УДК 517.956.6

В. А. Елеев, канд. физ.-мат. наук (Кабардино-Балк. ун-т, Нальчик)

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

The unique solvability is proved for a certain boundary-value problem for a mixed third-order equation of parabolic–hyperbolic type.

Для змішаного параболо-гіперболічного рівняння третього порядку доводиться однозначна розв'язність однієї крайової задачі.

1. Постановка задачи и доказательство единственности решения. Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y - \lambda_1 u, & y>0, \\ u_{xx} - u_{yy} + \lambda_2 u, & y<0, \end{cases} \tag{1}$$

где λ_1 и λ_2 — вещественные числовые параметры, в области Ω, ограниченной при $y>0$ отрезками AA_0, A_0B_0 и B_0B прямых $x=0$, $y=h$ и $x=l$ соответственно и характеристиками AC: $x+y=0$, BC: $x-y=l$ уравнения (1) при $y<0$.

***Задача* 1.** Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям: 1) $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^{(3,1)}_{x,y}(\Omega_1) \cap C^{(2,2)}_{x,y}(\Omega_2) \cap C^2_x(\overline{\Omega} \setminus \{A, B\})$; 2) $u(x,y)$ — решение в области Ω, $y \neq 0$ уравнения (1); 3) $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(l,y) = \varphi_2(y), \quad u_x(0,y) = \varphi_3(y), \qquad 0 \le y \le 1, \tag{2}$$

$$u(x,-x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1/2, \tag{3}$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y)$ — заданные непрерывные функции, $\psi(x)$ непрерывна вместе со второй производной: $\Omega_{1(2)} = \Omega \cap \{y>0\,(y<0)\}$.

Введем такие обозначения: $\tau(x) = u(x,0)$, $\nu(x) = u_y(x,0)$.

Лемма 1. *Если* $u=0$ *на* AC *и* $\lambda_2>0$, *то любое решение уравнения* (1) *удовлетворяет условию*

$$\mathcal{J} = \int_0^x \tau(t)\nu(t)\,dt \ge 0.$$

Доказательство леммы 1 приведено в [1].

Лемма 2. *Если* $\lambda_1 \ge 0$ *и*

$$\lim_{x\to 0+} u(x,0)u_{xx}(x,0) = 0, \qquad \lim_{x\to l-0} u(x,0)u_{xx}(x,0) = 0, \tag{4}$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = 0, \tag{5}$$

то для любого регулярного в области Ω_1 *решения уравнения* (1) *справедливо соотношение*

$$\mathcal{J} = \int_0^l \tau(x)\nu(x)\,dx \le 0.$$

Доказательство. Пусть существует конечный предел

$$\lim_{y\to 0+} u_{xxx} = \tau'''(x), \quad 0<x<l.$$

Тогда, переходя в уравнении (1) при $y>0$ к пределу при $y\to+0$, получаем

$$\tau'''(x) - \nu(x) - \lambda_1\tau(x) = 0. \tag{6}$$

Учитывая, что в силу (4) и (5) $\tau(0)=\varphi_1(0)$, $\tau(l)=\varphi_2(0)$, $\tau'(0)=\varphi_3(0)$, находим

$$\int_0^l \tau(x)\nu(x)\,dx = \int_0^l \tau'''(x)\tau(x)\,dx - \lambda_1\int_0^l \tau^2(x)\,dx =$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\tau'^2(l) + \lambda_1\int_0^l \tau^2(x)\,dx\right], \tag{7}$$

что и подтверждает справедливость леммы 2.

Теорема 1. *Пусть* $u(x, y)$ *— регулярное в области* Ω *решение однородной задачи* 1, *удовлетворяющее условию* (4). *Тогда* $u(x, y)\equiv 0$ *в* Ω *при всех* $\lambda_1\ge 0$ *и* $\lambda_2>0$.

Доказательство. Легко заметить, что из равенства (7) в силу лемм 1 и 2 при $\lambda_1\ge 0$ и $\lambda_2>0$ следует, что $u(x, y)=\tau(x)\equiv 0$ на $[0, l]$.

