УДК 517.5

М. Є. Дудкін (Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ НОРМАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ

We present a generalization of definition of singularly perturbed operators to the case of normal operators. To do this, we use an idea of normal expansions of a prenormal operator and prove the relation for resolvents of normal expansions similar to the M. Krein relation for resolvents of self-adjoint expansions. In addition, we establish one-to-one correspondence between the set of singular perturbations of rank one and the set of perturbed (of rank one) operators.

Наведено узагальнення означення сингулярно збурених операторів на випадок нормальних операторів. Для цього використано ідею нормальних розширень переднормального оператора і доведено формулу для резольвент нормальних розширень типу М. Г. Крейна для резольвент самоспряжених розширень. Крім цього встановлено взаємно однозначну відповідність між множиною сингулярних збурень рангу один і множиною сингулярно збурених (рангу один) операторів.

1. Вступ. Нехай в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ задано нормальний оператор N. Утворимо за оператором N оснащення $\mathcal{H}_- \supseteq \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supseteq \mathcal{H}_+$, тобто $\mathcal{H}_+ = \mathfrak{D}(N)$ — область визначення оператора N та $\mathcal{H}_-$ — простір, спряжений до $\mathcal{H}_+$. Аналогічно до розгляду оператора Шредінгера, збуреного потенціалом $-\Delta_{\lambda,\delta} = -\Delta + \lambda\delta$, розглянемо в просторі $\mathcal{H}$ формальний вираз

$$N_{\lambda,\omega} = N + \lambda\omega, \tag{1}$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$ і $\omega \in \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}$. Надамо оператору $N_{\lambda,\omega}$ у виразі (1) сенс нормального в $\mathcal{H}$. Оператор $N_{\lambda,\varepsilon}$ є сингулярно збуреним відносно N. Розумітимемо (1) як

$$N_{\lambda,\omega} := N + \lambda\langle\cdot,\omega\rangle\omega, \tag{2}$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначає спарення між просторами $\mathcal{H}_-$ та $\mathcal{H}_+$.

Припустимо, що резольвентна множина $\rho(N)$ оператора N непорожня, $\rho(N) \neq \varnothing$. Тоді, без втрати загальності, можна вважати, що відповідні резольвенти $N_{\lambda,\omega}^{-1}$ і N^{-1} визначені всюди в $\mathcal{H}$. Ці резольвенти можна поєднати у формулі типу М. Г. Крейна

$$N_{\lambda,\omega}^{-1} = N^{-1} - \lambda(\cdot, m)n, \tag{3}$$

де n і m — дефектні вектори формально нормального оператора $\dot{N}$, який є спільним звуженням операторів N і $N_{\lambda,\omega}$, тобто $\dot{N}^* n = 0$, $\overline{N}^* m = 0$, де $\overline{N}^* := N^* \restriction \mathfrak{D}(\dot{N})$.

Результати цієї роботи анонсовані у роботі [1] і доповідались на Кримській осінній математичній школі-симпозіумі у 1995 р. [2].

2. Попередні відомості. Нехай $\mathcal{H}$ — сепарабельний гільбертів простір із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\|\cdot\| := \sqrt{(\cdot,\cdot)}$. Розглянемо в $\mathcal{H}$ необмежений замкнений лінійний оператор N, щільно визначений на області визначення $\mathfrak{D}(N)$.

Припустимо, що резольвентна множина оператора N непорожня, $\rho(N) \neq \varnothing$. Не втрачаючи загальності, припустимо, що $0 \in \rho(N)$. Таким чином, оператор N^{-1} є обмеженим і визначеним всюди в $\mathcal{H}$.

Використовуючи оператор N, утворимо оснащення простору $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_- \supseteq \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supseteq \mathcal{H}_+, \tag{4}$$

де $\mathcal{H}_+ = \mathfrak{D}(N)$ — простір із нормою $\|\cdot\|_+ := \|N\cdot\|$ (або еквівалентною нормою $\|\cdot\|_+ := \|N\cdot\| + \|\cdot\|$, якщо це необхідно) і $\mathcal{H}_-$ — поповнення $\mathcal{H}$ за нормою $\|\cdot\|_- := \|N^{-1}\cdot\|$. Нехай $\langle \omega, \varphi \rangle_{\mathcal{H}}$ — спарення просторів $\mathcal{H}_-$ і $\mathcal{H}_+$ в (4), де $\omega \in \mathcal{H}_-$, $\varphi \in \mathcal{H}_+$.

