + \sigma_1(T-t, \theta\varepsilon(zg+g_1))\varepsilon(zg+g_1),$$

де $\theta \in [0, 1]$.

З означення для r_ε маємо початково-граничну задачу

$$-f_1 r_\varepsilon - \varepsilon\varphi_1 v_\varepsilon + \varepsilon^2\left(\Phi_1 + \alpha_{0,1} + \frac{\partial}{\partial t}\right) r_\varepsilon +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{g}(\varepsilon\dot{g}_1 - a(T-t, \varepsilon(zg+g_1)) + \varepsilon\dot{g}z)\frac{\partial}{\partial z} r_\varepsilon - \frac{\sigma^2(T-t, \varepsilon(zg+g_1))}{2g^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} r_\varepsilon =$$

$$= -f_1 \sum_{i\ge 2} \exp(m_i(\varepsilon, t)) l_i(z) + \varepsilon\varphi_1 \sum_{i\ge 1} \exp(m_i(t)) l_i(z) +$$

$$+ \varepsilon^2(\Phi_1 + \alpha_{0,1}) \sum_{i\ge 1} \exp(m_i(\varepsilon, t)) l_i(z) + \varepsilon^2 \sum_{i\ge 2} m_i(\varepsilon, t) \exp(m_i(\varepsilon, t)) l_i(z) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{g}(\dot{g}_1 - a(T-t, \varepsilon(zg+g_1)) - \varepsilon\dot{g}z) \sum_{i\ge 1} \exp(m_i(\varepsilon, t))\sqrt{2}(i\pi)\cos i\pi z -$$

$$- \varepsilon\frac{\sigma_1(T-t, \theta\varepsilon(zg+g_1))(zg+g_1)}{2g^2} \sum_{i\ge 1} (i\pi)^2 \exp(m_i(\varepsilon, t)) l_i(z) -$$

$$- \frac{\sigma^2(T-t, 0)}{2g^2} \sum_{i\ge 2} (i\pi)^2 \exp(m_i(\varepsilon, t)) l_i(z),$$

$$r_\varepsilon(0, z) = 0, \quad z \in (0, 1); \quad r_\varepsilon(t, 0) = r_\varepsilon(t, 1) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{15}$$

Аналізуючи праву частину (15), робимо висновок, що для $t \ge t_1 > 0$ вона має зображення $\varepsilon K_\varepsilon(t, z)$, де

$$\max_{(t, z, \varepsilon)} |K_\varepsilon(t, z)| < C < \infty.$$

Відомо, що розв'язок (15) існує та єдиний. Одержимо апріорну оцінку $r_\varepsilon(t, z)$ в деякому околі $Q \subset L$ точки (T, y). Нехай точка $(t_0, z_0) \in Q$ є точка максимуму функції r_ε в околі Q. Тоді в цій же точці виконуються співвідношення

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} r_\varepsilon \le 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} r_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial z} r_\varepsilon = 0.$$

Далі, спираючись на останнє та на (15), маємо

$$r_\varepsilon(t_0, z_0) \le \varepsilon\frac{K_\varepsilon(t_0, z_0)}{-f_1(t_0) - \varepsilon\varphi_1(t_0) + \varepsilon^2\left(\Phi_1(t_0) + \alpha_{0,1}(t_0)\right)}.$$

Аналогічно отримуємо оцінку знизу мінімуму r_ε. Таким чином,

$$\max_{(t, z)\in Q} |r_\varepsilon(t, z)| \le \varepsilon C_1 C.$$

Стала C_1 при достатньо малих ε не перевищує величини $2\max_{t\in Q} f_1^{-1}(t)$. Теорему доведено.

Далі одержимо інше зображення головного члена асимптотики ймовірності перебування дифузійного процесу у вузькій смузі. Визначення цього зображення базується на застосуванні перетворення області D у область L, запропонованого в ([5], § 22).

