УДК 519.8

В. В. Остапенко, д-р физ.-мат. наук (Ин-т кибернетики НАН Украины, Киев)

МАТРИЧНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ

The notion of a convex set is generalized. In the standard definition of convexity, sums of products of vectors and numbers are used. In the generalization considered in this paper, numbers are replaced by matrices; this explains why we call it "matrix convexity".

Узагальнюється поняття опуклих множин. При означенні звичайної опуклості використовуються суми добутків числа на вектор. У даному узагальненні роль чисел грають матриці, звідки й виникає назва — матрична опуклість.

Введение. Необходимость в изучении матричной выпуклости возникла в теории управления и дифференциальных играх [1 – 3]. С помощью матричной выпуклости удалось описать достаточно широкий класс дифференциальных игр, в которых относительно конструктивно строятся стратегии игроков. При этом основное внимание уделялось изучению тех свойств матричной выпуклости, которые требовались для теории дифференциальных игр. Поэтому представляет интерес самостоятельное и всестороннее изучение матричной выпуклости, которое позволяет логически дополнить результаты работ [1 – 3].

В общем случае матрично-выпуклые объекты не обязаны быть выпуклыми в обычном скалярном смысле. Однако при определеных предположениях классы матрично-выпуклых объектов являются подклассами скалярно-выпуклых объектов. Более того, показано, что в достаточно общем случае матрично-выпуклые множества являются H-выпуклыми. Следует отметить, что H-выпуклые множества хорошо изучены (см., например, [4]) и относительно конструктивно описываются в ряде конкретных примеров. Таким образом, для каждого набора матриц, определяющих выпуклость, строится подкласс выпуклых множеств.

1. Матричная выпуклость множеств.

1. *Основные обозначения.* Пусть E^n — n-мерное евклидово пространство. В этих обозначениях E^1 — обычная числовая ось. Для x, $y \in E^n$ под $\langle x, y \rangle$ будем понимать скалярное произведение; $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — норма вектора $x \in \in E^n$. Норму линейного оператора A, действующего в E^n, будем понимать в обычном смысле $\|A\| = \sup\{\|Ax\|: \|x\| \le 1\}$. Через E будем обозначать тождественный оператор, который задается матрицей $\operatorname{diag}\{1, \dots, 1\}$, где $\operatorname{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — диагональная матрица размеров $n \times n$ с числами $\alpha_1, \dots \dots, \alpha_n$ на главной диагонали.

Координаты вектора $x \in E^n$ будем обозначать через $(x^1, \dots, x^n)$ с индексами вверху. В более общем виде x можно представить следующим образом. Пусть n_i — целые числа такие, что $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Тогда $x = (x^1, \dots \dots, x^k)$, где $x^1 \in E^{n_1}, \dots, x^{n_k} \in E^{n_k}$, т.е. x^i — это не числа, а некоторые векторы меньшей размерности.

Для двух множеств M и N из E^n под суммой $M + N$ будем понимать объединение всех возможных сумм вида $x + y$, где $x \in M$, $y \in N$: $M + N = = \bigcup\{x + y: x \in M,\ y \in N\}$.

С каждым множеством $M \subset E^n$ можно связать *опорную функцию,* определяющую для всех $x^* \in E^n$:

$$W_M(x^*) = \sup_{x \in M} \langle x, x^* \rangle.$$

Отметим, что выпуклое замкнутое множество полностью определяется своей опорной функцией.

Для множества $M \subset E^n$ положим $\operatorname{int} M$ — внутренность M, $\operatorname{cl} M$ — замыкание M, ∂M — граница M.

2. *Скалярно-выпуклые множества.* Рассмотрим некоторые свойства обычных выпуклых множеств. Напомним традиционное определение выпуклости.

***Определение* 1.** *Множество $M \subset E^n$ называется выпуклым, если для любых чисел $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, выполняется равенство $\lambda_1 M + \lambda_2 M = M$.*

Для того чтобы M было выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы равенство в определении 1 выполнялось для любых λ_1, λ_2. Возникает вопрос: что можно сказать о множестве M, если λ_1 и λ_2 фиксированы. Оказывается, что в случае замкнутости M из равенства определения 1 вытекает выпуклость. Сформулируем это утверждение в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть λ_1, λ_2 — фиксированные положительные числа такие, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Замкнутое множество $M \subset E^n$ является выпуклым тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\lambda_1 M + \lambda_2 M = M$.*

3. *Матричная выпуклость.* Всюду в дальнейшем будем предполагать, что M — замкнутое множество.

