УДК 517. 5

В. Ф. Бабенко, д-р физ.-мат. наук,
В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, кандидаты физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

О НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ НОРМ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

It is proved that, for $n > 4$, the inequality

$$\|f^{(n-2)}\|_\infty \le 4^{n-2}(n-1)!\,\|f\|_\infty + \|f^{(n)}\|_\infty / 2,$$

where the constant $4^{n-2}(n-1)!$ is exact, holds for functions f that have an absolute continuous derivative of order $n-1$ on the interval $[0, 1]$.

Доведено, що при $n > 4$ для функцій f, які мають на $[0, 1]$ абсолютно неперервну похідну порядку $n-1$, виконується нерівність

$$\|f^{(n-2)}\|_\infty \le 4^{n-2}(n-1)!\,\|f\|_\infty + \|f^{(n)}\|_\infty / 2$$

з точною константою $4^{n-2}(n-1)!$.

Пусть $L_\infty = L_\infty[0, 1]$ — пространство вещественных функций f, измеримых на $[0, 1]$, таких, что

$$\|f\| = \|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]}\operatorname{vrai}|f(t)| < \infty.$$

Через L_∞^n, $n = 1, 2, \ldots$, обозначим множество функций $f \in L_\infty$ таких, что $f^{(n-1)}$ абсолютно непрерывна и $f^{(n)} \in L_\infty$.

Известно, что для любых целых $0 \le k < n$ существуют такие постоянные A и B, что если $f \in L_\infty^n$, то

$$\|f^{(k)}\|_\infty \le A\|f\|_\infty + B\|f^{(n)}\|_\infty. \tag{1}$$

Известно также (см. например, [1]), что при $n > k$ точная нижняя грань таких B, при которых с некоторой константой A для всех $f \in L_\infty^n$ выполняется (1), равна нулю. Вместе с тем, точная нижняя грань таких A, при которых с некоторой константой B для всех $f \in L_\infty^n$ справедливо (1), строго больше нуля. В связи с этим положим $A_{n,k} = \inf A$, где $\inf$ берется по всем A, для которых с некоторой константой B имеет место (1), и $B_{nk} = \inf B$, где $\inf$ берется по всем B, для которых (1) выполняется при $A = A_{n,k}$.

Обзор известных результатов по вычислению точных констант $A_{n,k}$ и $B_{n,k}$, а также соответствующие библиографические указания можно найти в [1]. Отметим также [1], что

$$A_{n,n-1} = 4^{n-1}(n-1)!/2 \quad \text{и} \quad B_{n,n-1} = 1/2.$$

Цель данной статьи — найти точное значение $A_{n,n-2}$ и оценки для $B_{n,n-2}$.

Теорема. *При $n > 4$ справедливы соотношения*

$$A_{n,n-2} = 4^{n-2}(n-1)!; \quad \frac{1}{8} - \frac{3n-2}{16n(n-1)} \le B_{n,n-2} \le \frac{1}{2}, \tag{2}$$

и, следовательно, для любой функции $f \in L_\infty^n$ *выполняется неравенство*

$$\|f^{(n-2)}\|_\infty \le 4^{n-2}(n-1)!\,\|f\|_\infty + \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{2} \tag{3}$$

с точной константой $4^{n-2}(n-1)!$.

Доказательство. Пусть $T_n(x) = \cos(n \arccos(2x-1))$ — полином Чебышева I рода. Отметим, что $\|T_{n-1}\| = 1$ и $\|T_{n-1}^{(n-2)}\|_\infty = 4^{n-2}(n-1)!$.

Для $f \in L_\infty^n$ и произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим разность

$$\varphi(x) = f(x) - (1+\varepsilon)\,\|f\|_\infty T_{n-1}(x).$$

Очевидно, φ будет иметь на интервале $[0, 1]$ не менее $n-1$ нулей, причем найдутся точки $0 = x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 < x_0 = 1$ такие, что $\operatorname{sgn}\varphi(x_i) = (-1)^{i+1}$. Следовательно, φ' будет иметь в $(0, 1)$ не менее $n-2$ нулей, причем найдутся точки $0 < x_{n-1}^1 < x_{n-2}^1 < \ldots < x_1^1 < x_0^1 < 1$ такие, что $\operatorname{sgn}\varphi'(x_i^1) = (-1)^{i+1}$ для $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Далее, φ'' будет иметь на интервале $(0, 1)$ не менее $n-3$ нулей, причем найдутся точки $0 < x_{n-2}^2 < x_{n-3}^2 < \ldots < x_0^2 < 1$, такие, что $\operatorname{sgn}\varphi''(x_i^2) = (-1)^{i+1}$. Продолжая это рассуждение, приходим к тому, что $\varphi^{(n-2)}$ имеет на интервале $(0, 1)$ по крайней мере один нуль (обозначим его через y_0), причем найдутся точки $0 < x_1^{n-2} < y_0 < x_0^{n-2} < 1$ такие, что $\operatorname{sgn}\varphi^{(n-2)}(x_1^{n-2}) = 1$ и $\operatorname{sgn}\varphi^{(n-2)}(x_0^{n-2}) = -1$.