В области Ω_1 рассмотрим тождество

$$u(u_{xxx}-u_y-\lambda_1 u) = (uu_{xx}-(1/2)u_x)_x - ((1/2)u^2)_y - \lambda_1 u^2 \equiv 0.$$

Интегрируя это тождество по области Ω_1 и учитывая (5), имеем

$$\int_{\Omega_1}[(uu_{xx}-(1/2)u_x^2)_x-((1/2)u^2)_y-\lambda_1u^2]\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^l [u^2(x,h)-u^2(x,0)]\,dx + \int_0^l u_x^2(l,y)\,dy + 2\lambda_1\int_{\Omega_1} u^2(x,y)\,dx\,dy = 0. \tag{8}$$

Так как $\tau(x)\equiv 0$, то из равенства (8) получаем, что $u(x, h)=0$, $u_x(l, y)=0$, $u(x, y)\equiv 0$ $\forall\,(x, y)\in\overline{\Omega}_1$. В области Ω_2 однородная задача Дарбу $u(x, 0)=0$, $u(x, -x)=0$ для уравнения (1) имеет только тривиальное решение $u(x, y)\equiv 0$ $\forall\,(x, y)\in\overline{\Omega}_2$. Следовательно, $u(x, y)\equiv 0$ в Ω.

Пусть теперь $\lambda_2<0$. Поступая аналогично [2], введем новую функцию

$$v(x, y) = \exp(-\rho x)u(x, y). \tag{9}$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$0 = \begin{cases} v_{xxx}-v_y+3\rho v_{xx}+(\rho^3-\lambda_1)v, & y>0,\\ v_{xx}-v_{yy}+2\rho v_x+(\rho^2+\lambda_2)v, & y<0.\end{cases} \tag{10}$$

Лемма 3. *Если* $v=0$ *на* $\overline{AC}$ *и* $\rho\ge(|\lambda_2|)^{\alpha}$, $\alpha=\text{const}>0$, *то для любого регулярного в области* Ω_2 *решения уравнения* (10) *справедливо неравенство*

$$\int_0^x v(x,0)v_y(x,0)\,dx \ge 0. \tag{11}$$

Справедливость неравенства (11) также устанавливается в [2].

Теорема 2. *Пусть* $u(x, y)$ — *решение однородной задачи* 1 *из класса регулярных решений уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$\lim_{x\to+0} u(x,0)[u_{xx}(x,0)+\rho u_x(x,0)] =$$

$$= \lim_{x\to l-0} u(x,0)[u_{xx}(x,0)+\rho u_x(x,0)] = 0. \tag{12}$$

Тогда $u(x,y)\equiv 0$ *в* Ω, *если* $\lambda_2<-1$ *и* $\lambda_1\ge-\lambda_2-3\sqrt[3]{|\lambda_2|}(\pi/l)^2$ *или если* $-1<\lambda_2\le 0$ *и*

$$\lambda_1 \ge \sqrt{|\lambda_2|^3}-3(\pi/l)^2\sqrt{|\lambda_2|}. \tag{13}$$

Доказательство. В области Ω_1 рассмотрим тождество

$$v(v_{xxx}-v_y+3\rho v_{xx}+3\rho^2 v_x^2+(\rho^3-\lambda_1)v) =$$

$$= (vv_{xx}-(1/2)v_x^2+3\rho v v_x+(3/2)\rho^2 v^2)_x - vv_y - (3\rho v_x^2+(\lambda_1-\rho^3)v^2) \equiv 0. \tag{14}$$

Проинтегрируем тождество (14) по переменной x вдоль отрезка $A(\varepsilon, h)B(l-\varepsilon, h)$, где ε, h — сколь угодно малые положительные числа, а затем в полученном равенстве перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$ и $h\to 0$. Тогда, учитывая условие (12), получаем

$$\int_0^l v(x,0)v_y(x,0)\,dx = -\left\{(1/2)v_x^2(l,0)+\int_0^l\left[3\rho v_x^2(x,0)+(\lambda_1-\rho^3)v^2(x,0)\right]dx\right\}. \tag{15}$$

Для непрерывной со своими первыми производными на замкнутом интервале $[a,b]$ функции $z(x)$ неравенство Фридрихса [3] имеет вид

$$\int_a^b z^2(x)\,dx \le c_1\int_a^b z'^2(x)\,dx + c_2[z^2(a)+z^2(b)], \tag{16}$$