Пусть A, B — линейные операторы, действующие в E^n такие, что $A + B = E$. Семейство этих операторов обозначим через $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} = \{A, B\}$.

***Определение* 2.** *Множество $M \subset E^n$ называется $\mathcal{A}$-выпуклым, если*

$$AM + BM = M. \tag{1}$$

Определение 2 отличается от определения 1 тем, что здесь вместо скаляров λ_1 и λ_2 берутся линейные операторы, которые в конкретных базисах представляются матрицами. Такую выпуклость естественно называть матричной, а обычную — скалярной. Если $A = \lambda_1 E$, $B = \lambda_2 E$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$, то определение 2 в силу леммы 1 является определением обычной (скалярной) выпуклости.

Отметим, что равенству (1) могут удовлетворять не только скалярно-выпуклые множества.

***Пример* 1.** Рассмотрим двумерное пространство $E^2 = \{x = (x^1, x^2) : x^i \in E^1\}$. Пусть линейные операторы A и B задаются следующими матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Множество M имеет вид $M = \{(0, 0); (1, 0); (0, 1); (1, 1)\}$. Данное множество состоит из четырех точек, которые являются вершинами квадрата.

Матрица A переводит точки $(0, 1)$ и $(1, 1)$ в точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$ соответственно, оставляя последние на месте. Отсюда $AM = \{(0, 0); (1, 0)\}$. Аналогично $BM = \{(0, 0); (0, 1)\}$. Нетрудно видеть, что $AM + BM = \{(0, 0); (1, 0); (0, 1); (1, 1)\} = M$. Таким образом, построен пример невыпуклого множества, удовлетворяющего при определенных A и B равенству (1).

Поскольку определение 2 является обобщением обычной выпуклости, то возникает вопрос: при каких условиях равенство (1) гарантирует скалярную выпуклость.

Теорема 1. *Пусть $\|A - B\| < 1$. Тогда из равенства* (1) *следует скалярная выпуклость множества M.*

Доказательство. Покажем, что с каждыми точками $x, y \in M$ множеству

M принадлежит середина отрезка $[x, y]$ — точка $\bar{x} = 1/2 * (x + y)$. В силу леммы 1 при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ отсюда будет вытекать выпуклость M.

Обозначим $x_1 = Ax + By$, $y_1 = Ay + Bx$. Из (1) следует, что $x_1, y_1 \in M$. Отметим, что

$$1/2 * (x_1 + y_1) = 1/2 * (A(x+y) + B(x+y)) =$$

$$= 1/2 * (A + B)(x + y) = 1/2 * (x + y) = \bar{x},$$

т. е. середина отрезка $[x_1, y_1]$ является серединой отрезка $[x, y]$. Оценим расстояние между x_1 и y_1:

$$\|x_1 - y_1\| = \|A(x-y) + B(y-x)\| = \|(A-B)(x-y)\| \leq \|A-B\| \|x-y\|.$$

В силу условия теоремы это расстояние уже меньше расстояния между x и y.

Построим последовательности $x_k = A x_{k-1} + B y_{k-1}$, $y_k = A y_{k-1} + B x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $x_0 = x$, $y_0 = y$. Индукцией по k, как и выше, можно показать, что

$$1/2 * (x_k + y_k) = \bar{x}$$

и

$$\|x_k - y_k\| \leq \|(A+B)\| \|x_{k-1} - y_{k-1}\| = \|A - B\|^k \|x - y\|.$$

Поскольку $\|A - B\| < 1$, то последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ сходятся к $\bar{x}$. Из равенства (1) следует, что $x_k, y_k \in M$ для всех $k = 0, 1, \ldots$. Отсюда и из замкнутости M вытекает, что $\bar{x} \in M$. Теорема доказана.

