УДК 517.9

Ю. А. Митропольский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

РОЛЬ НИКОЛАЯ НИКОЛАЕВИЧА БОГОЛЮБОВА В РАЗВИТИИ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

A review of N. N. Bogolyubov's works on investigations in the theory of nonlinear oscillations is presented.

Наведено огляд робіт з досліджень М. М. Боголюбова в теорії нелінійних коливань.

В настоящей статье изложены основные моменты и идеи Н. Н. Боголюбова, которые легли в основу большого научного направления, созданного им совместно с Николаем Митрофановичем Крыловым и названного ими „Нелинейная механика". Это научное направление значительно расширило возможности строгого изучения нелинейных колебательных систем, дало возможность открыть и исследовать ряд новых явлений, наблюдаемых в нелинейных колебательных системах, а также получило дальнейшее развитие и обобщение.

Прежде чем переходить непосредственно к анализу некоторых идей Н. Н. Боголюбова, являющихся основополагающими в созданной им совместно с Н. М. Крыловым „нелинейной механике", остановимся кратко на вопросе о роли, распространении и значении изучения колебательных явлений в естествознании.

Знакомясь с самыми разнообразными отраслями знаний, наблюдая всевозможные явления природы, легко убедиться в том, что колебания представляют собой один из наиболее распространенных видов движения. Вибрации сооружений и машин, электромагнитные колебания в радиотехнике и оптике, автоколебания в системах регулирования и следящих системах, звуковые и ультразвуковые колебания — все эти, казалось бы, различные и непохожие друг на друга колебательные процессы объединяются методами математической физики в одно общее учение о колебаниях. Как заметил академик Н. Д. Папалекси: „Не будет, вероятно, преувеличением сказать, что среди процессов, как свободно протекающих в природе, так и используемых в технике, колебания, понимаемые в широком смысле этого слова, занимают во многих отношениях выдающееся и часто первенствующее место". Поэтому изучение колебательных процессов имеет основное значение для самых разнообразных разделов механики, физики, техники и ряда других областей естествознания.

Колебательные процессы, в общем случае, настолько сложны, что точную математическую модель для их описания составить невозможно и обычно приходится вводить упрощающие и огрубляющие предположения. В ряде случаев самыми распространенными математическими моделями колебательного процесса являются обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных, интегро-дифференциальные уравнения, уравнения в конечных разностях.

Одним из упрощающих предположений на определенном уровне рассмотрения колебательного процесса, как известно, является метод линеаризации. Так, в трудах ряда ученых линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами явились мощным аппаратом исследования. Например, академик А. Н. Крылов, успешно развивая теорию линейных колебаний, применил ее к решению проблемы о качке корабля, к теории гироскопа и другим важным проблемам механики.

Появление многочисленных исследований, связанных, в первую очередь, с быстрым развитием в начале нашего века радиотехники (проблема устойчивой генерации незатухающих колебаний, трансформации частоты и др.), с рядом актуальных задач самолетостроения, с задачами машиностроения, скоростного транспорта и др., показало глубокое, принципиальное отличие нелинейных колебаний от линейных. Это отличие сохраняется даже при рассмотрении слабонелинейных колебаний, описываемых дифференциальными уравнениями, отличающимися от линейных с постоянными коэффициентами наличием весьма малых нелинейных членов. Пренебрегать этими членами стало невозможным, так как в связи с так называемым комулятивным эффектом на достаточно большом временном интервале эти члены оказывают существенное влияние на колебательный процесс.

Мы не будем останавливаться даже на кратком обзоре этапов развития учения о колебаниях (в основном нелинейных), связанных с именами таких корифеев науки как Галилей, Гюйгенс, Ньютон, Ломоносов, Остроградский, ни на математических методах исследования колебательных процессов, ни на вопросах усовершенствования этих методов в связи с прогрессом математики. Вместе с тем нельзя не упомянуть фамилии всемирно признанных ученых, труды которых оказали существенное влияние на становление и развитие теории колебаний, а точнее теории нелинейных колебаний. Труды этих ученых привели к созданию математических методов построения приближенных решений соответствующих математических моделей колебательных процессов и к открытию и объяснению новых явлений, наблюдаемых в нелинейных колебательных системах. Этими учеными, в первую очередь, являются в XIX веке Дж. В. Стрэтт (Лорд Рэлей), А. Пуанкаре, А. Ляпунов, Ван дер Поль, в XX веке Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов.

Говоря о развитии теории нелинейных колебаний, следует отметить гениальные труды А. Пуанкаре по небесной механике [1], которые до сих пор оказывают плодотворное воздействие на работы многих ученых.

Начало классической теории периодических решений дифференциальных уравнений положено в работах А. Ляпунова и А. Пуанкаре в конце прошлого века. В последующие десятилетия она получила дальнейшее развитие и широкое применение в теории колебаний.

Как известно, астрономами был разработан аппарат теории возмущений. Построенные здесь асимптотические разложения оказались весьма эффективными при решении ряда задач небесной механики и были впоследствии перенесены в квантовую механику. Однако, что весьма существенно, эти методы были разработаны специально для консервативных систем и поэтому не могли быть применены без соответствующего изменения для исследования колебательных процессов, поскольку колебательные процессы в основном являются неконсервативными.

В локальной же теории периодических решений Ляпунова – Пуанкаре рассматривались общие нелинейные дифференциальные уравнения, содержащие малый параметр ε таким образом, что при $\varepsilon = 0$ они имеют периодическое решение; авторами этой теории устанавливаются явные критерии существования и устойчивости периодических решений этих уравнений при $\varepsilon \neq 0$. При этом теория Ляпунова – Пуанкаре не связана с обязательной консервативностью рассматриваемой системы.

Существенным преимуществом метода Ляпунова – Пуанкаре перед методом возмущения, разработанным для решения задач небесной механики, является то, что этот метод точен, математически строго обоснован и пригоден как для количественного, так и для качественного исследования нелинейной колебательной системы с малым параметром.

Таким образом, основоположниками теории, с помощью которой можно рассматривать нелинейные колебательные процессы, являются А. Пуанкаре и А. Ляпунов.

Эта теория является основой ряда методов в астрономии и теории колебаний. Значение ее состоит в том, что она дает метод отыскания периодических решений квазилинейных уравнений.

Несмотря на большое значение вопросов существования и устойчивости периодических нелинейных колебаний, которыми, вообще говоря, и ограничивались методы А. Пуанкаре и А. Ляпунова, необходимы были методы, позволяющие исследовать переходные процессы при установлении колебаний. И вот здесь нельзя не остановиться на получившем большую известность методе Ван дер Поля, рассматривавшего в своих исследованиях нелинейное уравнение с малым положительным параметром ε вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{1}$$

При этом Ван дер Поль полагал

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = (1 - x^2)\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Для получения первого приближения (а им Ван дер Поль и ограничился) им был предложен особый метод „медленно меняющихся" коэффициентов: Ван дер Поль представлял решение уравнения (1) в виде функции

$$x = a\cos(\omega t + \varphi) \tag{3}$$

с медленно меняющимися амплитудой a и фазой φ, которые должны удовлетворять дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A(a), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon B(a), \tag{4}$$

где $A(a)$ и $B(a)$ — функции амплитуды a, достаточно просто определяемые с помощью заданной функции $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$.

Однако этот метод, несмотря на то, что он позволил решить ряд важных задач, связанных, в основном, с проблемами радио- и электротехники, был пригоден только для получения первого приближения и не имел строгого математического обоснования.

И вот, в связи с бурным развитием техники, в начале нашего века возникла острая необходимость создания для исследования нелинейных колебательных систем (близких к линейным) математических методов, дающих возможность исследовать не только периодические процессы (как, например, метод А. Пуанкаре), но и квазипериодические, позволяющие исследовать нестационарные процессы, процессы установления колебаний, переходные процессы; методов, позволяющих строить высшие приближения и охватывающих значительно более широкий класс колебательных явлений. Решение этой задачи было начато в 30-е годы Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым. Ими было создано новое направление в математической физике, названное „нелинейная механика".