где c_1, c_2 — постоянные. Если функция $z(x)$ удовлетворяет дополнительным условиям $z(a)=z(b)=0$, то неравенство (16) принимает вид

$$\int_a^b z^2(x)\,dx \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b z'^2(x)\,dx. \tag{17}$$

В силу неравенств (11) и (17) из (15) имеем

$$v_x^2(l,0) + 2\int_0^l\left[3\rho+(\lambda_1-\rho^3)\left(\frac{l}{\pi}\right)^2\right]v_x^2(x,0)\,dx \le 0. \tag{18}$$

Из неравенства (18) при выполнении условия (13) заключаем, что $v(l,0)=0$, $v(x,0)=\text{const}$. Следовательно, $v(x,0)\equiv 0$. Тогда из (8) и (9) имеем, что $u(x, y)\equiv 0$ в Ω.

Далее рассмотрим единственность решения задачи 1 для уравнения (1) при $\lambda_2=0$. Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи 1, для которого существует конечный предел

$$\lim_{y\to 0+} u_{xxx}(x,y) = \tau'''(x), \quad 0<x<l.$$

Тогда, переходя к пределу в уравнении (1) при $y \to 0+$, получаем функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ из параболической части Ω_1 в виде (6), и в силу (5)

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(l) = 0, \quad \tau'(0) = 0. \tag{18'}$$

Функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ из гиперболической части Ω_2 на линии $y = 0$ имеет вид

$$\tau'(x) - \nu(x) = \psi'(x/2). \tag{19}$$

Исключая $\nu(x)$ из (6) и (19), с учетом граничных условий (2) и (3) для определения функции $\tau(x)$ получаем следующую краевую задачу:

$$\tau'''(x) - \tau'(x) - \lambda_1 \tau(x) = -\psi'(x/2), \tag{20}$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(l) = \varphi_2(0), \quad \tau'(0) = \varphi_3(0). \tag{21}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению

$$\tau'''(x) - \tau'(x) - \lambda_1 \tau(x) = 0, \tag{22}$$

имеет вид

$$k^3 - k - \lambda_1 = 0. \tag{23}$$

Введем обозначение [4] $s = \lambda_1^2/4 - 1/27$. Через R обозначим какое-нибудь одно из двух значений $\sqrt{S}$. Если a есть одно из значений кубического корня $\sqrt[3]{\lambda_1/2 + R}$, то двумя другими значениями будут $a\omega_1, a\omega_2$, где $\omega_1 = -1/2 + i\sqrt{3/2}$, $\omega_2 = -1/2 - i\sqrt{3/2}$, $\omega_3 = 1$.

Аналогично для кубического корня $\sqrt[3]{\lambda_1/2 - R}$ обозначим его значения через $b, b\omega_1, b\omega_2$, где через b обозначено то из значений кубического корня, для которого ab равно $-\lambda_1/3$, т. е. вещественно.

Рассмотрим три возможных случая: $S > 0, S < 0$ и $S = 0$.

Пусть $S > 0$. Тогда R — действительное число. В этом случае k_1 — действительный корень, k_2 и k_3 — комплексно сопряженные не действительные корни.

Если для краткости обозначим $\alpha_0 = \sqrt[3]{\lambda_1/2 + R} + \sqrt[3]{\lambda_1/2 - R}$, $\beta_0 = \sqrt[3]{\lambda_1/2 + R} - \sqrt[3]{\lambda_1/2 - R}$, то корни уравнения (23) запишутся в виде $k_1 = \alpha_0$, $k_2 = \alpha_1 + i\beta_1$, $k_3 = \alpha_1 - i\beta_1$, где $\alpha_1 = -\alpha_0/2$, $\beta_1 = (\beta_0\sqrt{3})/2$.

Пусть теперь $S < 0$. Тогда $R = qi$, где q вещественно. В рассматриваемом случае все три решения уравнения (22) вещественны, различны и имеют вид $k_1 = \alpha_0$, $k_2 = \alpha_1 + \beta_1$, $k_3 = \alpha_1 - \beta_1$.

Пусть имеет место случай, когда $S = 0$. При этом все три решения являются вещественными, причем $k_2 = k_3 \neq k_1$, если $a \neq 0$ $(\lambda_1 \neq 0)$ и $k_1 = k_2 = k_3$ при $a = 0$ $(\lambda_1 = 0)$. В рассматриваемом случае $\lambda_1 \neq 0$. Поэтому решения уравнения (23) имеют вид $k_1 = 3\lambda_1$, $k_2 = -(3/2)\lambda_1$, $k_3 = -(3/2)\lambda_1$.