Розглянемо це перетворення. Припустимо, що для всіх $(t, x) \in D$ $\sigma(t, x) > 0$. Далі, якщо $x \in [G_1(0), G_2(0)]$, то покладемо

$$b_2(t) = \int_{G_1(t)}^{G_2(t)} \sigma^{-1}(t, y)\,dy, \quad b_1(t) = 0, \quad f(t, x) = \int_{G_1(t)}^{x} \sigma^{-1}(t, y)\,dy.$$

Через $\varphi(t, x)$ позначимо функцію, обернену до $f(t, x)$ при кожному фіксованому t: $f(t, \varphi(t, x)) = x$, $x \in [0, b_2(t)]$. Покладемо $\nu(t) = f(t, \xi(t))$. З формули Іто випливає, що процес $\nu(t)$ задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$d\nu(t) = \overline{a}(t, \nu(t))\,dt + dw(t), \quad \nu(0) = f(0, 0),$$

де

$$\overline{a}(t, x) = f_t(t, \varphi(t, x)) + f_x(t, \varphi(t, x))\, a(t, \varphi(t, x)) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, \varphi(t, x))\sigma^2(t, \varphi(t, x)).$$

Зауважимо, що за такої заміни область D трансформується в область

$$\overline{D} = \{(t, x):\ t > 0,\ x \in [0, b_2(t)]\}.$$

Далі зробимо заміну часу $\overline{\nu}(t) = \nu(\lambda(t))\,b_2^{-1}(\lambda(t))$, де $\lambda(t)$ задовольняє рівняння

$$\int_0^{\lambda(t)} b_2^{-2}(s)\,ds = t.$$

Перетворення часової осі за допомогою функції $\lambda(t)$ приводить до трансформування проміжку $[0, T]$ у проміжок $\left[0, \int_0^T b_2^{-2}(s)\,ds\right]$. Це випливає з того факту, що функція, обернена до $\lambda(t)$, має вигляд

$$\lambda^{-1}(t) = \int_0^t b_2^{-2}(s)\,ds.$$

Останнє є наслідком ланцюжка рівностей

$$\lambda^{-1}(\lambda(t)) = t = \int_0^{\lambda(t)} b_2^{-2}(s)\,ds.$$

Після застосування формули Іто маємо стохастичне диференціальне рівняння

$$d\overline{\nu}(t) = -\frac{\nu(t) + \overline{a}(\lambda(t), b_2(\lambda(t))\nu(t))}{b_2(\lambda(t))}\dot{\lambda}(t)\,dt + dw(t), \quad \overline{\nu}(0) = \frac{f(0, 0)}{b_2(0)}.$$

Область $\overline{D}$ трансформується в область $L = \{(t, x):\ t \ge 0,\ x \in [0, 1]\}$. Процеси $\xi(t)$ та $\overline{\nu}(t)$ знаходяться у взаємно однозначній відповідності:

$$\overline{\nu}(t) = \frac{f(\lambda(t), \xi(t))}{b_2(\lambda(t))}.$$

Позначимо $\tau = \inf\{s:\ \nu(s) = \overline{\in} L\}$.

Для визначення $P(\tau > T)$ треба розв'язати задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, z) = a_1\left(\lambda^{-1}(T) - t, z\right)\frac{\partial}{\partial z}u(t, z) + \frac{\partial^2}{2\partial z^2}u(t, z),$$

$$u(0, z) = 1, \quad z \in (0, 1); \quad u(t, 0) = u(t, 1) = 0,$$

$$0 \le t \le \lambda^{-1}(T) = \int_0^T b_2^{-2}(s)\,ds, \tag{16}$$

де

$$a_1(y, z) = -\left(z + \overline{a}(\lambda(y)), z b_2(\lambda(t))\right) b_2(\lambda(t)),$$

та обчислити

$$u\left(\lambda^{-1}(T), \frac{f(0,0)}{b_2(0)}\right) = P(\tau > T).$$

У випадку, коли досліджуємо τ у вузькій області D_ε, тобто коли границі мають вигляд $\varepsilon G_i(T)$, $i = 1, 2$, тоді функція $a_1(\cdot, \cdot)$ також залежить від ε:

$$a_{1,\varepsilon}(y, z) = -\left(z + \overline{a}_\varepsilon(\lambda_\varepsilon(y)), z b_{2,\varepsilon}(\lambda_\varepsilon(y))\right) b_{2,\varepsilon}(\lambda(y)).$$

З'ясуємо залежність $a_{1,\varepsilon}$ від малих ε.