Опираясь на классические результаты А. Пуанкаре и А. Ляпунова, а также на достижения Ван дер Поля, Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов распространили методы теории возмущения на общие неконсервативные колебательные системы и построили новые асимптотические методы нелинейной механики [2 – 8, 17].

Ниже мы остановимся достаточно подробно на некоторых математических идеях и результатах, принадлежащих Н. Н. Боголюбову и являющихся одними из основных в этом важном новом направлении в математической физике.

К моменту создания этого направления Н. Н. Боголюбов уже был автором ряда математических работ по прямым методам вариационного исчисления, теории почти периодических функций, приближенным решениям дифференциальных уравнений с граничными условиями, получивших высокую оценку как в нашей стране, так и за рубежом [2].

В своей первой научной работе, написанной в 1924 г., Н. Н. Боголюбов рассмотрел поведение решений линейных дифференциальных уравнений на бесконечности. Эта статья послужила началом цикла работ по вариационному исчислению и по теории дифференциальных уравнений, в которых были разработаны прямые методы нахождения экстремума соответствующих функционалов независимо от их регулярности или квазирегулярности. Эти работы уже тогда создали ему широкую известность [2].

Н. Н. Боголюбов дает оригинальный метод нахождения абсолютного минимума интеграла

$$I = \int_a^b f(x, y, y')\,dx, \tag{5}$$

когда в качестве класса допустимых линий принимаются кривые $y = y(x)$, где $y(x)$ — абсолютно непрерывная функция, причем интеграл (5) не является квазирегулярным.

Одна из оригинальных работ этого цикла „О некоторых новых методах вариационного исчисления" [2] на Международном конгрессе, посвященном проблемам вариационного исчисления, была удостоена премии Болонской академии наук (премия А. Мерлани).

Глубокие и тонкие исследования были проведены Н. Н. Боголюбовым в области теории почти периодических функций. Здесь им построена новая теория равномерных почти периодических функций. Н. Н. Боголюбов показал, что основные теоремы этой теории являются результатами общей теоремы, относящейся к произвольным ограниченным функциям. Согласно доказанной им теореме произвольная ограниченная функция, в определенных линейных комбинациях, ведет себя как тригонометрическая сумма и в „среднем" имеет свойство почти периодичности.

Таким образом, Н. Н. Боголюбов создал фактически новое направление в теории равномерных почти периодических функций. Здесь принципиальное значение имеет чисто арифметическое доказательство Н. Н. Боголюбовым следующей **теоремы**: *если G является относительно плотным множеством на действительной оси, то любым достаточно малым положительным ε, η можно сопоставить линейно независимые* (*действительные*) *числа $\omega_1, \omega_2, \ldots$ $\ldots, \omega_s$ так, что если некоторое действительное τ удовлетворяет неравенствам*

$$R(\tau\omega_1) \le \varepsilon, \ \ldots\ , R(\tau\omega_s) \le \varepsilon, \tag{6}$$

где $R(x)$ обозначает дробную часть числа x, то оно также должно удовлетворять неравенству

$$|\tau - \tau_1 - \tau_2 + \tau_3 + \tau_4| \le \eta, \tag{7}$$

где $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ — некоторые точки множества G.

Из этой теоремы непосредственно вытекают теоремы об аппроксимации почти периодических функций тригонометрическими суммами.

В области теории дифференциальных уравнений с граничными условиями Н. Н. Боголюбову принадлежит ряд интересных работ, непосредственно связанных с применением разностного метода к вариационному исчислению. Развитый им здесь аппроксимационный метод применен к решению задач нахождения собственных чисел и собственных функций граничной задачи, а также к решению уравнений в частных производных.

И вот, базируясь на указанных математических достижениях, а также исходя из глубоких результатов Пуанкаре, Ляпунова, Ван дер Поля, результатов, полученных астрономами, а также многочисленных результатов (в основном посвященных решению конкретных задач исследования нелинейных процессов в колебательной системе), полученных многими учеными, Н. Н. Боголюбов в начале 30-х годов приступил, на первом этапе, совместно с Н. М. Крыловым, к созданию совершенно нового направления в исследовании нелинейных колебаний — к разработке так называемых новых асимптотических методов нелинейной механики.

Созданию этой новой области математической физики предшествовал также глубокий анализ, проведенный Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым, всех методов малого параметра (метода А. Пуанкаре, метода Пуассона, различных методов теории возмущений, предложенных астрономами), были выяснены причины появления секулярных членов, малых делителей, делающих непригодными получаемые разложения для качественного анализа колебательного процесса на бесконечном интервале времени.

При построении же алгоритма, пригодного для исследования нелинейного колебательного процесса и структуры асимптотических разложений, авторы исходили из рассмотрения и глубокого анализа самого физического процесса.

Теория новых асимптотических методов нелинейной механики в некоторой степени аналогична теории возмущений, но она получила строгое математическое обоснование, позволяет получать не только первое, но и высшие приближения, может применяться для изучения как периодических, так и непериодических колебательных процессов (квазипериодических, почти периодических и др.), удовлетворяет запросам инженерной практики в отношении простоты расчетных схем.

Идея асимптотических методов нелинейной механики становится особенно ясной, например, при рассмотрении уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{8}$$

описывающего колебательный процесс в системе с одной степенью свободы, близкой (ε — малая величина) к гармоническому вибратору.

При полном отсутствии нелинейности, т. е. при $\varepsilon = 0$, колебания, описываемые уравнением (8), очевидно являются чисто гармоническими

$$x = a\cos\theta, \tag{9}$$

с постоянной амплитудой a и равномерно вращающейся фазой $\left(\frac{da}{dt} = 0,\ \frac{d\theta}{dt} = \omega\right)$.

В случае, когда $\varepsilon \neq 0$, естественно ожидать появления обертонов, а также, при неустановившемся режиме, медленного, систематического изменения амплитуды и частоты. Эти физические соображения об особенностях наблюдаемого колебательного процесса математически авторами идеи оформляются следующим образом: решение уравнения (8) представляется в виде ряда, расположенного по степеням малого параметра:

$$x = a\cos\theta + \varepsilon u_1(a, \theta) + \varepsilon^2 u_2(a, \theta) + \varepsilon^3 \ldots, \tag{10}$$

в котором $u_1(a, \theta)$, $u_2(a, \theta)$, … периодически зависят от θ; a и θ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots . \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, задача построения приближенного решения нелинейного уравнения (8) сведена к задаче о надлежащем подборе коэффициентов $u_1(a, \theta)$, $u_2(a, \theta)$, … , $A_1(a)$, $A_2(a)$, … , $B_1(a)$, $B_2(a)$, … , разложений (10), (11) таким образом, чтобы выражение (10), в котором a и θ определены из системы уравнений (11), формально удовлетворяло рассматриваемому уравнению (8).

Задача эта решается элементарно и для функций, содержащихся в правых частях разложений (10), (11), получение явных выражений не представляет затруднений.

Здесь следует сделать существенное замечание: если возьмем для x и $\frac{dx}{dt}$ формулы m-го приближения, выраженные с помощью формул (10), через a и θ без их производных по времени и будем рассматривать их не как приближенные формулы, а как формулы замены переменных, вводящие новые переменные a и θ, то получим для этих новых неизвестных переменных точные уравнения, отличающиеся от уравнений m-го приближения наличием в правых частях слагаемого вида $\varepsilon^{m+1}F(a, \theta)$.

Это замечание имеет большое значение при доказательстве различных теорем о поведении решений уравнения (8) при $t \to \infty$, при установлении оценок погрешности и т. д.