Решение задачи (22), (21) имеет вид

$$\tau(x) = \left[\varphi_1(0) - \frac{\rho_1(\rho_0 + \rho_1\rho_2 - 2\alpha_0\rho_3)}{\rho_2(\rho_0 + \rho_1 - 2\alpha_0\rho_3)} \right] e^{\alpha_0 x} +$$

$$+ e^{-(\alpha_0/2)x} \left\{ \frac{3}{2\alpha_0} \frac{\rho_1[(\rho_0 + \rho_1)\rho_2 - 2\alpha_0\rho_3] + 2\alpha_0\rho_0\rho_4}{\rho_2(\rho_0 + \rho_1) - 2\alpha_0\rho_3} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_0 x + \right.$$

$$+\frac{2\alpha_0\rho_4}{\rho_2(\rho_0+\rho_1)-2\alpha_0\rho_3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_0 x\Big\}, \tag{24}$$

где

$$\rho_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_0,\quad \rho_1=\alpha_0\varphi_1(0)-\varphi_3(0),\quad \rho_2=e^{\alpha_0}-e^{-\alpha_0/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_0,$$

$$\rho_3=e^{-\alpha_0/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_0,\quad \rho_4=\varphi_1(0)e^{\alpha_0}-\varphi_2(0),\quad S>0;$$

$$\tau(x)=\frac{1}{\Delta}\Big\{\Big[\left(\alpha_2e^{\alpha_1}-\alpha_1e^{\alpha_2}\right)\varphi_1(0)+\left(e^{\alpha_2}-e^{\alpha_1}\right)\varphi_3(0)+\sqrt{3}\beta_0\varphi_2(0)\Big]e^{\alpha_0x}+$$

$$+\Big[\left(\alpha_0e^{\alpha_2}-\alpha_2e^{\alpha_0}\right)\varphi_1(0)+\left(e^{\alpha_0}-e^{\alpha_2}\right)\varphi_3(0)+$$

$$+(\alpha_2-\alpha_0)\varphi_2(0)\Big]\exp\left\{\left(-\frac{\alpha_0}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_0\right)x\right\}+$$

$$+\Big[\left(\alpha_1e^{\alpha_0}-\alpha_0e^{\alpha_1}\right)\varphi_1(0)+\left(e^{\alpha_1}-e^{\alpha_0}\right)\varphi_3(0)+$$

$$+(\alpha_0-\alpha_1)\varphi_2(0)\Big]\exp\left\{\left(-\frac{\alpha_0}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_0\right)x\right\}, \tag{25}$$

где

$$\alpha_1=-\frac{\alpha_0}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_0,\quad \alpha_2=-\frac{\alpha_0}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_0,$$

$$\Delta=-\left(\frac{3}{2}\alpha_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_0\right)e^{\alpha_1}+\left(\frac{3}{2}\alpha_0-\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_0\right)e^{\alpha_2}+\sqrt{3}\beta_0\neq 0,\quad S<0, \tag{26}$$

$$\tau(x)=[\varphi_3(0)-3\lambda_1\varphi_1(0)]x+\varphi_1(0)e^{3\lambda_1x}+$$

$$+\frac{\left(\varphi_2(0)-\varphi_1(0)e^{3\lambda_1}\right)-\varphi_3(0)+3\lambda_1\varphi_1(0)}{\left(2+9\lambda_1-e^{(9/2)\lambda_1}\right)e^{(3/2)\lambda_1x}}\left(2+9\lambda_1x-2e^{(9/2)\lambda_1x}\right), \tag{27}$$

если $S=0$.

На основании представлений (24) – (27) заключаем, что $\tau(x)\equiv 0$, если выполняются условия (5). Тогда отсюда, как показано выше, вытекает, что $u(x,y)\equiv 0$ в Ω.