Лема. *Коли функції* $a(t, z)$, $\sigma^{-1}(t, y)$ *та* $G_i(t)$, $i = 1, 2$, *аналітичні відповідно в точках* $(0, 0)$ *та* (0), *тоді має місце асимптотичне розвинення*

$$a_{1,\varepsilon}(y, z) = \sum_{k \ge 1} a_k(y, z)\varepsilon^k, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Доведення. З'ясуємо послідовно залежність від $\varepsilon \to 0$ функцій b_ε, $\overline{a}_\varepsilon$, λ_ε. За означенням маємо

$$b_{2,\varepsilon}(t) = \int_{\varepsilon G_1(t)}^{\varepsilon G_2(t)} \sigma^{-1}(t, y)\,dy = \varepsilon \int_{G_1(t)}^{G_2(t)} \sigma^{-1}(t, \varepsilon z)\,dz. \tag{17}$$

Позначимо

$$\sigma_k(t) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}\left(\sigma^{-1}(t, y)\right)\Big|_{y=0}.$$

Маємо зображення

$$\sigma^{-1}(t, \varepsilon z) = \sum_{k \ge 1} \frac{\sigma_k(t)}{k!}(\varepsilon z)^k.$$

З (17) та останнього випливає рівність

$$b_{2,\varepsilon}(t) = \varepsilon \sum_{k \ge 0} \varepsilon^k \delta_k(t) =: \varepsilon \Psi_\varepsilon(t), \tag{18}$$

де

$$\delta_k(t) = \sigma_k(t) \frac{G_2^{k+1}(t) - G_1^{k+1}(t)}{(k+1)!}.$$

Розглянемо $\lambda_\varepsilon(t)$. Ця функція задовольняє

$$\int_0^{\lambda_\varepsilon(t)} b_{2,\varepsilon}^{-2}(s)\,ds = t$$

або

$$\int_0^{\lambda_\varepsilon(t)} \Psi_\varepsilon^{-2}(s)\,ds = \varepsilon^2 t. \tag{19}$$

З останньої рівності робимо висновок, що $\lambda_\varepsilon(t) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для кожного фіксованого відрізка $[0, T]$, $T < \infty$. Продиференціюємо праву та ліву частини рівняння (19).

Отримаємо еквівалентне рівняння $\dot{\lambda}_\varepsilon(t)\Psi_\varepsilon^{-2}(\lambda_\varepsilon(t)) = \varepsilon^2$, $\lambda_\varepsilon(0) = 0$.

Функцію $\lambda_\varepsilon(t)$ будемо шукати у вигляді $\sum_{k\geq 2} \lambda_k(t)\varepsilon^k$. Тепер отримаємо ланцюжок рівностей, які визначають коефіцієнти $\lambda_k(t)$:

$$\dot{\lambda}_\varepsilon(t) = \sum_{k\geq 2} \dot{\lambda}_k(t)\varepsilon^k = \varepsilon^2\left(\sum_{k\geq 0} \varepsilon_k \delta_k(\lambda_\varepsilon(t))\right)^2 =$$

$$= \varepsilon^2\left(\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \sum_{s\geq 0} \delta_k^{(s)}(0)\lambda_\varepsilon^s(t)\frac{1}{s!}\right)^2 = \varepsilon^2\left(\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \sum_{s\geq 0} \delta_k^{(s)}(0)\left(\sum_{m\geq 2} \varepsilon^k \lambda_m(t)\right)^s \frac{1}{s!}\right)^2. \quad (20)$$

Прирівнюючи вирази при однакових степенях ε^k у правій та лівій частинах (20), послідовно визначаємо $\lambda_k(t)$:

при ε^2: $\dot{\lambda}_2(t) = \delta_0(0)$,

при ε^4: $\dot{\lambda}_4(t) = \delta_1(0)$,

при ε^6: $\dot{\lambda}_6(t) = \lambda_2(t)\delta_0^{(1)}(0) + \delta_2(0)\frac{1}{3!}$.

Таким чином, зрозуміло, що у розкладі $\lambda_\varepsilon(t)$ присутні тільки парні степені ε та кожний коефіцієнт $\lambda_k(t)$ є многочленом від змінної t без вільного члена.