Приведенную нами идею новых асимптотических методов нелинейной механики удалось в дальнейшем распространить на чрезвычайно широкий круг нелинейных колебательных процессов (на колебания систем с медленно меняющимися параметрами, на системы с запаздыванием по времени, на наличие сложного возмущения типа удара, на случай возмущения, содержащего случайные силы, и. т. п.) [15 – 18, 20, 21], а также вынести эту идею за рамки нелинейной механики в собственном первоначальном смысле и перенести в совершенно другую область — в область статистической физики, в теорию кинетических уравнений.

Это распространение связано с большим циклом работ Н. Н. Боголюбова, посвященных его достижениям в создании целого направления в теоретической физике. На этих работах мы не будем здесь останавливаться (см., например, приведенную в [2] литературу).

Изложенная нами выше основная идея построения асимптотических разложений в нелинейной механике легла в основу монографии Н. Н. Боголюбова совместно с Н. М. Крыловым „Введение в нелинейную механику" [3], вышедшей в 1937 г. малым тиражом и являющейся библиографической редкостью.

В дальнейшем эта идея в значительно расширенном виде явилась основой монографии „Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний" [4], которая выдержала четыре издания в СССР, начиная с 1955 г., а также вышла на пяти языках (английском, французском, немецком, китайском и японском) в пяти основных странах (США, Франция, Германия, Япония и Китай), в которых ученые и инженеры занимаются развитием и применением к решению практических задач методов нелинейной механики.

При построении асимптотических разложений нелинейной механики, а также при установлении различных оценок погрешности и при математическом обосновании основную роль играют идеи об усреднении. Поэтому в первую очередь остановимся подробно на основопологающих результатах, полученных Н. Н. Боголюбовым в направлении развития и математического обоснования метода усреднения [5, 6, 16].

Как известно, метод усреднения первоначально возник в небесной механике и на первом этапе развитие его было связано, в основном, с задачами небесной механики, для решения которых применялись различные схемы усреднения (например, схемы Гаусса, Фату, Делоне – Хилла и др.). При этом основной прием метода усреднения заключался в том, что правые части сложных дифференциальных уравнений, описывающих колебание или вращение, заменялись „сглаженными" усредненными функциями, не содержащими явно времени t и быстро изменяющихся параметров системы.

Получающиеся в результате усредненные уравнения либо точно интегрировались, либо в какой-то мере упрощались, что позволяло получить важные выводы относительно рассматриваемого движения, как качественного, так и количественного характера.

Однако в теории нелинейных колебаний метод усреднения долгое время оставался неизвестным, хотя в отдельных случаях в неявном виде использовался уже давно. Так, в 1835 г. М. В. Остроградский, рассматривая нелинейное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \alpha x^3, \tag{12}$$

получил в первом приближении решение, совпадающее с получаемым методом усреднения. А еще ранее, в 1682 г. И. Ньютон, исследуя движение маятника при наличии сопротивления, нашел формулу, совпадающую с первым приближением, получаемым с помощью метода усреднения.

В основу систематического применения метода усреднения для исследования нелинейных колебательных процессов в радио- и электротехнике, механике легли известные работы голландского ученого Ван дер Поля, разработавшего, как было указано выше, достаточно эффективный способ решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих колебательный процесс в системах с одной степенью свободы. Благодаря своей простоте и наглядности, а также широкой популяризации Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси, метод Ван дер Поля начал применяться инженерами для исследования колебательных процессов.

Вместе с тем следует отметить, что в формулировке метода усреднения, данной Ван дер Полем, усредненные уравнения выводились с помощью далеко не строгих с математической точки зрения рассуждений.

Хотя этот метод и оказался плодотворным на первом этапе развития нелинейной механики, однако он не мог полностью удовлетворить ни запросам практики, ни минимальным требованиям убедительности и общности выводов о его степени точности и пределах применимости. Однако для частного случая дифференциальных уравнений с периодическими правыми частями некоторые шаги в области математического обоснования метода усреднения были сделаны в 1928 г. П. Фату и в 1934 г. Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси.

Как указывалось выше, уже на первом этапе создания асимптотических методов нелинейной механики Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым при получении уравнений первого приближения была обнаружена глубокая связь алгоритма асимптотического приближения с методом усреднения в небесной механике. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов показали, что уравнения первого приближения получаются из точных уравнений путем усреднения их по времени, и сформулировали это в виде общего принципа, назвав его принципом усреднения [3, 10].

Создание же строгой теории метода усреднения принадлежит Н. Н. Боголюбову [5, 6]. Он показал, что метод усреднения органически связан с существованием некоторой замены переменных, позволяющей исключить время t из правых частей уравнений с произвольной степенью точности относительно малого параметра ε. При этом, исходя из тонких физических соображений, указал как строить не только систему первого приближения (усредненную систему), но и усредненные системы высших приближений, решения которых аппроксимируют решения исходной (точной) системы с произвольной наперед заданной точностью.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \tag{13}$$

где ε — малый положительный параметр, t — время, x — точка n-мерного евклидова пространства E_n.

Уравнения, правая часть которых пропорциональна малому параметру ε, согласно терминологии, введенной Н. Н. Боголюбовым, называются уравнениями в стандартной форме.

При определенных условиях, налагаемых на правые части уравнений (13), заменой переменных согласно формуле

$$x = \xi + \varepsilon F_1(t, \xi) + \varepsilon^2 F_2(t, \xi) + \ldots + \varepsilon^m F_m(t, \xi), \tag{14}$$

уравнение (13) приводим к эквивалентному уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \mathcal{P}_2(\xi) + \ldots + \varepsilon^m \mathcal{P}_m(\xi) + \varepsilon^{m+1} R(t, \xi). \tag{15}$$

Пренебрегая в уравнении (15) слагаемыми $\varepsilon^{m+1} R(t, \xi)$, получаем „усредненное" уравнение m-го приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 \mathcal{P}_2(\xi) + \ldots + \varepsilon^m \mathcal{P}_m(\xi). \tag{16}$$

При этом функции $F_1(t, \xi)$, $F_2(t, \xi), \ldots, F_m(t, \xi)$, входящие в правую часть замены (14), находятся элементарно; функции $X_0(\xi)$, $\mathcal{P}_2(\xi), \ldots, \mathcal{P}_m(\xi)$ определяются в результате усреднения правой части уравнения (13) после подстановки в нее выражения (14).

Сформулированный и развитый Н. Н. Боголюбовым метод усреднения, применительно к уравнениям в стандартной форме, получил в его работах строгое математическое обоснование (см., например, [5]). Это обоснование сводится к решению двух основных проблем:

1) определение условий, при выполнении которых разность между решением точной системы уравнений (13) и решением соответствующей ей усредненной системы (в первом приближении)

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \tag{17}$$

где

$$X_0(\xi) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, \xi)\, dt, \tag{18}$$

для достаточно малых значений параметра ε становится сколь угодно малой на сколь угодно большом, но конечном, интервале времени;

2) установление соответствия между различными свойствами решений точных уравнений (13) и усредненных уравнений (17), зависящими от их поведения на бесконечном интервале времени, в частности установление соответствия между периодическими решениями точной и усредненной систем и установление свойств притяжения ими близких решений.

В решении первой проблемы для достаточно широкого класса дифференциальных уравнений в стандартной форме фундаментальное значение имеет классическая теорема Н. Н. Боголюбова [5], устанавливающая оценку разности

$$|x(t) - \xi(t)| \tag{19}$$

на сколь угодно большом, однако конечном, интервале времени при достаточно общих условиях, налагаемых на правые части системы (13). При этом для правых частей системы (13) должно существовать только среднее (18).

Приведем формулировку этой классической теоремы.