2. Доказательство существования решения задачи 1. Пусть $\lambda_1\geq 0$ и $\lambda_2>0$. В результате трехкратного интегрирования равенства (6) с учетом граничных условий (21) получаем функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на линии $y=0$ из параболической части Ω_1 в виде

$$\tau(x)-\frac{\lambda_1}{2}\int_0^x(x-t)^2\tau(t)\,dt=\frac{1}{2}\tau''(0)x^2+\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2\nu(t)\,dt+\varphi_3(0)+\varphi_1(0), \tag{28}$$

где

$$\tau''(0)=-\lambda_1\int_0^l(l-t)^2\tau(t)\,dt-\int_0^l(l-t)^2\nu(t)\,dt-2\varphi_3(0)-2\varphi_1(0)+2\varphi_2(0).$$

Если предварительно считать правую часть уравнения (28) известной и равной $\rho(x)$, то для $\tau(x)$ имеем интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода

$$\tau(x) = \rho(x) + \frac{\lambda_1}{2}\int_0^x (x-t)^2\tau(t)\,dt. \tag{29}$$

Обращая интегральное уравнение (29), получаем

$$\tau(x) = \rho(x) + \lambda\int_0^x R(x,t)\,\rho(t)\,dt, \tag{30}$$

где $R(x,t)$ — резольвента ядра $(x-t)^2$ уравнения (29), $\lambda = \lambda_1/2$.

Учитывая значение $\rho(x)$, из (30) получаем

$$\tau(x) = \int_0^x M(x,t)\,\nu(t)\,dt + \tau''(0)\left[\frac{x^2}{2} + \lambda\int_0^x R(x,t)t^2\,dt\right], \tag{31}$$

где

$$M(x,t) = \frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{\lambda}{2}\int_0^x R(x,t_1)(t_1-t)^2\,dt_1. \tag{32}$$

Чтобы получить функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ из гиперболической части Ω_2 на линии $y=0$, рассмотрим решение задачи Коши $u(x,0)=\tau(x)$, $u_y(x,0)=\nu(x)$ для уравнения (1) при $y<0$. Это решение имеет вид [5]

$$u(x,y) = \frac{\tau(x-y)+\tau(x+y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} J_0\left(\sqrt{\lambda_2}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\nu(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\tau(\xi)\frac{\partial}{\partial y}J_0\left(\sqrt{\lambda_2}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)d\xi, \tag{33}$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Требуя, чтобы функция, определенная соотношением (33), удовлетворяла граничному условию (3), получаем для $\tau(x)$ интегральное уравнение типа Вольтерра

$$\tau(x) = \tilde{\rho}(x) + \frac{1}{2}\int_0^x \tau(\xi)\frac{\partial}{\partial x}J_0\left(\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\xi(\xi-x)}\right)d\xi, \tag{34}$$

где

$$\tilde{\rho}(x) = 2\psi(x/2) - \psi(0) + \frac{1}{2}\int_0^x J_0\left(\sqrt{\lambda_2}\sqrt{\xi(\xi-x)}\right)\nu(\xi)\,d\xi.$$

Считая в формуле (34) $\tilde{\rho}(x)$ известной и пользуясь формулой обращения для таких уравнений [6], находим

$$\tau(x) = \int_0^x \nu(t)J_0\left(\sqrt{\lambda_2}(x-t)\right)dt + q(x), \tag{35}$$

где

$$q(x) = \psi(0)J_0\left(\sqrt{\lambda_2}\,x\right) + \int_0^x \psi'(t/2)J_0\left(\sqrt{\lambda_2}\sqrt{x(x-t)}\right)dt. \tag{36}$$

При получении формулы (35) использовано тождество из [7]

$$\int_t^x J_0\left(\lambda\sqrt{t(t-s)}\right)\frac{\partial}{\partial s}J_0\left(\lambda\sqrt{x(x-s)}\right)ds = J_0\left(\lambda\sqrt{t(t-x)}\right) - J_0[\lambda(x-t)].$$

Перепишем равенство (28) с учетом значения $\tau''(0)$. Имеем

$$\tau(x) = \int_0^x M(x,t)\nu(t)dt + \int_0^l Q(x,t)\tau(t)dt + \int_0^l L(x,t)\nu(t)dt + \tilde{q}(x), \tag{37}$$