Позначимо через $I_{x,y}$ оператор канонічного ізометричного ізоморфізму, що діє з простору $\mathcal{H}_x$ у простір $\mathcal{H}_y$, де індекси x, y позначають $+$, або $-$, або 0.

Скалярні добутки $(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)_+ = \|\cdot\|_+^2$, $(\cdot,\cdot)_- = \|\cdot\|_-^2$ та спарення $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ мають такі властивості [3–5]:

$$\begin{aligned}
(I_{+,-}\omega, \varphi)_+ &= (\omega, I_{-,+}\varphi)_-, && \omega \in \mathcal{H}_-, && \varphi \in \mathcal{H}_+,\\
(I_{0,-}\omega, f) &= (\omega, I_{-,0}f)_-, && \omega \in \mathcal{H}_-, && f \in \mathcal{H},\\
(f, I_{0,+}\varphi) &= (I_{+,0}f, \varphi)_+, && f \in \mathcal{H}, && \varphi \in \mathcal{H}_+,\\
\langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{H}} &= (f, \varphi), && f \in \mathcal{H}, && \varphi \in \mathcal{H}_+,\\
I_{x,y} &= I_{y,x}^{-1}, && x, y \in \{+, -, 0\},\\
I_{+,-} &= I_{+,0} I_{0,-},\\
I_{0,-} \upharpoonright \mathcal{H} &= I_{+,0},
\end{aligned} \tag{5}$$

де через $\upharpoonright$ позначено звуження відповідного оператора на відповідну множину. (В даному випадку звуження оператора $I_{0,-}$ на простір $\mathcal{H}$.) Зауважимо, що $I_{0,+} = \sqrt{N^* N}$.

З допомогою векторів $\omega \in \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}$ або підмножин типу $F \in \mathcal{H}_-$ таких, що $\overline{F}^{(-)} \subset \mathcal{H}_- \cap \mathcal{H} = \{0\}$, можна визначити щільні в $\mathcal{H}$ підмножини. (Тут рискою із знаком $(-)$ над літерою позначено замикання множини у просторі з відповідною нормою $(\mathcal{H}_-)$). Для цього використовується конструкція, детально описана у роботах [6–9].

Теорема 1 [6]. *Кожна підмножина $F \in \mathcal{H}_-$ з (4) породжує множину*

$$\mathfrak{D}_F := \{f \in \mathcal{H}_+ \mid \langle \omega, f \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall \omega \in F\},$$

яка є замкненим підпростором в $\mathcal{H}_+$. Множина $\mathfrak{D}_F$ є щільною в $\mathcal{H}$ тоді й тільки тоді, коли $\overline{F} \in \mathcal{H}_- \cap \mathcal{H} = \{0\}$.

Покладемо $\mathfrak{N}_+ := I_{+,-}F$, $\mathcal{H}_+ = \mathfrak{N}_+ \oplus \mathfrak{D}_+$, де $\mathfrak{D}_+ \equiv \mathfrak{D}_F$; $\mathcal{H} = \mathfrak{N}_0 \oplus \mathfrak{D}_0$, де $\mathfrak{N}_0 := I_{0,+}\mathfrak{N}_+$ і $\mathfrak{D}_0 := I_{0,+}\mathfrak{D}_+$.

Теорема 2 [9]. *Замкнена в $\mathcal{H}_+$ підмножина $\mathfrak{D}_+$ є щільною в $\mathcal{H}$ тоді й тільки тоді, коли множина $\mathfrak{N}_0$ має в перетині з $\mathcal{H}_+$ лише нуль, тобто*

$$\overline{\mathfrak{D}_+} = \mathcal{H} \Leftrightarrow \mathfrak{N}_0 \cap \mathcal{H}_+ = \{0\}.$$

Незважаючи на те, що шкала $\mathcal{H}$ побудована не за самоспряженим, а за нормальним оператором, доведення теорем 1 і 2 повністю повторюють доведення аналогічних теорем із [6] і [9] відповідно.

Далі доведемо теорему, що встановлює зв'язок між множинами $\mathfrak{N} \subset \mathcal{H}$ такими, що $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}(N^*) = \{0\}$, та звуженнями $\dot{N}$ оператора N. Ми розглядаємо звуження, що мають ненульові індекси дефекту: $\dim(\mathcal{H} \ominus \mathfrak{M}) \neq \varnothing$, де $\mathfrak{M} := N\,\mathfrak{D}(\dot{N})$.