Теорема. *Пусть функция $X(t, x)$ удовлетворяет условиям:*

а) *для некоторой области $\mathcal{D}$ можно указать такие положительные постоянные M и λ, что для любых точек x, x', x'' из этой области выполняются неравенства*

$$|X(t,x)| \le M, \qquad |X(t,x') - X(t,x'')| \le \lambda |x' - x''|; \tag{20}$$

б) *в этой области равномерно относительно* x *существует предел*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t,x)\,dt = X_0(x). \tag{21}$$

Тогда любым, сколь угодно малым положительным ρ, η *и сколь угодно большому* L *можно сопоставить такое положительное* ε_0, *что если* $\xi = \xi(t)$ *— решение уравнения*

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \tag{22}$$

определенное на интервале $0 < t < \infty$ *и лежащее в области* $\mathcal{D}$ *вместе со своей* ρ*-окрестностью, то для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *в интервале* $0 < t < L/\varepsilon$ *справедливо неравенство*

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta, \tag{23}$$

в котором $x = x(t)$ *— решение уравнения* (13), *совпадающее с* $\xi(t)$ *при* $t = 0$.

Простое и изящное доказательство этой теоремы впервые было опубликовано Н. Н. Боголюбовым в 1945 г. в монографии „О некоторых статистических методах в математической физике" [5].

Эта теорема явилась фундаментальной теоремой математического обоснования метода усреднения и дала возможность существенно расширить область применения метода усреднения для исследования нелинейных колебательных систем. В дальнейшем она получила развитие и обобщение в работах многих авторов [15, 16].

Решение второй проблемы Н. Н. Боголюбов посвятил несколько теорем [5, 16].

В этих теоремах рассматривается соответствие между периодическими решениями, вопрос о существовании и соответствии между почти периодическими решениями, а также выдвинута идея рассмотрения интегральных многообразий для нелинейных дифференциальных уравнений в стандартной форме (на этой идее мы ниже остановимся более подробно).

Приведем сперва основную теорему Н. Н. Боголюбова, относящуюся ко второй проблеме математического обоснования метода усреднения [5].

Теорема. *Пусть функция* $X(t,x)$, *входящая в уравнение* (13), *удовлетворяет следующим условиям:*

а) *усредненное уравнение* (22), *в котором*

$$X_0(\xi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(t,\xi)\,dt, \tag{24}$$

имеет квазистатическое решение $\xi = \xi_0$;

б) *вещественные части всех* n *корней характеристического уравнения*

$$\det|pI - X'_{0\xi}(\xi_0)| = 0, \tag{25}$$

составленного для уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta\xi}{dt} = \varepsilon X'_{0\xi}(\xi_0)\,\delta\xi, \tag{26}$$

соответствующих квазистатическому решению $\xi = \xi_0$, *отличны от нуля;*

в) *можно указать такую* ρ*-окрестность* $\mathcal{D}_\rho$ *точки* ξ, *в которой* $X(t,x)$

— *почти периодические функции* t *равномерно относительно* $x \in \mathcal{D}_\rho$;

г) *функция* $X(t, x)$ *и ее частные производные первого порядка по* x *ограничены и равномерно непрерывны относительно* x *в области* $-\infty < t < \infty$, $x \in \mathcal{D}_\rho$.

Тогда можно указать такие положительные постоянные ε', σ_0, σ_1 (*причем* $\sigma_0 \le \sigma_1 < \rho$), *что для всякого положительного* $\varepsilon < \varepsilon'$ *будут справедливы следующие утверждения:*

1) *уравнение* (13) *имеет единственное решение* $x = x^*(t)$, *определенное на интервале* $(-\infty, \infty)$, *для которого*

$$|x^*(t) - \xi_0| < \sigma_0, \quad -\infty < t < \infty; \tag{27}$$

2) *это решение* $x(t)$ *почти периодическое с частотным базисом функции* $X(t, x)$;

3) *можно найти такую функцию* $\delta(\varepsilon)$, *стремящуюся к нулю вместе с* ε, *что будет справедливо неравенство*

$$|x^*(t) - \xi_0| \le \delta(\varepsilon), \quad -\infty < t < \infty; \tag{28}$$

4) *пусть* $x(t)$ — *любое решение уравнения* (13), *отличное от* $x^*(t)$, *при некотором* $t = t_0$ *удовлетворяющее неравенству*

$$|x(t) - \xi| \le \sigma_0; \tag{29}$$

тогда если вещественные части всех корней характеристического уравнения (25) *отрицательны, то разность* $|x(t) - x^*(t)|$ *стремится к нулю при* $t \to \infty$, *причем*

$$|x(t) - x^*(t)| < Ce^{-\gamma\varepsilon(t-t_0)}, \tag{30}$$

где C *и* γ — *положительные постоянные.*

Если вещественные части всех корней характеристического уравнения (25) *положительны, можно найти такое* $t_1 > t_0$, *для которого*

$$|x(t_1) - \xi_0| > \sigma_1. \tag{31}$$

Если s *вещественных частей рассматриваемых корней отрицательны, а остальные* $n - s$ *положительны, то в* σ_0-*окрестности точки* ξ_0 *существует* s-*мерное точечное многообразие* $\mathfrak{M}_{t_0}$ *такое, что из соотношения* $x(t_0) \in \mathfrak{M}_{t_0}$ *вытекает экспоненциальное стремление к нулю (при* $t \to \infty$) *разности* (30), *а из соотношения* $x(t_0) \overline{\in} \mathfrak{M}_{t_0}$ *следует справедливость неравенства* (31).

Н. Н. Боголюбову принадлежит идея рассмотрения дифференциальных уравнений нелинейной механики на интегральных многообразиях [5, 8, 19].

Прежде чем приводить основную теорему, посвященную этой проблеме, остановимся кратко на общей идее метода. Для этого приведем сначала аналитическое определение интегрального многообразия для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon), \tag{32}$$

где x, X — n-мерные векторы евклидова пространства E_n, t — время, ε — малый положительный параметр и правые части системы (32) удовлетворяют некоторым довольно общим условиям для $-\infty < t < \infty$ и x, содержащихся в некотором открытом множестве $V_n \in E_n$.

Пусть каждому t из интервала $(-\infty, \infty)$ соответствует некоторое множество S_t точек x, которое можно представить аналитически в параметрической форме уравнениями вида

$$x = f(t, C_1, C_2, \ldots, C_s), \tag{33}$$

где $f(t, C_1, C_2, \ldots, C_s)$ удовлетворяют условиям Липшица по отношению к $C_1, C_2, \ldots, C_s$ во всей области их изменения.

Тогда S_t — s-мерное $(s \leq n)$ интегральное многообразие для уравнения (32), если для любого решения $x = x(t)$ этого уравнения из соотношения

$$x(t) \in S_t, \tag{34}$$

справедливого в какой-то момент времени $t = t_0$, вытекает его справедливость для любого вещественного t.

В геометрической интерпретации интегральное многообразие S_t представляет собой гиперповерхность, обладающую тем свойством, что если какое-нибудь значение решения системы уравнений лежит на интегральном многообразии (на гиперповерхности), то и все решение в целом будет лежать на многообразии (на гиперповерхности).

Первоначально в [5] Н. Н. Боголюбовым идея интегральных многообразий была применена к следующей частной проблеме. Рассматривается частный случай уравнения (32), когда его правая часть пропорциональна малому параметру, — так называемые уравнения в стандартном виде (13) при предположении, что для любых $x \in V_n$ существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)\, dt = X_0(x) \tag{35}$$

равномерно по отношению к t в интервале $(-\infty, \infty)$, и одновременно с уравнением (13) рассматривается усредненное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x). \tag{36}$$

Для уравнения (13) решается достаточно сложная задача — установление ряда соответствий между такими свойствами точных решений (решениями системы уравнений (13)) и приближенных решений (решениями усредненной системы уравнений (36)), которые зависят от их поведения на бесконечном интервале времени.

Так, во многих важных случаях усредненные уравнения (36) допускают инвариантные многообразия тороидального типа, и представляет интерес следующий вопрос: будут ли лежать в достаточно малой окрестности этих многообразий интегральные многообразия для точных уравнений (13) и в какой мере они устойчивы?