Тепер проаналізуємо $\overline{a}_\varepsilon\left(\lambda_\varepsilon\left(\lambda_\varepsilon^{-1}(T) - t\right), zb_{2,\varepsilon}\left(\lambda_\varepsilon\left(\lambda_\varepsilon^{-1}(T) - t\right)\right)\right)$. Після розвинення функцій, які визначають $\overline{a}_\varepsilon$, будемо мати зображення для $\overline{a}_\varepsilon$. Позначимо $\lambda_\varepsilon\left(\lambda_\varepsilon^{-1}(T) - t\right) = s_\varepsilon(t)$. З означення маємо

$$\overline{a}_\varepsilon(s_\varepsilon(t), zb_{2,\varepsilon}(s_\varepsilon(t))) = \varepsilon\dot{g}_1(s_\varepsilon(t))\sigma^{-1}(s_\varepsilon(t), \varepsilon g_1(s_\varepsilon(t))) +$$

$$+ \int\limits_{\varepsilon g_1(s_\varepsilon(t))}^{\varphi_\varepsilon(\varepsilon g_1(s_\varepsilon(t)),\, zb_{2,\varepsilon}(s_\varepsilon(t)))} \frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma^{-1}(s_\varepsilon(t), y)\right)dy + \sigma^{-1}\left(s_\varepsilon(t), \varphi_\varepsilon\left(s_\varepsilon(t), zb_{2,\varepsilon}(s_\varepsilon(t))\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma\left(s_\varepsilon(t), \varphi_\varepsilon\left(s_\varepsilon(t), zb_{2,\varepsilon}(s_\varepsilon(t))\right)\right)\right). \quad (21)$$

Далі, виходячи з означення функцій φ, f, b_2, можна стверджувати, що для довільного фіксованого $z \in [0, 1]$ існує таке $x \in [G_1(t), G_2(t)]$, що виконується рівність $zb_{2,\varepsilon}(s_\varepsilon(t)) = f_\varepsilon(s_\varepsilon(t), \varepsilon x)$.

Величина $x = x(z)$ визначається з рівняння

$$zb_{2,\varepsilon}(s_\varepsilon(t)) = \int\limits_{\varepsilon G_1(s_\varepsilon(t))}^{\varepsilon x} \sigma^{-1}(s_\varepsilon(t), y)\,dy.$$

Таким чином, $\varphi_\varepsilon\left(s(t), zb_{2,\varepsilon}(s_\varepsilon(t))\right) = \varepsilon x$.

З останнього та (21) при умові достатньої гладкості функцій G_i, a, σ^{-1} маємо асимптотичне зображення

$$\overline{a}_\varepsilon\left(s_\varepsilon(t), zb_{2,\varepsilon}(s_\varepsilon(t))\right) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \overline{a}_k(t, z).$$

Нарешті, коли перемножимо ряди асимптотичного розвинення $\overline{a}_\varepsilon$, $b_{2,\varepsilon}$, тоді будемо мати твердження леми.

У випадку вузької області розв'язок (15) будемо визначати у вигляді

$$u_\varepsilon(t, z) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k u_k(t, z).$$

Введемо оператори

$$B_0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \quad B_1 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Виходячи з леми, для визначення u_ε маємо задачу

$$B_0 \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k u_k(t, z) = \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k a_k(t, z) \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k B_1 u_k(t, z),$$

$$u_\varepsilon(0, z) = 1, \quad z \in (0, 1); \quad u_\varepsilon(t, 0) = u_\varepsilon(t, 1) = 0,$$

$$0 \leq t \leq \int_0^T b_{2,\varepsilon}^{-2}(s)\, ds.$$

З останнього маємо систему задач для послідовного визначення u_k:

$$B_0 u_0 = 0; \quad u_0(t, 0) = u_0(t, 1) = 0; \quad u_0(0, z) = 1, \quad z \in (0, 1).$$

$$B_0 u_k = \sum_{s=1}^{k} a_s B_1 u_{k-s}; \quad u_k(t, 0) = u_k(t, 1) = 0; \quad u_k(0, z) = 0,$$

$$0 \leq t \leq \int_0^T b_{2,\varepsilon}^{-2}(s)\, ds. \tag{22}$$

Використаємо формальну схему (22) для визначення головного члена асимптотики $P_\varepsilon(T)$. Позначимо

$$\mu_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon^2 \delta_0^2(t)} + \frac{2\delta_1(t)}{\varepsilon \delta_0^3(t)} + \frac{5\delta_1^2(t) + 2\delta_2(t)\delta_0(t)}{\delta_0^4(t)}.$$