Теорема 3. *Нехай N — необмежений лінійний оператор, щільно визначений на області $\mathfrak{D}(N)$ в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Припустимо, що резольвентна множина $\rho(N)$ оператора N непорожня. Тоді для довільного підпростору $\mathfrak{N} \subset \mathcal{H}$ такого, що $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}(N^*) = \{0\}$, та для будь-якого $z \in \rho(N)$ існує звуження $\dot{N}$ оператора N таке, що підпростір $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}_z$ є дефектним підпростором цього звуженого оператора, тобто $(\dot{N} - z)^* \mathfrak{N}_z = 0$.*

Доведення. Перш за все покажемо, що для будь-якого $z \in \rho(N)$ множина $\mathfrak{D} := (N - z)^{-1}\mathfrak{M}$ є щільною в $\mathcal{H}$, де $\mathfrak{M} := \mathcal{H} \ominus \mathfrak{N}$.

Припустимо протилежне, тобто існує ненульовий вектор $\varphi \in \mathcal{H}$ такий, що

$$0 = (\mathfrak{D}, \varphi) = ((N - z)^{-1}\mathfrak{M}, \varphi) = (\mathfrak{M}, (N^* - \bar{z})^{-1}\varphi).$$

За означенням маємо $\mathfrak{N} \perp \mathfrak{M}$, тоді $(N^* - \bar{z})^{-1}\varphi \in \mathfrak{N}$. З іншого боку, $(N^* - \bar{z})^{-1}\varphi \in \mathfrak{D}(N^*)$. За умовою теореми маємо $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{D}(N^*) = \{0\}$. Таким чином, множина $\mathfrak{D} := (N - z)^{-1}\mathfrak{M}$ є щільною в $\mathcal{H}$.

Використовуючи доведену частину теореми, введемо позначення: $\dot{N} := N \restriction \mathfrak{D}$, $\mathfrak{M}_z := \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_z := \mathfrak{N}$.

Покажемо, що $(\dot{N} - z)^* \mathfrak{N}_z = 0$. Дійсно, використовуючи ортогональність $\mathfrak{N}$ до $\mathfrak{M}$, отримуємо

$$0 = (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = ((N - z)\mathfrak{D}, \mathfrak{N}) = ((\dot{N} - z)\mathfrak{D}, \mathfrak{N}) = (\mathfrak{D}, (\dot{N} - z)^*\mathfrak{N}).$$

Оскільки $\overline{\mathfrak{D}} = \mathcal{H}$, то $(\dot{N} - z)^* \mathfrak{N}_z = 0$.

У випадку самоспряженого оператора теорема 3 доведена у роботі [10].

Вектори з множини $\mathcal{H} \setminus \mathfrak{D}$, коли $\mathfrak{D}$ є щільною в $\mathcal{H}$, задовольняють таку властивість.

Лема 1. *Нехай $\mathfrak{D}$ — лінійна і щільна в $\mathcal{H}$ підмножина. Якщо для двох лінійно незалежних векторів $n, m \in \mathcal{H}$ існують числа $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ такі, що*

$$a/b \neq c/d \quad і \quad an + bm \in \mathfrak{D}, \quad cn + dm \in \mathfrak{D}, \tag{6}$$

то $n, m \in \mathfrak{D}$.

Доведення. У тривіальному випадку, коли $n, m \in \mathfrak{D}$, лема очевидна. Якщо, наприклад, $n \in \mathfrak{D}$, а $m \notin \mathfrak{D}$, то такий випадок неможливий, оскільки множина $\mathfrak{D}$ є лінійною.

Змістовним є третій випадок, коли $n, m \in \mathcal{H} \setminus \mathfrak{D}$. Припустимо протилежне, тобто $n, m \in \mathcal{H} \setminus \mathfrak{D}$ і існують числа $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ такі, що задовольняють умову (6). Тоді з умови (6) випливає $\frac{a}{b}dn + dm \in \mathfrak{D}$, тому що $\mathfrak{D}$ є лінійною, і $(\frac{a}{b}d - c)n \in \mathfrak{D}$, якщо $\frac{a}{b}d - c \neq 0$. Аналогічно $m \in \mathfrak{D}$. Отримана суперечність завершує доведення.

3. Нормальні оператори. Опишемо деякі властивості збуреного нормального оператора.