Возникающие здесь проблемы имеют некоторую аналогию с проблемами существования периодических решений в локальной теории А. Пуанкаре. Однако, тогда как в теории А. Пуанкаре вопрос сводится к исследованию разрешимости системы обыкновенных уравнений с конечным числом неизвестных, содержащей малый параметр, и вопрос этот исследуется с помощью теоремы о неявных функциях, в теории интегральных многообразий мы имеем дело с функциональными уравнениями, определяющими функции, характеризующие искомые интегральные многообразия.

Здесь следует особо отметить, что независимо от указанной выше проблемы о соответствии между точными и приближенными решениями системы уравнений (13) (между решениями системы уравнений (13) и решениями системы уравнений (36)), что является проблемой обоснования метода усреднения (и вообще асимптотических методов нелинейной механики), построение даже локальной теории интегральных многообразий для системы уравнений (13) представляет самостоятельный интерес в связи с тем, что качественное исследование решений системы уравнений (13) значительно упрощается, если эти решения лежат на многообразии меньшего числа измерений, чем исходное фазовое пространство.

Специальной особенностью идей, развиваемых в методе интегральных многообразий, является некоторый новый подход в качественной теории дифференциальных уравнений. Здесь рассматриваются две системы дифференциальных уравнений — точные уравнения (13) и приближенные уравнения (36), разность между правыми частями их — величина асимптотически малая.

Как известно, индивидуальные решения, как правило, очень чувствительны к малым изменениям правых частей уравнений.

В теории интегральных многообразий рассматриваются не индивидуальные решения (кривые), а интегральные многообразия (гиперповерхности). Оказывается, что интегральные многообразия — есть образование более стабильное по отношению к малым изменениям правых частей уравнений, по сравнению с индивидуальными решениями. Во многих случаях здесь можно доказать теоремы следующего типа: если приближенные уравнения (36) имеют некоторое интегральное многообразие, то точные уравнения (13) допускают также интегральное многообразие, лежащее в асимптотически узкой окрестности интегрального многообразия приближенной системы уравнений. Вместе с тем, подобные теоремы для индивидуальных решений можно получить только при достаточно жестких условиях, налагаемых на правые части уравнений (13) и (36).

Заметим еще раз, что факт существования интегрального многообразия для точных уравнений (13) имеет большое значение и для изучения их индивидуальных решений, поскольку теперь можно вместо рассмотрения всего фазового пространства сконцентрироваться на рассмотрении решений, лежащих на интегральном многообразии — на гиперповерхности.

Особенно это относится к случаю устойчивых интегральных многообразий, когда имеется сжатие всего фазового пространства к интегральному многообразию.

Рассмотрим уравнение (13) и приведем, согласно Н. Н. Боголюбову, формулировку доказанной им упомянутой выше теоремы, являющуюся основной в теории интегральных многообразий нелинейной механики [5].

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия*:

а) *уравнение* (*усредненное*) (22) *имеет периодическое решение*

$$\xi(\omega\tau), \qquad \xi(\varphi+2\pi) = \xi(\varphi); \tag{37}$$

б) *вещественные части всех* $n-1$ *характеристических показателей, соответствующих периодическому решению* (37) *для уравнения* (22) *отличны от нуля*;

в) *можно найти такую* ρ*-окрестность* $\mathcal{D}_\rho$ *орбиты этого периодического решения, что функция* $X(t,x)$ *и ее частные производные первого порядка по* x_k *будут ограничены и равномерно непрерывны по отношению к* x *в области* $-\infty < x < \infty$, $x \in \mathcal{D}_\rho$;

г) *в каждой точке* $\mathcal{D}_\rho$ *равномерно по отношению к* t

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^{t+T} X(t,x)\,dt \to X_0(x), \qquad T\to\infty. \tag{38}$$

Тогда можно указать такие положительные ε_0, σ_0, σ_1 (*причем* $\sigma_0 < \sigma_1 < \rho$), *что для каждого положительного* ε, *меньшего* ε_0, *уравнение* (13) *имеет единственное интегральное многообразие* S_t, *лежащее для всех вещественных* t *в области* $\mathcal{D}_{\sigma_0}$.

Это интегральное многообразие при любом ε *таком, что* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *обладает следующими свойствами:*

1) S_t *допускает параметрическое представление вида*

$$x = f(t, \theta), \tag{39}$$

где $f(t, \theta)$ *определено для всех вещественных* t, θ *и имеет период* 2π *по отношению к угловому параметру* θ; *при этом можно найти такие функции* $\delta(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$, *стремящиеся к нулю вместе с* ε, *что*

$$|f(t, \theta) - \xi(\theta)| \le \delta(\varepsilon); \quad |f(t, \theta') - f(t, \theta'')| \le \eta(\varepsilon)|\theta' - \theta''| \tag{40}$$

для любых вещественных t, θ, θ', θ'';

2) *можно, далее, построить функцию* $F(t, \theta)$, *определенную для всех вещественных* t, θ, *обладающую периодом* 2π *по отношению к* θ *и удовлетворяющую неравенствам*

$$|F(t, \theta)| \le \delta^*(\varepsilon); \quad |F(t, \theta') - F(t, \theta'')| \le \eta^*|\theta' - \theta''|, \tag{41}$$

в которых $\delta^*(\varepsilon)$, $\eta^*(\varepsilon)$ *стремятся к нулю вместе с* ε, *таким образом, что всякое решение уравнения* (13), *принадлежащее многообразию* S_t, *представимо в виде*

$$x = f(t, \theta(t)), \tag{42}$$

где $\theta = \theta(t)$ *есть некоторое решение уравнения*

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon\omega + \varepsilon F(t, \omega), \tag{43}$$

и наоборот, выражение (42), *в котором* $\theta(t)$ *есть решение уравнения* (43), *всегда является решением уравнения* (13), *принадлежащим многообразию* S_t;

3) *если* $\{\tau\}$ *есть последовательность вещественных чисел, для которых*

$$X(t + \tau_m, x) - X(t, x) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to 0 \tag{44}$$

равномерно по отношению к t, x $\{-\infty < t < \infty,\ x \in \mathcal{D}_\rho\}$, *то тогда равномерно по отношению к* t, θ:

$$f(t + \tau_m, \theta) - f(t, \theta) \to 0; \quad F(t + \tau_m, \theta) - F(t, \theta) \to 0; \tag{45}$$

4) *пусть* $x = x(t)$ *представляет любое решение уравнения* (13), *удовлетворяющее при некотором* t_0 *соотношению вида*

$$x(t_0) \in \mathcal{D}_{\sigma_0}.$$

Тогда, если вещественные части всех $n - 1$ *упомянутых выше характеристических показателей отрицательны, расстояние* $\rho\{x(t), S_t\}$ *точки* $x(t)$ *до множества* S_t *экспоненциально стремится к нулю при* $t \to +\infty$.

Если все эти вещественные части положительны, можно найти такое $t_1 > t_0$, *что*

$$x(t_1) \,\overline{\in}\, \mathcal{D}_{\sigma_1}. \tag{46}$$

Если s *рассматриваемых вещественных частей отрицательны, а остальные* $n - 1 - s$ *положительны, в области* $\mathcal{D}_{\sigma_0}$ *существует* $(1 + s)$-*мерное многообразие* $\mathfrak{M}_{t_0}$ *такое, что из соотношения* $x(t_0) \in \mathfrak{M}_{t_0}$ *вытекает экспоненциальное стремление к нулю расстояния* $\rho\{x(t), S_t\}$ (*при* $t \to +\infty$), *а из соотношения* $x(t_0) \,\overline{\in}\, \mathfrak{M}_{t_0}$ — *справедливость соотношения* (46).