где

$$Q(x,t) = -\frac{\lambda_1}{2}\left(x^2 + \lambda_1\int_0^x R(x,t)t^2dt\right)(1-t)^2, \tag{38}$$

$$L(x,t) = -\frac{1}{2}\left(x^2 + \lambda_1\int_0^x R(x,t)t^2dt\right)(1-t)^2, \tag{39}$$

$$\tilde{q}(x) = \frac{1}{2}\left(2\varphi_1(0) - 2\varphi_2(0) - 2\varphi_3(0)\right)\left(x^2 + \lambda_1\int_0^x R(x,t)t^2dt\right). \tag{40}$$

Исключая $\tau(x)$ из (35) и (37), получаем смешанное интегральное уравнение первого рода [8] для определения $\nu(x)$:

$$\int_0^x \nu(t)J_0\left(\sqrt{\lambda_2}(x-t)\right)dt = \int_0^x M(x,t)\nu(t)dt + \int_0^l \tilde{Q}(x,t)\nu(t)dt + h(x), \tag{41}$$

где

$$\tilde{Q}(x,t) = L(x,t) + \int_t^l Q(x,t_1)J_0\left(\sqrt{\lambda_2}(t_1-t)\right)dt_1, \tag{42}$$

$$h(x) = \int_0^l Q(x,t)q(t)dt + \tilde{q}(x) - q(x). \tag{43}$$

Поскольку резольвента $R(x,t)$ в прямоугольнике $[0,h]\times[0,l]$ ведет себя таким же образом, как и ядро $(x-t)^2$, то на основании свойств заданных функций $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$, $\psi(x)$ и в силу формул (32), (36), (38)–(40), (42), (43) заключаем, что функции $M(x,t)$, $\tilde{Q}(x,t)$ непрерывны вместе с частными производными первого порядка по переменным x и t, $h(x)$ непрерывна вместе с производной, причем $M(x,x)=0$, $J_0(0)=1$.

Дифференцируя уравнение (41) по переменной x, получаем смешанное интегральное уравнение второго рода

$$\nu(x) = \tilde{h}(x) + \int_0^x \tilde{M}(x,t)\nu(t)dt, \tag{44}$$

где

$$\tilde{M}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{M(x,t) - J_0\left(\sqrt{\lambda_2}\,(t_1 - t)\right)\right\},$$

$$\tilde{h}(x) = \int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\tilde{Q}(x,t)\,\nu(t)\,dt + h'(x).$$

В уравнении (44) функцию $\tilde{h}(x)$ будем считать известной. Обращая его как интегральное уравнение Вольтерра второго рода, имеем

$$\nu(x) = \tilde{h}(x) + \int_0^x \Gamma(x,t)\,\tilde{h}(t)\,dt, \tag{45}$$

где $\Gamma(x,t)$ — резольвента ядра $\tilde{M}(x,t)$.

Заменяя теперь $\tilde{h}(x)$ его значением, получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\nu(x) = \int_0^l \tilde{\Gamma}(x,t)\,\nu(t)\,dt + \tilde{\tilde{h}}(x), \tag{46}$$

где

$$\tilde{\Gamma}(x,t) = \int_0^x \Gamma(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{Q}(t_1,t)\,dt_1, \quad \tilde{\tilde{h}}(x) = h'(x) + \int_0^x \Gamma(x,t)\,h'(t)\,dt. \tag{47}$$

Из формулы (47) вытекает, что ядро интегрального уравнения (46) $\tilde{\Gamma}(x,t)$ и его правая часть $\tilde{h}(x)$ непрерывны по переменным x и t.

Так как эквивалентность всюду сохраняется, то из единственности решения задачи 1 следует существование решения уравнения (46).

После нахождения функции $\nu(x)$ из (46) решение задачи 1 в области Ω_2 определяется по формуле (33), а в области Ω_1 — как решение уравнения (1) при $y > 0$ с граничными условиями (2) и условием $u(x,0) = \tau(x)$.