Теорема 2. *У випадку, коли виконуються умови:*

1) $a(t, x)$ *та* $\sigma(t, x)$ *задовольняють умови існування єдиного розв'язку стохастичного диференціального рівняння* (1);

2) $\sigma(t, x) > 0$, $(t, x) \in D$;

3) $\sigma(t, x)$ *має третю, обмежену рівномірно відносно* t, *похідну у точці* $(t, 0)$, $0 \leq t \leq T$;

4) *функції* $G_i(t)$, $i = 1, 2$, $0 \leq t \leq T$, *є неперервними*;

тоді маємо асимптотичне зображення

$$P_\varepsilon(T) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2} \int_0^T \mu_\varepsilon(t)\, dt\right)\left(\sin \frac{-G_1(0)}{G(0)} \pi + O(\varepsilon)\right).$$

Доведення. Перша задача з (22) є класичною задачею теплопровідності. Її розв'язок за методом Фур'є має вигляд

$$u_0(t, z) = \sum_{k \geq 1} b_k \exp\left(-\frac{(k\pi)^2}{2} t\right) \sin k\pi z,$$

де $b_k = 0$, коли k парне, та $b_k = 2\sqrt{2}/k\pi$, коли k непарне.

Знайдемо головне значення $u_0(t, z)$ у точці

$$(t_\varepsilon, z_\varepsilon) = \left(\int_0^T b_{2,\varepsilon}^{-2}(t)\,dt, \frac{f_\varepsilon(0,0)}{b_{2,\varepsilon}(0)} \right).$$

У позначеннях леми

$$b_{2,\varepsilon}(t) = \varepsilon\delta_0(t) + \varepsilon^2\delta_1(t) + \varepsilon^3\delta_2(t) + \varepsilon^4\delta_{3,\varepsilon}(t),$$

де

$$\delta_{3,\varepsilon}(t) = \int_{G_1(t)}^{G_2(t)} y^3 \frac{\partial^3}{\partial z^3}\sigma^{-1}(t,z)\bigg|_{z=\theta\varepsilon y} dy, \quad 0 \le \theta \le 1.$$

Звідси

$$b_{2,\varepsilon}^{-2}(t) = \mu_\varepsilon(t) + O(\varepsilon). \tag{23}$$

Далі,

$$f_\varepsilon(0,0) = \varepsilon\left(\int_{G_1(0)}^{0} \frac{dy}{\sigma(t, \varepsilon y)} \right) = -\varepsilon\sigma_0(t)G_1(0) - \varepsilon^2\sigma_1(t)\frac{G_1^2(0)}{2!} + O(\varepsilon^3).$$

Таким чином,

$$\frac{f_\varepsilon(0,0)}{b_{2,\varepsilon}(0)} = -\frac{G_1(0)}{G(0)} + O(\varepsilon)$$

та

$$\sin\left(\frac{f_\varepsilon(0,0)}{b_{2,\varepsilon}(0,0)}\pi \right) = \sin\left(-\frac{G_1(0)}{G(0)}\pi \right) + O(\varepsilon). \tag{24}$$

З (23) та (24) робимо висновок, що виконується рівність

$$u_0(t_\varepsilon, z_\varepsilon) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi^2}{2}\int_0^T \mu_\varepsilon(t)\,dt \right)\sin\left(\frac{-G_1(0)}{G(0)}\pi + O(\varepsilon) \right).$$