Эта теорема Н. Н. Боголюбова получила большое дальнейшее развитие и обобщение и стала основной при создании целого направления в качественной (условие отсутствия внутреннего резонанса), Н. Н. Боголюбов ищет решение системы уравнений (47), соответствующее одночастотному колебанию с помощью разложений

$$x_k = a\varphi_k e^{i\psi} + a\varphi_k^* e^{-i\psi} + \varepsilon U_k^{(1)}(a,\psi) + \varepsilon^2 U_k^{(2)}(a,\psi) + \ldots, \qquad (50)$$
$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

в которых $U_k^{(1)}(a,\psi)$, $U_k^{(2)}(a,\psi)$, ..., $k = 1, 2, \ldots, n$, являются периодическими функциями угла ψ с периодом 2π, а величины a и ψ как функции времени определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots,$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots. \qquad (51)$$

Предложенный и разработанный Н. Н. Боголюбовым метод построения одночастотных решений в ряде работ других ученых получил дальнейшее развитие и применение для построения решений самых разнообразных колебательных систем со многими степенями свободы, в том числе и систем с бесконечным числом степеней свободы, а также строгое математическое обоснование (оценка погрешности, устойчивость и т. п.).

Предложенный Н. Н. Боголюбовым метод исследования одночастотных колебаний является ярким примером исследования поведения решений на интегральном многообразии.

Завершая краткий обзор основных теорем и идей, полученных Н. Н. Боголюбовым и являющихся фундаментальными в созданном им совместно с Н. М. Крыловым новом разделе математической физики — нелинейной механике, нельзя не упомянуть о результатах, полученных Н. Н. Боголюбовым в 1963 г. в направлении исследования квазипериодических режимов в нелинейных колебательных системах, с помощью метода последовательных замен переменных, обеспечивающего ускоренную сходимость итерационного процесса.

Здесь, объединив метод ускоренной сходимости и метод интегральных многообразий, Н. Н. Боголюбову удалось доказать ряд изящных теорем, дающих возможность исследовать поведение нелинейных колебательных систем при $t \to \infty$ и, в частности, доказать основную теорему о существовании и устойчивости квазипериодического режима в нелинейной колебательной системе.

В 1934 г. Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым был предложен один из многих методов нелинейной механики (так называемых асимптотических методов нелинейной механики) — специальный метод последовательных замен, который во многих случаях оказался эффективным для решения ряда интересных и важных задач нелинейной механики. В частности, этим методом была решена важная задача о существовании квазипериодического режима с двумя основными частотами в нелинейных колебательных системах.

Остановимся на основных моментах этого метода [10]. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в стандартном виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon), \qquad (52)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — точки n-мерного евклидова пространства E_n, t — время, ε — малый положительный параметр.

Для уравнения (52) образуем, согласно общим методам нелинейной механики, m-е приближение

$$x^{(m)} = \xi + \varepsilon F^{(1)}(t, \xi) + \ldots + F^{(m)}(t, \xi), \qquad (53)$$

в котором новые переменные ξ являются решениями уравнения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \mathcal{P}^{(1)}(\xi) + \ldots + \varepsilon^m \mathcal{P}^{(m)}(\xi). \tag{54}$$

Здесь функции $F^{(1)}(t, \xi), \ldots, F^{(m)}(t, \xi)$ и $\mathcal{P}^{(1)}(\xi), \ldots, \mathcal{P}^{(m)}(\xi)$ подобраны (исходя из известных выражений для $X(t, \xi, \varepsilon)$) так, чтобы ряды (53) удовлетворяли уравнениям (52) с точностью до величин порядка ε^{m+1}, как только ξ будет определено из уравнений (54).

Если теперь, определив функции $F^{(1)}(t, \xi), \ldots, F^{(m)}(t, \xi)$, рассматривать выражение (53), не как обычно в нелинейной механике приближенное асимптотическое решение системы (54), а как некоторую замену переменных, преобразующую неизвестную x к новой неизвестной ξ, то уравнение (52) приводится к уравнению

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \mathcal{P}^{(1)}(\xi) + \varepsilon^2 \mathcal{P}^{(2)}(\xi) + \ldots + \varepsilon^m \mathcal{P}^{(m)}(\xi) + \varepsilon^{m+1} R(t, \xi, \varepsilon), \tag{55}$$

состоящему из „интегрируемой" части и возмущения $\varepsilon^{m+1} R(t, \xi, \varepsilon)$, являющегося величиной порядка ε^{m+1} и зависящего от времени t. Если при этом переменная ξ удовлетворяет уравнению (55), то выражение (53) представляет собой точное решение (52).

Устремим теперь в выражениях (53) – (55) m к бесконечности. Если ряды (53) окажутся сходящимися, то система уравнений (52) сведется к „интегрируемой" системе

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon \mathcal{P}(\xi, \varepsilon), \tag{56}$$

где

$$\mathcal{P}(\xi, \varepsilon) = \lim_{m \to \infty} \left(P^{(1)}(\xi) + \varepsilon P^{(2)}(\xi) + \ldots + \varepsilon^m P^{(m)}(\xi) \right).$$

Однако в общем случае такое развитие метода невозможно: уже для систем с квазипериодическими по t функциями $X(t, x, \varepsilon)$ в формулах (53) появляются малые делители, и ряды (53) расходятся. В связи с этим идея сведения „неинтегрируемой" системы (52) к „интегрируемой" системе (56) оставалась недоступной и метод не позволял делать заключения о поведении решений системы (52). Ряды же (53) можно было рассматривать при m — конечном и ε — малом как асимптотические приближенные решения.

Эта трудность была преодолена Н. Н. Боголюбовым в 1963 г. благодаря привлечению идеи ускоренной сходимости соответствующих разложений в итерационном процессе, которая берет свое начало в методе касательных, или методе Ньютона.

Здесь следует, конечно, отметить, что уже А. Н. Колмогоров [12 – 14] анонсировал применение метода Ньютона для получения итерационного процесса в вопросе о существовании квазипериодических решений для гамильтоновых систем классической механики.

Приведем основную идею указанных работ А. Н. Колмогорова применительно к консервативной динамической системе, определяемой каноническими уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p = (p_1, \ldots, p_n), \quad q = (q_1, \ldots, q_n), \end{aligned} \tag{57}$$

с аналитической функцией Гамильтона $H(p, q, \varepsilon)$, периодической по q с периодом 2π.

Предположим, что гамильтониан $H(p, q, \varepsilon)$ имеет вид

$$H(p, q, \varepsilon) = H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q) + \varepsilon^2 \ldots, \tag{58}$$

т. е. система (57) отличается от интегрируемой малым возмущением.

Подставляя значение $H(p, q, \varepsilon)$ (58) в уравнение (57), получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial p} + \ldots, \\ \frac{dq}{dt} &= \omega(p) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial p} + \ldots, \quad \omega(p) = \frac{\partial H_0}{\partial p}. \end{aligned} \tag{59}$$

Выполним теперь в системе уравнений (59) каноническое преобразование согласно формулам

$$\begin{aligned} p &= p' + \varepsilon \frac{\partial S(p', q)}{\partial q}, \\ q' &= q + \varepsilon \frac{\partial S(p', q)}{\partial p'}, \end{aligned} \tag{60}$$

приводящее $H(p, q, \varepsilon)$ к виду

$$H(p, q, \varepsilon) = H_0'(p', \varepsilon) + \varepsilon^2 H_1'(p', q') + \ldots, \tag{61}$$

а уравнения (59) к виду

$$\begin{aligned} \frac{dp'}{dt} &= -\varepsilon^2 \frac{\partial H_1'}{\partial q'} + \ldots, \\ \frac{dq'}{dt} &= \omega'(p') + \varepsilon^2 \frac{\partial H_1'}{\partial p'} + \ldots. \end{aligned} \tag{62}$$

Совершая в системе уравнений (62) преобразование того же типа, что и замена (60), получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dp''}{dt} &= -\varepsilon^4 \frac{\partial H_1''}{\partial q''} + \ldots, \\ \frac{dq''}{dt} &= \omega''(p'') + \varepsilon^4 \frac{\partial H_1''}{\partial p''} + \ldots \end{aligned} \tag{63}$$

и т. д., при этом порядки малости „неинтегрируемых" добавок в получаемых уравнениях будут соответственно пропорциональны ε^2, ε^4, $\varepsilon^8, \ldots, \varepsilon^{2^s}, \ldots$.