Решение этой задачи удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \lambda\int_0^l d\xi\int_0^y G(x,y;\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\eta, \tag{48}$$

где $\lambda = -\lambda_1/\pi$,

$$u_0(x,y) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)\,d\eta - \int_0^y G_{\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_3(\eta)\,d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_0^y G_{\xi\xi}(x,y;l,\eta)\varphi_2(\eta)\,d\eta + \int_0^l G(x,y;\xi,0)\tau(\xi)\,d\xi\right\},$$

$G(x,y;\xi,\eta)$ — функция Грина краевой задачи (2) и $u(x,0) = \tau(x)$ уравнения

$$u_{xxx} - u_y = 0. \tag{49}$$

Функция Грина $G(x,y;\xi,\eta)$ представляется через фундаментальные решения уравнения (49), которые имеют вид [9]

$$U(x,y;\xi,\eta) = \begin{cases}\dfrac{1}{(y-\eta)^{1/3}} f\left(\dfrac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}}\right), & y > \eta,\\ 0, & y \le \eta,\end{cases}$$

$$V(x, y; \xi, \eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{(y-\eta)^{1/3}} \overline{\varphi}\left(\dfrac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/3}}\right), & y \geq \eta, \\ 0, & y \leq \eta, \end{cases}$$

где

$$f(z) = \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{3}} \left[J_{1/3}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} z^{3/2}\right) + J_{-1/3}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} z^{3/2}\right) \right];$$

$$\overline{\varphi}(z) = \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{3}} \left[J_{1/3}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} z^{3/2}\right) - J_{-1/3}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}} z^{3/2}\right) \right];$$

$J_\nu(z)$ — функции Бесселя. Функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ называются функциями Эйри и удовлетворяют уравнению $t''(z) + z\,t(z)/3 = 0$.

Основные свойства функции $U(x, y; \xi, \eta)$ и $V(x, y; \xi, \eta)$, их оценки вместе с частными производными порядка ≥ 1 приведены в [9].

К интегральному уравнению (48) применима теория Фредгольма. Оно всегда разрешимо, так как соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение, что следует из теоремы 1 о единственности решения задачи 1.

Доказательство существования решения задачи 1, когда $\lambda_2 < 0$, $\lambda_1 \geq -3\sqrt{|\lambda_2|}(\pi/l)$, проводится аналогично предыдущему случаю.

Пусть теперь $\lambda_2 = 0$. Вид решения уравнения (20), удовлетворяющего краевым условиям (21), зависит от значения величины S.

Если $S < 0$, т. е. $-2/\sqrt{27} < \lambda_1 < 2/\sqrt{27}$, то решение задачи (20), (21) имеет вид

$$\tau(x) = \frac{1}{\Delta_0} \Big\{ \Big[\alpha_1\big(\tilde{\varphi}_2(0) - \varphi_1(0)e^{\alpha_2}\big) +$$

$$+ \alpha_2\big(\varphi_1(0)e^{\alpha_1} - \tilde{\varphi}_2(0)\big) + \varphi_3(0)\big(e^{\alpha_2} - e^{\alpha_1}\big) \Big] e^{\alpha_0 x} +$$

$$+ \Big[\alpha_0\big(\varphi_1(0)e^{\alpha_2} - \tilde{\varphi}_2(0)\big) + \alpha_2\big(\tilde{\varphi}_2(0) - \varphi_1(0)e^{\alpha_0}\big) + \varphi_3(0)\big(e^{\alpha_0} - e^{\alpha_2}\big) \Big] e^{\alpha_1 x} +$$

$$+ \Big[\alpha_0\big(\tilde{\varphi}_2(0) - \varphi_1(0)e^{\alpha_1}\big) + \alpha_1\big(\varphi_1(0)e^{\alpha_0} - \tilde{\varphi}_2(0)\big) + \varphi_3(0)\big(e^{\alpha_1} - e^{\alpha_0}\big) \Big] e^{\alpha_2} \Big\} +$$

$$+ \frac{1}{N_0} \int\limits_0^x \left[N_1 e^{\alpha_0(x-t)} + N_2 e^{\alpha_1(x-t)} + N_3 e^{\alpha_2(x-t)} \right] \psi'(t/2)\, dt,$$

где

$$N_0 = \alpha_0(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \alpha_1(\alpha_2^2 - \alpha_0^2) + \alpha_2(\alpha_0^2 - \alpha_1^2),$$

$$N_1 = -\sqrt{3}\beta_0, \quad N_2 = -(3\alpha_0 - \sqrt{3}\beta_0)/2, \quad N_3 = (3\alpha_0 - \sqrt{3}\beta_0)/2,$$

$$\tilde{\varphi}_2(0) = \varphi_2(0) - \frac{1}{N_0} \int\limits_0^l \left[N_1 e^{\alpha_0(l-t)} + N_2 e^{\alpha_1(l-t)} + N_3 e^{\alpha_2(l-t)} \right] \psi'(t/2)\, dt,$$

$$\Delta_0 = \alpha_0(e^{\alpha_2} - e^{\alpha_1}) + \alpha_1(e^{\alpha_0} - e^{\alpha_2}) + \alpha_2(e^{\alpha_1} - e^{\alpha_0}) \neq 0.$$