Теорема 4. *Нехай N — необмежений щільно визначений нормальний оператор в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ такий, що N^{-1} існує і визначений всюди в $\mathcal{H}$. Виберемо довільне число $0 \neq \theta \in \mathbb{C}$ та лінійно неза-*

лежні вектори $n, m \in \mathcal{H}$. *Оператор* $\tilde{N}$, *що визначений як*

$$\tilde{N}^{-1} := N^{-1} + \theta(\cdot, m)\, n, \tag{7}$$

є нормальним тоді й тільки тоді, коли існують числа $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *такі, що*

$$\begin{aligned} N^{-1} m &= \alpha m + \beta n, \\ (N^{-1})^* n &= \overline{\beta} m + \overline{\alpha} n \end{aligned} \tag{8}$$

і

$$\frac{\beta}{\theta} + \frac{\overline{\beta}}{\overline{\theta}} + 1 = 0. \tag{9}$$

Доведення. Припустимо, що оператор $\tilde{N}$ визначений в (7), є нормальним. Спряжений оператор має вигляд

$$(\tilde{N}^{-1})^* := (N^{-1})^* + \overline{\theta}(\cdot, n)\, m. \tag{10}$$

Запишемо комутатор операторів $(\tilde{N})^*$ і $\tilde{N}$:

$$\begin{aligned} [\tilde{N}^{-1}, (\tilde{N}^{-1})^*] f &= [N^{-1}, (N^{-1})^*] f + \overline{\theta}(f, n) N^{-1} m + \\ &+ \theta((N^{-1})^* f, n) n + \theta\overline{\theta}(f, n)(m, m) n - \\ &- \theta(f, m)(N^{-1})^* n + \overline{\theta}(N^{-1} f, n) m + \overline{\theta}\theta(f, m)(n, n) m. \end{aligned} \tag{11}$$

Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $\| n \| = \| m \| = 1$. Для того щоб оператор $\tilde{N}$ був нормальним, необхідно, щоб

$$\begin{aligned} &\overline{\theta}(f, n) N^{-1} m + \theta((N^{-1})^* f, n) n + \theta\overline{\theta}(f, n) n - \\ &- \theta(f, m)(N^{-1})^* n + \overline{\theta}(N^{-1} f, n) m + \overline{\theta}\theta(f, m)\, m = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

де $[N^{-1}, (N^{-1})^*] f = 0$ при $f \in \mathcal{H}$. Розглянемо загальний випадок

$$\begin{aligned} N^{-1} m &= \alpha m + \beta n + g, \\ (N^{-1})^* n &= \alpha' m + \beta' n + q, \end{aligned} \tag{13}$$

де $g \perp n$, $g \perp m$, $q \perp n$, $q \perp m$. Підставляючи (13) в (12), отримуємо

$$\begin{aligned} &\overline{\theta}\alpha(f, n) m + \overline{\theta}\beta(f, n) n + \overline{\theta}(f, n) g + \theta\overline{\alpha}(f, m) n + \theta\overline{\beta}(f, n) n + \\ &+ \theta(f, g) n + \theta\overline{\theta}(f, n) n - \theta\alpha'(f, m) m - \theta\beta'(f, m) n - \theta(f, m) q - \\ &- \overline{\theta}\,\overline{\alpha}'(f, m) n - \overline{\theta}\,\overline{\beta}'(f, n) m - \overline{\theta}(f, g) m - \theta\overline{\theta}(f, m) m = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Вираз (14) виконується для довільного $f \in \mathcal{H}$, зокрема і для $f_0 \in \mathcal{H}$ такого, що $f_0 \perp n$, $f_0 \perp m$ та $f_0 \not\perp g$ і $f_0 \not\perp q$. Таким чином,

$$\theta(f, g) n - \overline{\theta}(f, q) m = 0.$$

Отже, для $f \perp g$ і $f \not\perp q$ маємо $q = 0$. Аналогічно отримуємо $g = 0$. Якщо $g = \mu q$ для деякого $\mu \in \mathbb{C}$, то $(f, g)(\theta n - \overline{\theta}\mu m) = 0$, і ми отримуємо $g = 0$, оскільки вектори n і m є лінійно незалежними. Таким чином, вираз (14) набирає вигляду

$$\overline{\theta}\alpha(f,n)m+\overline{\theta}\beta(f,n)n+\theta\overline{\alpha}(f,m)n+\theta\overline{\beta}(f,n)n+\theta\overline{\theta}(f,n)n-\theta\alpha'(f,m)m-$$
$$-\theta\beta'(f,m)n-\overline{\theta}\,\overline{\alpha}'(f,m)m-\overline{\theta}\,\overline{\beta}'(f,n)m-\theta\overline{\theta}(f,m)m=0. \quad (15)$$