В то же время как в аппроксимационном процессе, осуществляемом с помощью формул (53), для повышения точности мы правые части дополняем членами высшего порядка, в приведенном, согласно А. Н. Колмогорову, процессе повторно применяем такое же преобразование. Возникающая при этом „ускоренная сходимость" процесса подавляет влияние малых знаменателей, появляющихся в формулах замены переменных (60), и для „большинства" начальных значений p суперпозиция таких замен сходится.

При решении ряда задач нелинейной механики можно установить для соответствующих дифференциальных уравнений существование интегральных (инвариантных) многообразий, имеющих свойство асимптотического притяжения близких траекторий. Например, пусть динамическая система характеризуется уравнением

$$\frac{dx}{dt} = X(x, \varepsilon), \tag{64}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $X = (X_1, \dots, X_n)$ — векторы n-мерного евклидова пространства, ε — малый положительный параметр.

При определенных условиях, налагаемых на $X(x, \varepsilon)$, для системы уравнений (64) можно установить существование инвариантного тороидального многообразия

$$x = \Psi(\varphi), \tag{65}$$
$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m).$$

В этом случае исходная система (64) сводится к уравнению на торе

$$\frac{d\varphi}{dt} = \nu + f(\varphi, \varepsilon), \tag{66}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ — периодическая функция φ, которая может быть достаточно малой (благодаря наличию ε в правой части уравнения (13)), т. е. изменение φ близко к равномерному вращению с постоянной угловой скоростью ν.

При определенных условиях многообразие (65) имеет свойство асимптотического притяжения траекторий любых решений уравнений (64), не лежащих на торе (65).

Представляет интерес не только нахождение интегрального многообразия (65), но исследование поведения интегральных кривых, лежащих на этом многообразии.

Исследования Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (1934 г.) [10], посвященные этому вопросу и опирающиеся на метод последовательных замен с помощью преобразований (53), проводились с помощью результатов Пуанкаре – Данжуа о преобразовании окружности самой в себя.

Однако эта теория относится к одномерному случаю, когда исходная система дифференциальных уравнений (64) сводится к двум уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \nu + f(\varphi, \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega. \end{aligned} \tag{67}$$

Согласно теории Пуанкаре – Данжуа, поведение решений на двумерном торе (67) характеризуется числом вращения Ω: 1) если Ω иррациональное, то решение на торе квазипериодическое; 2) если Ω — рациональное, то имеются периодические решения и все остальные решения с течением времени приближаются к ним.

Если исходная система дифференциальных уравнений (64) приводится к виду (67), то, как было показано Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым в 1934 г. [10], удается доказать существование квазипериодического решения с двумя основными частотами ω_1, ω_2 и установить его устойчивость. Общий же случай в рамках указанной теории Пуанкаре – Данжуа в то время не удалось исследовать.

В 1963 г. Н. Н. Боголюбову удалось, объединяя метод ускоренной сходимости с развитым им методом интегральных многообразий и учитывая при этом ряд специфических особенностей, свойственных нелинейным колебательным системам, значительно расширить области применимости метода последовательных замен и решить задачу о существовании квазипериодических *решений* для общего случая $n > 2$.

Перейдем к формулировке основной задачи, рассмотренной Н. Н. Боголюбовым [11]. Обычно при исследовании системы уравнений (64) вместо переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ удобно вводить новые переменные h, φ таким образом, чтобы исходные уравнения (64) сводились к системе вида

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= Hh + F(h, \varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \nu + f(h, \varphi), \end{aligned} \tag{68}$$

где $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_0})$ (сумма размерностей векторов h и φ $n + n_0$ равна размерности вектора x и обозначена $n + n_0$ ради удобства). Полагаем, что вещественные части собственных значений $(n \times n)$-мерной матрицы H все отрицательны:

$$|e^{Ht}| \leq \mathcal{P} e^{\alpha t}, \qquad t \geq 0, \tag{69}$$

где $\mathcal{P} > 0$, $\alpha > 0$ — постоянные; вектор-функции $F(h, \varphi)$ и $f(h, \varphi)$ малы при достаточно малых h и регулярны.

Заметим, что даже если функции, содержащиеся в правых частях системы уравнений (68), аналитические и сколь угодно малые, непосредственно нельзя доказать существование аналитического тора в комплексной области для этих уравнений. Это становится очевидным при рассмотрении простого примера.

Рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\alpha h + f(\varphi) = -\alpha h + \sum_{(k)} p^{(k)} e^{i(k\varphi)}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \nu + \varepsilon\gamma, \qquad h = h_1, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned} \tag{70}$$

Для системы (70) легко найти инвариантное многообразие

$$h = S(\varphi), \tag{71}$$

где

$$S(\varphi) = \sum_{(k)} \frac{e^{i(k,\varphi)}}{ik(\nu + \varepsilon\gamma) + \alpha}, \qquad k = (k_1, k_2). \tag{72}$$

Очевидно, что при вещественных ε и γ тор (72) всегда существует. Если же ε или γ комплексные, то ими всегда можно распорядиться так, чтобы

$$k(\nu + \operatorname{Re} \varepsilon\gamma) = 0$$

и

$$k(\operatorname{Im} \varepsilon\gamma) + \alpha = 0.$$

В этом случае для функции $S(\varphi)$ мы можем получить множество полюсов при сколь угодно малых $|\varepsilon|$ и, следовательно, непосредственно нельзя установить существование инвариантного тора, аналитического как по углу φ, так и по параметру ε в окрестности значения $\varepsilon = 0$.

Заметим также, что, так как при построении замены (53) в знаменатели входят суммы типа (m, ω), мы не можем раскладывать ω по степеням малого параметра, и поэтому целесообразно выражать входящие в уравнения (68) „частоты нулевого приближения" ν через точные частоты ω и не по ν и f находить ω, а считать, что ω заданы, и определять $\Delta = \nu - \omega$ как функцию ω.

Подставляя в уравнения (68) $\nu = \omega + \Delta$, получаем систему уравнений

$$\frac{dh}{dt} = Hh + F(h, \varphi, \Delta),$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \Delta + f(h, \varphi, \Delta). \tag{73}$$

Предположим теперь, что для системы (73) выполняются следующие условия: $F(h, \varphi, \Delta)$, $f(h, \varphi, \Delta)$ — аналитические функции комплексных переменных h, φ, Δ в области

$$\|h\| \leq \eta_1, \quad |\operatorname{Im}\varphi| \leq \rho_1, \quad |\Delta| \leq \sigma_1, \tag{74}$$

достаточно малые при достаточно малых h, $\operatorname{Im}\varphi$, Δ и в области (74) удовлетворяют условиям

$$\|F(h, \varepsilon, \Delta)\| \leq N, \quad n\left\|\frac{\partial F(h, \varphi, \Delta)}{\partial h_q}\right\| \leq L, \tag{75}$$

$$\|f(h, \varphi, \Delta)\|\,\| \leq M,$$

где константы N, L, M, η_1, ρ_1, σ_1 связаны рядом соотношений, которые здесь не приводим и которые получаются в процессе сложного доказательства теоремы.

Кроме того, введена норма

$$\|h\| = \sup_{\substack{k=1,\ldots,n \\ 0 \leq t < \infty}} \|e^{Ht}\|\, e^{\alpha t}, \tag{76}$$

где H — квадратная n-мерная матрица в уравнении (73), удовлетворяющая условию

$$|e^{Ht}| \leq \mathcal{P} e^{-\alpha t} \quad \text{для} \quad t \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \mathcal{P} = \text{const} \geq 1. \tag{77}$$

Пусть, кроме того, вещественные $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ удовлетворяют условию

$$|(m.\, \omega)| \geq k\,|m|^{-(n_0+1)}, \tag{78}$$

где n_0 — размерность пространства ω, $|m| = |m_1| + |m_2| + \ldots + |m_{n_0}|$, m_1, m_2, ... , m_{n_0} — любые целые (положительные и отрицательные) числа.