Изучим класс $\mathcal{A}$-выпуклых множеств. Приведем необходимые и достаточные условия $\mathcal{A}$-выпуклости. Положим $M(x^*) = \{x \in M : \langle x, x^* \rangle = W_M(x^*)\}$. Из определения $W_M(x^*) = \sup\limits_{x \in M} \langle x, x^* \rangle$. Поэтому множество $M(x^*)$ либо пусто, либо на его точках достигается данный супремум. Отметим, что в случае $x^* = 0$ естественно считать $M(0) = M$.

Теорема 2. *Для выполнения равенства* (1) *необходимо, чтобы для всех* $x^* \neq 0$ *выполнялись включения*

$$M(x^*) \subset M(A^* x^*), \quad M(x^*) \subset M(B^* x^*). \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим опорную функцию левой части (1)

$$W_{AM+BM}(x^*) = \sup \{\langle x, x^* \rangle : x \in AM + BM\} =$$

$$= \sup \{\langle \langle Ax + By \rangle, x^* \rangle : x, y \in M\} =$$

$$= \sup \{\langle x, A^* x^* \rangle + \langle y, B^* x^* \rangle : x, y \in M\} =$$

$$= \sup_{x \in M} \langle x, A^* x^* \rangle + \sup_{x \in M} \langle y, B^* x^* \rangle = W_M(A^* x^*) + W_M(B^* x^*).$$

Из (1) следует $W_M(A^* x^*) + W_M(B^* x^*) = W_M(x^*)$. Отсюда и из очевидного равенства $x^* = (A^* + B^*) x^*$ вытекает, что для всех $x \in M(x^*)$

$$\sup_{y \in M} \langle y, A^* x^* \rangle + \sup_{y \in M} \langle y, B^* x^* \rangle - \langle x, (A^* + B^*) x^* \rangle = 0$$

или

$$\left[\sup_{y\in M}\langle y, A^*x^*\rangle - \langle x, A^*x^*\rangle\right] + \left[\sup_{y\in M}\langle y, B^*x^*\rangle - \langle x, B^*x^*\rangle\right] = 0. \quad (3)$$

Каждое из выражений в квадратных скобках неотрицательно. Поэтому из (3) вытекают соотношения

$$\sup_{y\in M}\langle y, A^*x^*\rangle = \langle x, A^*x^*\rangle \quad \text{и} \quad \sup_{y\in M}\langle y, B^*x^*\rangle = \langle x, B^*x^*\rangle,$$

а следовательно, $x\in M(Ax^*)$ и $x\in M(Bx^*)$, что и доказывает теорему.

Полупространством называется множество вида $\{x\in E^n: \langle x, x^*\rangle \le c\}$. Полупространство определяется вектором x^* и числом c. Известно, что каждое выпуклое множество представимо в виде пересечения полупространств:

$$M = \bigcap_{x^*\in H(M)} \{x\in E^n: \langle x, x^*\rangle \le c(x^*)\}, \quad (4)$$

где $H(M)$ — некоторое подмножество ненулевых векторов из E^n, $c(x^*)$ — число, возможно, равное $+\infty$.

Теорема 3. *Пусть множество M представимо в виде* (4). *Тогда для выполнения равенства* (1) *достаточно, чтобы для всех $x\in H(M)$ выполнялись включения* (2).

Доказательство. Пусть $x^*\in H(M)$. Предположим, что $c(x^*)<+\infty$, тогда в силу замкнутости M множество $M(x^*)\ne\varnothing$ и существует $x\in M(x^*)$ такой, что

$$\sup_{y\in M}\langle y, A^*x^*\rangle = \langle x, A^*x^*\rangle, \quad \sup_{y\in M}\langle y, B^*x^*\rangle = \langle x, B^*x^*\rangle.$$

Отсюда следует справедливость равенства (3) и, значит,

$$W_{AM+BM}(x^*) = \sup\{\langle y, x^*\rangle: y\in AM+BM\} = \langle x, (A^*+B^*)x^*\rangle \le$$
$$\le \sup_{x\in M}\langle x, x^*\rangle \le c(x^*).$$

В случае, когда $M(x^*)=\varnothing$, для всех $x\in M$ справедливо неравенство $\langle x, x^*\rangle < c(x^*)$. В силу теоремы 18.8 из [5] этот случай можно не рассматривать. Приведенные выше неравенства означают, что левая часть (1) включается в правую. Обратное включение очевидно.