Покажем, что для любого $x \in (x_0^{n-2}, 1)$ выполняется

$$\varphi^{(n-2)}(x) \le \frac{\|f^{(n)}\|}{2}(x-y_0)^2. \tag{4}$$

Предполагаем противное: найдется точка $y_1 > x_0^{n-2}$ такая, что

$$\delta(y_1) = \varphi^{(n-2)}(y_1) - \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{2}(y_1-y_0)^2 > 0.$$

Тогда найдется точка $y_2 \in (x_0^{n-2}, y_1)$ такая, что $\delta(y_2) = 0$. Так как $\delta(y_0) = \delta(y_2) = 0$, то в некоторой точке $y_3 \in (y_0, y_2)$ $\delta'(y_3) = 0$. Кроме того, в некоторой точке $y_4 \in (y_2, y_1)$ $\delta'(y_4) > 0$. Следовательно, в некоторой точке $y_5 \in (y_3, y_4)$ $\delta''(y_5) > 0$. Однако это невозможно, так как для любого $x \in (0, 1)$

$$\delta''(x) = \varphi^{(n)}(x) - \|f^{(n)}\|_\infty = f^{(n)}(x) - \|f^{(n)}\|_\infty \le 0.$$

Неравенство (4) доказано.

Рассматривая функцию $\psi(x) = f(x) + (1+\varepsilon)\|f\|\,T_{n-1}(x)$ и рассуждая так же, как и выше, найдем точки $z_0^{n-2} < z_1 < z_2^{n-2}$ такие, что $\psi^{(n-2)}(z_0^{n-2}) < 0$, $\psi^{(n-2)}(z_1) = 0$ и $\psi^{(n-2)}(z_2^{n-2}) > 0$. Аналогично предыдущему можно убедиться в том, что для $x \in (0, z_0^{n-2})$

$$\psi^{(n-2)}(x) = \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{2}(x-z_1)^2. \tag{5}$$

Если $x_0^{n-2} < z_0^{n-2}$, то для любой точки $x \in (0, 1)$ в силу (4) и (5) будем иметь

$$f^{(n-2)}(x) \le (1+\varepsilon)\| T_{n-1}^{(n-2)} \|_\infty \|f\|_\infty + \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{2}.$$

Пусть $z_0^{n-2} < x_0^{n-2}$. Покажем, что для любой точки $x \in (z_0^{n-2}, x_0^{n-2})$ справедливо

$$f^{(n-2)}(x) \le (1+\varepsilon)\| T_{n-1}^{(n-2)} \|_\infty \|f\|_\infty - \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{8}. \tag{6}$$

Рассмотрим разность ($\varepsilon > 0$ произвольно)

$$\Delta(x) = f^{(n-2)}(x) - (1+\varepsilon)\| T_{n-1}^{(n-2)} \|_\infty \|f\|_\infty - \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{2} x(1-x).$$

Очевидно, $\Delta(x_0^{n-2}) < 0$, $\Delta(z_0^{n-2}) < 0$. Предположим, что для некоторого $z \in (z_0^{n-2}, x_0^{n-2})$ $\Delta(z) > 0$. Тогда в некоторых точках $z_1 \in (z_0^{n-2}, z)$ и $z_2 \in (z, x_0^{n-2})$ $\Delta'(z_1) > 0$ и $\Delta'(z_2) < 0$. Следовательно, в некоторой точке $z_3 \in (z_1, z_2)$ $\Delta''(z_3) < 0$. Однако для любого $x \in (0, 1)$ $\Delta''(x) = f^{(n)}(x) + \|f^{(n)}\|_\infty \ge 0$.

Полученное противоречие показывает, что для $x \in (z_0^{n-2}, x_0^{n-2})$ $\Delta(x) \le 0$, и неравенство доказано.

Сопоставляя (4)–(6), видим, что для любого $x \in [0, 1]$

$$f^{(n-2)}(x) \le (1+\varepsilon)\| T_{n-1}^{(n-2)} \|_\infty \|f\|_\infty + \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{2},$$

откуда в силу произвольности ε выводим

$$f^{(n-2)}(x) \le 4^{n-2}(n-1)!\,\|f\|_\infty + \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{2}. \tag{7}$$

Меняя в (7) f на $-f$, убеждаемся в справедливости неравенства (3).

Первое из соотношений (2) устанавливаем, полагая в (3) $f = T_{n-1}$. Неравенство $B_{n,n-2} \le 1/2$ следует из (3). Для получения неравенства

$$\frac{1}{8} - \frac{3n-2}{16n(n-1)} \le B_{n,n-2}$$

достаточно в (3) положить $f = T_n$. Теорема доказана.

Замечания. **1.** Неравенства типа (1) рассматривались также в работах А. И. Звягинцева (см., например, [2]).

2. А. Ю. Шадрин в [3, 4] доказал следующие соотношения:

$$A_{mk} = \| T_{m-1}^{(k)} \|_\infty, \quad B_{mk} = \frac{2k(m-1)^2 + k^2 - k}{(2k-1)m(m-1)} \frac{\| T_{m-1}^{(k-1)} \|_\infty}{\| T_{m-1}^{(m-1)} \|_\infty}$$

для всех натуральных m, k, $k < m$.

1. *Буренков В. И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале. II // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **173**. – С. 38–49.
2. *Звягинцев А. И.* Оценки для промежуточной производной функции // Латв. мат. ежегодник. – 1988. – № 32. – С. 183–186.
3. *Shadrin A. Yu.* To the Jordan–Kolmogorov problem on a finite interval // Proceed. Conf. "Open Problems in Approximation Theory" (June, 18–24, 1993). – 1993. – P. 192 – 204.
4. *Shadrin A. Yu.* Error bounds for Lagrange interpolation // J. Approx. Theory. – (to appear).

Получено 09.02.93