Условие (78) необходимо в связи с тем, что при построении замен переменных у нас будут появляться знаменатели типа (m, ω).

Однако известно, что если рассматривать сферу в пространстве $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n_0})$, то относительная мера множеств тех ω, для которых условие (78) не выполняется, будет стремиться к нулю вместе с k. Таким образом, при достаточно малых k „большинство” ω удовлетворяет неравенству (78).

Итак, Н. Н. Боголюбов, объединив метод ускоренной сходимости с методом интегральных многообразий, после тонких рассуждений, учитывающих особенности нелинейных систем, доказал следующую основную теорему [11].

Теорема. *Если в системе уравнений* (73) *функции* $F(h, \varphi, \Delta)$, $f(h, \varphi, \Delta)$ *удовлетворяют всем указанным выше условиям, то эти уравнения при соответствующем выборе* $\Delta = \mathcal{D}^{(\infty)}$ *имеют квазипериодическое решение с частотами* $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n_0})$ *вида*

$$h_\tau = S^{(\infty)}(\omega t + \vartheta_0), \quad \varphi_\tau = \omega t + \vartheta_0 + \Phi^{(\infty)}(S^{(\infty)}(\omega t + \vartheta), \omega t + \vartheta_0, 0). \tag{79}$$

Если h_t, φ_t *— любые решения системы* (73), *начальные значения которых* h_0, φ_0 *удовлетворяют условию*

$$\|h_0\| \le \frac{\eta_1}{2}, \quad |\operatorname{Im}\varphi_0| \le \frac{\rho_1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\pi}\right),$$

то тогда h_t, φ_t *будут асимптотически приближаться к этому квазипериодическому решению.*

Если в дополнение к указанным условиям функции $F(h, \varphi, \Delta)$, $f(h, \varphi, \Delta)$ *являются аналитическими функциями параметра* ε *из области* $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, *то тогда* $\mathcal{D}^{(\infty)}$, $\Phi^{(\infty)}$ *и* $S^{(\infty)}$ *будут также аналитическими функциями* ε *в области* $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$.

Подробное доказательство этой теоремы мы не приводим; заметим только, что в процессе доказательства существенным является построение преобразования

$$\begin{gathered} \varphi = \vartheta + \Phi^{(\infty)}(h, \vartheta, 0), \\ \Delta = \mathcal{D}^{(\infty)}, \end{gathered} \tag{80}$$

с помощью которого система уравнений (73) приводится к виду

$$\begin{gathered} \frac{dh}{dt} = Hh + F(h, \vartheta, \Delta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \omega. \end{gathered} \tag{81}$$

Для системы уравнений (81), согласно обычным приемам, определяется интегральное многообразие $h = S^{(\infty)}(\omega t + \vartheta)$.

Для построения преобразования (80) используется быстро сходящийся итерационный процесс преобразования, заключающийся в том, что в системе вводится замена переменных

$$\begin{gathered} \varphi = \varphi^{(1)} + u^{(1)}(h, \varphi^{(1)}, \Delta^{(1)}), \\ \Delta = \Delta(\Delta^{(1)}), \end{gathered} \tag{82}$$

в результате которой относительно h, $\varphi^{(1)}$ получаем уравнения

$$\begin{gathered} \frac{dh}{dt} = Hh + F_1(h, \varphi^{(1)}, \Delta^{(1)}), \\ \frac{d\varphi^{(1)}}{dt} = \omega + \Delta^{(1)} + f_1(h, \varphi^{(1)}, \Delta^{(1)}). \end{gathered} \tag{83}$$

Применив к системе уравнений (83) преобразование

$$\begin{gathered} \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} + u^{(2)}(h, \varphi^{(2)}, \Delta^{(2)}), \\ \Delta^{(1)}) = \Delta^{(1)}(\Delta^{(2)}), \end{gathered} \tag{84}$$

приходим к уравнениям

$$\begin{gathered} \frac{dh}{dt} = Hh + F_2(h, \varphi^{(2)}, \Delta^{(2)}), \\ \frac{d\varphi^{(2)}}{dt} = \omega + \Delta^{(2)} + f_2(h, \varphi^{(2)}, \Delta^{(2)}). \end{gathered} \tag{85}$$

На s-м шаге описанного процесса выполняем преобразование

$$\varphi^{(s-1)} = \varphi^{(s)} + u^{(s)}(h, \varphi^{(s)}, \Delta^{(s)}),$$
$$\Delta^{(s-1)}) = \Delta^{(s-1)}(\Delta^{(s)}), \tag{86}$$

и получаем уравнения

$$\frac{dh}{dt} = Hh + F_s(h, \varphi^{(s)}, \Delta^{(s)}),$$
$$\frac{d\varphi^{(s)}}{dt} = \omega + \Delta^{(s)} + f_s(h, \varphi^{(s)}, \Delta^{(s)}). \tag{87}$$

При построении цепочки преобразований (82) – (86), ... Н. Н. Боголюбовым были проведены скрупулезные выкладки и оценки, обеспечивающие на каждом шаге аналитичность замен и в итоге ускоренную сходимость всего процесса пропорционально $\varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^8, \ldots, \varepsilon^{2^s}, \ldots$.

Приведенная фундаментальная теорема Н. Н. Боголюбова, а также теоремы, доказанные Н. Н. Боголюбовым и развивающие это направление, представляют собой большое достижение в теории динамических систем.

Результаты, полученные Н. Н. Боголюбовым в г. Каневе, легли в основу монографии „Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике" [8] и сразу же получили высокую оценку не только математиков и механиков, но и физиков-теоретиков, а также широкое применение в нашей стране и за рубежом.

1. *Poincaré H.* Les méthodes de la mécanique céleste. – Paris: Gauthier-Villars, 1 (1892), II (1893), III (1899).
2. *Боголюбов Н. Н.* Избранные труды: В 3-х т. – Киев: Наук. думка, 1969 – 1971.
3. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. – Киев: Изд-во АН УССР, 1937. – 365 с.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Изд. 4-е. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
5. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Киев: Изд-во АН УССР, 1945. – 137 с.
6. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР. – 1950. – **14**. – С. 9 – 34.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Метод интегральных многообразий в нелинейной механике. – Киев; Ин-т математики АН УССР, 1961. – 126 с.
8. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 245 с.
9. *Боголюбов Н. Н.* Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР. – 1949. – **10**. – С. 9 – 21.
10. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. – Киев: Изд-во АН УССР, 1934. – 109 с.
11. *Боголюбов Н. Н.* О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики // Тр. Первой летн. мат. школы. – Киев: Наук. думка, 1964. – **1**. – С. 1 – 101.
12. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. – 1953. – **5**. – С. 763 – 766.
13. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функций Гамильтона // Там же. – 1954. – **98**, № 4. – С. 527 – 530.
14. *Колмогоров А. Н.* Общая теория динамических систем и классическая механика // Междунар. мат. конгресс в Амстердаме. – М.: Физматгиз, 1961. – С. 187 – 208.
15. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. – М.: Наука, 1964. – 431 с.
16. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 240 с.
17. *Митропольский Ю. А.* Нелинейная механика. Асимптотические методы. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 395 с.
18. *Митропольский Ю. А.* Нелинейная механика. Одночастотные колебания. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – 384 с.
19. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
20. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории колебаний. – М.: Наука, 1987. – 301 с.
21. *Самойленко А. М.* Н. Н. Боголюбов и нелинейная механика // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, вып. 5. – С. 103 – 146.

Получено 24.05.99