Теоремы 2 и 3 дают некоторое описание класса $\mathcal{A}$-выпуклых множеств. Однако это описание недостаточно наглядно. Приведенные ниже результаты дают более конструктивное описание $\mathcal{A}$-выпуклости в терминах H-выпуклости. Дадим определение H-выпуклости, следуя работе [4].

Определение 3. *Пусть H — подмножество единичной сферы пространства E^n, т.е. $H\subset\{x^*\in E^n: \|x^*\|=1\}$. Множество M будем называть H-выпуклым, если оно представимо в виде*

$$M = \bigcap_{x^*\in H} \{x\in E^n: \langle x, x^*\rangle \le c(x^*)\}, \quad (5)$$

где число $c(x^*)$ может принимать значение, равное $+\infty$.

Представление (5) означает, что H-выпуклое множество M определяется как пересечение только тех полупространств, которые описываются векторами $x^*\in H$. Остальные полупространства в построении M не участвуют.

Отметим также, что множество вида (4) является $H(M)$-выпуклым. В случае, когда H совпадает со всей единичной сферой, H-выпуклость становится обычной выпуклостью. Рассмотрим другой пример H-выпуклых множеств, который будет использован в дальнейшем.

Пример 2. Пусть $H = \{\pm e_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, где $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (1 стоит на i-м месте) — единичные орты. Тогда H-выпуклыми множествами будут параллелепипеды с ребрами, параллельными осям координат. Множество M H-выпукло тогда и только тогда, когда оно представимо в виде $M = \{x = (x^1, \ldots, x^n)\colon a_i \le x^i \le b_i\}$, где числа a_i могут принимать значение $-\infty$, а b_i — значение $+\infty$.

Свяжем множество H с операторами A и B. Будем обозначать через H множество таких единичных $x^* \in E^n$, для которых выполняются условия: а) $A^* x^* = \lambda(x^*) x^*$; б) число $\lambda(x^*)$ принадлежит отрезку $[0, 1]$. В силу того, что $B^* = E - A^*$, векторы $x^* \in H$ являются собственными векторами операторов A^* и B^* с неотрицательными собственными числами. Всюду в дальнейшем предполагаем, что H — определенное таким образом множество.

Теорема 4. *Пусть множество M является $\mathcal{A}$-выпуклым и скалярно-выпуклым множеством,* $\operatorname{int} M \ne \varnothing$. *Тогда M является H-выпуклым множеством.*

Доказательство. Известно (см., например, [4, с. 26]), что для выпуклого множества с непустой внутренностью при $x_0 \in \partial M$ в любой окрестности x_0 существует регулярная точка x_1. По определению точка x_1 является регулярной, если существует только одна опорная гиперплоскость, проходящая через точку x_1.

Предположим, что M не является H-выпуклым множеством и рассмотрим множество

$$M = \bigcap_{x^* \in H} \{x \in E^n\colon \langle x, x^* \rangle \le W_M(x^*)\}.$$

Множество M_1 является H-выпуклой оболочкой M. Поскольку $M_1 \ne M$, то существует точка $x_0 \in \partial M$ такая, что $x_0 \in \operatorname{int} M_1$. Действительно, если бы такой точки не существовало, то $\operatorname{int} M_1 = \operatorname{int} M$ и в силу замкнутости M и M_1 эти множества совпадали бы.

Выше было отмечено существование регулярной точки $x_1 \in \partial M \cap \operatorname{int} M_1$. Поскольку через точку x_1 проходит единственная опорная гиперплоскость, то существует единственный единичный вектор, который отделяет множество M и точку x_1, причем для всех $x \in M$ выполняется неравенство $\langle x, x_1^* \rangle \le \langle x_1, x_1^* \rangle$. Очевидно также, что $\sup\limits_{x \in M} \langle x, x_1^* \rangle = \langle x_1, x_1^* \rangle$, т. е. $x_1 \in M(x_1^*)$. Вектор x_1^* единственный, для которого выполняется условие $x_1 \in M(x_1^*)$. Действительно, если бы существовал единичный вектор $x_2^* \ne x_1^*$ такой, что $x_1 \in M(x_2^*)$, то выполнялось бы неравенство $\langle x, x_2^* \rangle \le \langle x_1, x_2^* \rangle$ для любого $x \in M$. В этом случае x_2^* определял бы еще одну опорную гиперплоскость в точке x_1, отличную от предыдущей.