Если $S = 0$, т. е. $\lambda_1 = \pm 2/\sqrt{27}$, то решение задачи (20), (21) имеет вид

$$\tau(x) = \frac{1}{\Delta_1} \Big\{ \Big[2(\varphi_1(0)(1 + 3\lambda_1/2) + \tilde{\varphi}_2(0)) - 2\tilde{\varphi}_2(0)e^{(3/2)\lambda_1} \Big] e^{3\lambda_1 x} +$$

$$+ \left[2\tilde{\varphi}_2(0)e^{(3/2)\lambda_1} + 2\left(\frac{3}{2}\lambda_1\varphi_1(0) + \tilde{\varphi}_3(0)\right) - 2\varphi_1(0)e^{(9/2)\lambda_1}\right]e^{-(3/2)\lambda_1 x} +$$

$$+ x\Big[2(\tilde{\varphi}_2(0) - 3\lambda_1\varphi_1(0)) - 2\left(\tilde{\varphi}_3(0) + \frac{3}{2}\lambda_1\varphi_1(0)\right)e^{(9/2)\lambda_1} +$$

$$+ 9\lambda_1\tilde{\varphi}_2(0)e^{(3/2)\lambda_1}\Big]e^{-(3/2)\lambda_1 x}\Big\} + \tilde{\rho}(x),$$

где

$$\tilde{\rho}(x) = \frac{2}{3\lambda_1^2}\int_0^x \left\{-\frac{2e^{3\lambda_1(x-t)}}{9[\lambda_1(t-2)-1]} + \right.$$

$$\left. + \frac{(2-3\lambda_1(t+2))e^{(3/2)\lambda_1(t-x)}}{9[\lambda_1(t-2)-1]} + \frac{\lambda_1 x e^{(3/2)\lambda_1(t-x)}}{\lambda_1(t-2)-1}\right\}\psi'(t/2)\,dt,$$

$$\tilde{\varphi}_2(0) = \varphi_2(0) - \tilde{\rho}(l), \quad \tilde{\varphi}_3(0) = \varphi_3(0) - \tilde{\rho}'(0),$$

$$\Delta_1 = \frac{\left[(2-9\lambda_1) + (3\lambda_1 - 2)e^{(3/2)\lambda_1}\right]}{2e^{(3/2)\lambda_1}}.$$

Аналогичным образом находится функция $\tau(x)$ в случае $S > 0$, т. е. когда $\lambda_1 < -2/\sqrt{27}$ или $\lambda_1 > 2/\sqrt{27}$.

Таким образом, после того, как функция $\tau(x)$ найдена, $\nu(x)$ находим с помощью формулы (19). Следовательно, искомое решение $u(x, y)$ задачи 1 в гиперболической части Ω_2 смешанной области находится как решение задачи Коши, а в области Ω_1 как решение уравнения (1) при $y > 0$, удовлетворяющее граничным условиям (2) и условию $u(x, 0) = \tau(x)$.

Эта задача снова эквивалентно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода (48), которое в силу единственности решения задачи 1 однозначно разрешимо.

1. *Сабитов К. Б.* О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 11. – С. 1977–1984.
2. *Сабитов К. Б.* К теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 1. – С. 117–126.
3. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Изд-во иностр. лит., 1985. – 589 с.
4. *Лепин Е. С.* Курс высшей алгебры. – М.: Гостехиздат, 1953. – 345 с.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М., Наука, 1977. – 735 с.
6. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. – М.: Гостехиздат, 1948. – 296 с.
7. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* О некоторых краевых задачах со смещением для уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения и вопросы теории ветвления. – Ташкент: Фан, 1982. – С. 3–12.
8. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях смешанного типа. – М.: Огиз, 1947. – 191 с.
9. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент, Фан, 1979. – 238 с.

Получено 25.06.93