Зробимо оцінку наближення в точці $(t_\varepsilon, z_\varepsilon)$. Покладемо $r_\varepsilon(t,z) = u_\varepsilon(t,z) - u_0(t,z)$. Функція r_ε задовольняє початково-граничну задачу

$$\frac{\partial}{\partial t} r_\varepsilon - \frac{\partial^2}{2\,\partial z^2} r_\varepsilon = a_{1,\varepsilon}\left(\lambda_\varepsilon^{-1}(T) - t, z\right)\frac{\partial}{\partial z}u_0,$$

$$r_\varepsilon(0,z) = 0, \quad z \in (0,1); \quad r_\varepsilon(t,1) = r_\varepsilon(t,0) = 0, \tag{25}$$

$$0 \le t \le \int_0^T b_{2,\varepsilon}^{-2}(t)\,dt.$$

Розв'яжемо (25) за методом Фур'є, тобто розв'язок (25) будемо шукати у вигляді

$$r_\varepsilon(t,z) = \sum_{k \ge 1} T_{k,\varepsilon}(t) X_k(z),$$

де $X_k(z) = \sqrt{2}\sin k\pi z$, $k \ge 1$, а $T_k(t)$ задовольняє рівняння

$$\dot{T}_{k,\varepsilon}(t) + \frac{(k\pi)^2}{2} T_{k,\varepsilon}(t) = c_{k,\varepsilon}(t), \quad T(0) = 0;$$

$$c_{k,\varepsilon}(t) = \int_0^1 a_{1,\varepsilon}\left(\lambda_\varepsilon^{-1}(T) - t, z\right)\frac{\partial}{\partial z}u_0(t, z)X(z)\,dz. \tag{26}$$

Покладемо

$$\varepsilon\Phi_{\varepsilon,m,k}(t) = \int_0^1 a_{1,\varepsilon}\left(\lambda\varepsilon^{-1}(T) - t, z\right)\cos(2m+1)\pi z \sin k\pi z\,dz.$$

Тепер, маючи на увазі першу умову теореми, (26) та застосовуючи теорему про середнє, можна стверджувати, що існують такі величини

$$\varphi_{\varepsilon,m,k} \in \left[\inf_{0\le t\le\lambda^{-1}(T)} \Phi_{\varepsilon,k,m}(t),\ \inf_{0\le t\le\lambda^{-1}(T)} \Phi_{\varepsilon,k,m}(t)\right],$$

що приводять до наступних рівностей:

$$T_{k,\varepsilon}(t) = \exp\left(-\frac{(k\pi)^2}{2}t\right)\int_0^T c_{k,\varepsilon}(x)\exp\left(\frac{(k\pi)^2}{2}x\right)dx =$$

$$= \varepsilon\exp\left(-\frac{(k\pi)^2}{2}t\right)\sum_{m\ge 0}\int_0^1 \exp\left(\frac{\pi^2}{2}\left(k^2 - (2m+1)^2\right)x\right)\Phi_{\varepsilon,k,m}(x)\,dx =$$

$$= \varepsilon\exp\left(-\frac{(k\pi)^2}{2}t\right)\left(\int_0^t \Phi_{\varepsilon,k,m}(x)\,dx + 2\sum_{2m+1\ne k}\frac{\exp\left(\frac{\pi^2}{2}\left(k^2-(2m+1)^2\right)t\right) - 1}{\pi^2\left(k^2-(2m+1)^2\right)}\varphi_{\varepsilon,k,m}\right).$$

З останнього робимо висновок, що головний член асимптотики для $r_\varepsilon(t_\varepsilon, z_\varepsilon)$ має порядок

$$\varepsilon\exp\left(-\frac{\pi^2}{2}\int_0^T \mu_\varepsilon(t)\,dt\right).$$

Теорему доведено.

1 *Боровков А. А., Могульский А. А.* О вероятностях малых уклонений для случайных процессов // Асимптотический анализ распределений случайных процессов. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. – С. 147–167.
2. *Fujita T., Kotani S.* The Onsager – Mashlup function for diffusion processes // J. Math. Kyoto Univ. – 1982. – **22**, № 1. – P. 131–153.
3. *Zeitouni O.* On the Onsager – Machlup functional of diffusion processes around non C^2 curves // Ann. Probab. – 1989. – **17**, № 3. – P. 1037–1054.
4. *Гасаненко В. А.* Винеровский процесс в тонкой области // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 2. – С. 225–229.
5. *Гасаненко В. А.* Винеровский процесс в криволинейной полосе // Там же. – 1990. – **42**, № 4. – С. 561–563.
6. *Гихман И. И., Скороход А. А.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.

Одержано 06.09.96