Из определения H следует, что x_1^* не может быть собственным вектором операторов A^* и B^* с неотрицательными собственными числами. Пусть для определенности $A^* x_1^* \neq \lambda x_1^*$ для всех $\lambda \geq 0$. Но это означает, что $x_1 \notin M(A^* x_1^*)$ и, следовательно, нарушаются необходимые условия теоремы 2. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 5. *Пусть M — H-выпукое множество. Тогда M — $\mathcal{A}$-выпуклое множество.*

Доказательство данной теоремы вытекает из теоремы 3, если положить $H(M) = H$.

Обсудим условия теоремы 4. Необходимость требования скалярной выпуклости M подтверждается примером 1, в котором M не является не только H-выпуклым, но и скалярно-выпуклым множеством. При этом M является $\mathcal{A}$-выпуклым. Требование $\operatorname{int} M \neq \varnothing$ также, как показывает следующий пример, является существенным.

Пример 3. Пусть $M = \{m\}$, т. е. состоит из одной точки. Тогда равенство 1, очевидно, выполняется. Однако нетрудно подобрать также A и B, для которых точка не является H-выпуклым множеством. Так, операторы A^* и B^* могут не иметь вещественных собственных векторов. В этом случае H-выпуклым множеством будет только все пространство E^n.

Рассмотрим различные H-выпуклые множества, где H связано с A и B.

Пример 4. Пусть $A = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $B = \operatorname{diag}\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$, $\alpha_i + \beta_i = 1$. Тогда множество H будет множеством из примера 2 и соответствующими будут H-выпуклые множества.

Пример 5. Пусть A и B снова представимы диагональными матрицами, как и в примере 4, но при этом

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m_1} = \alpha^1, \ \alpha_{m_1+1} = \ldots = \alpha_{m_2} = \alpha^2, \ldots$$
$$\ldots, \alpha_{m_{k-1}+1} = \ldots = \alpha_n = \alpha^k,$$
$$\beta_1 = \ldots = \beta_{m_1} = \beta^1, \quad \beta_{m_1+1} = \ldots = \beta_{m_2} = \beta^2, \ldots$$
$$\ldots, \beta_{m_{k-1}+1} = \ldots = \beta_n = \beta^k.$$

Обозначим $n_i = m_i - m_{i-1}, m_0$. В этом случае H-выпуклые множества имеют вид $M = \{x = (x^1, \ldots, x^k) : x^i \in M_i\}$, где x^i — вектор из пространства E^{n_i}; M_i — выпуклое множество из E^{n_i}.

Пример 6. Рассмотрим случай $A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \beta & -\gamma \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$, где α, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, γ — произвольное число. Собственными векторами для A^* и B^* в данном случае являются векторы $\pm(0, 1)$. H-выпуклыми множествами являются множества вида $M = \{x = (x^1, x^2) : a \leq x^2 \leq b\}$, где a может принимать значение $-\infty$, а b — значение $+\infty$.

1. *Остапенко В. В.* H-выпуклые множества и интегрирование многозначных отображений // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 5. – С. 588 – 592.
2. *Остапенко В. В., Калимолдаева С. Н.* Аналитический метод решения задачи сближения — уклонения в линейной дифференциальной игре с терминальной функцией выигрыша // Кибернетика. – 1987. – № 1. – С. 98 – 101.
3. *Пшеничный Б. Н., Остапенко В. В.* Дифференциальные игры. – Киев: Наук. думка, 1992. – 250 с.
4. *Болтянский В. Г., Солтан П. С.* Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств. – Кишинев: Штиинца, 1978. – 279 с.
5. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 469 с.

Получено 15.07.92