Зберемо коефіцієнти при n і m і прирівняємо їх до нуля:

$$\overline{\theta}\beta(f,n)+\theta\overline{\alpha}(f,m)+\theta\overline{\beta}(f,n)+\theta\overline{\theta}(f,n)-\theta\beta'(f,m)=0, \quad (16)$$

$$\overline{\theta}\alpha(f,n)-\theta\alpha'(f,m)-\overline{\theta}\,\overline{\alpha}'(f,m)-\overline{\theta}\,\overline{\beta}'(f,n)-\theta\overline{\theta}(f,m)=0. \quad (17)$$

Вирази (16) і (17) виконуються для довільних $f\in\mathcal{H}$, зокрема і для $f_0\in\mathcal{H}$ такого, що $f_0\perp n$ і $f_0\not\perp m$. Таким чином,

$$\overline{\theta}\alpha-\theta\beta'=0,\quad \theta\overline{\alpha}'-\overline{\theta}\alpha'+\theta\overline{\theta}=0$$

і, аналогічно, для $f_0\in\mathcal{H}$ такого, що $f_0\perp m$ і $f_0\not\perp n$, маємо

$$\overline{\theta}\alpha-\theta\beta'=0,\quad \overline{\theta}\alpha-\theta\overline{\beta}+\theta\overline{\theta}=0.$$

З останніх чотирьох рівностей отримуємо

$$\overline{\alpha}=\beta',\quad \theta\overline{\alpha}'-\overline{\theta}\alpha'+\theta\overline{\theta}=0,\quad \overline{\theta}\alpha-\theta\overline{\beta}+\theta\overline{\theta}=0, \quad (18)$$

звідки після елементарних перетворень двох останніх виразів маємо $\alpha'=\overline{\beta}$. Покладаючи $\overline{\alpha}=\beta$, одержуємо вираз (8).

Таким чином, отримано одну з необхідних і достатніх умов теореми, за якими оператор $\tilde{N}$, визначений формулою (9), є нормальним:

$$\begin{aligned} N^{-1}m &= \alpha m+\beta n,\\ (N^{-1})^{*}n &= \alpha' m+\beta' n. \end{aligned} \quad (19)$$

Враховуючи вираз $\alpha'=\overline{\beta}$, отримуємо вираз (8) з (19) і вираз (9) з (18).

Розглянемо теорему 4 у випадку $n=m$.

Теорема 5. *Нехай N — необмежений щільно визначений нормальний оператор в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ такий, що N^{-1} існує і визначений всюди в $\mathcal{H}$. Виберемо довільне число $\theta\in\mathbb{C}$ та вектор $n\in\mathcal{H}\setminus\mathfrak{D}(N)$. Оператор*

$$\tilde{N}^{-1}:=N^{-1}+\theta(\cdot,n)n \quad (20)$$

є нормальним тоді й тільки тоді, коли $\theta\in\mathbb{R}$ та $N^{-1}n=(N^{-1})^{*}n$.

Доведення. Припустимо, що оператор $\tilde{N}$, визначений в (20), є нормальним. Спряжений оператор має вигляд

$$(\tilde{N}^{-1})^{*}:=(N^{-1})^{*}+\overline{\theta}(\cdot,n)n. \quad (21)$$

Комутатор операторів $(\tilde{N})^{*}$ і $\tilde{N}$ такий:

$$[\tilde{N}^{-1},(\tilde{N}^{-1})^{*}]f=[N^{-1},(N^{-1})^{*}]f+(f,n)(\overline{\theta}N^{-1}-(N^{-1})^{*})n+$$
$$+(f,(\overline{\theta}N^{-1}-(N^{-1})^{*})^{n})n. \quad (22)$$

Позначимо $T:=(\overline{\theta}N^{-1}-\theta(N^{-1})^{*})n$. Для того щоб комутатор (21) був рівним нулю, потрібно, щоб виконувалась рівність

$$(f,n)Tn+(f,Tn)n=0. \quad (23)$$

Розглянемо загальний випадок:

$$Tn = \alpha n + g, \tag{24}$$

де $g \perp n$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Підставляючи (24) в (23), маємо

$$\alpha(f, n)n + (f, n)g + \overline{\alpha}(f, n)n + (f, g)n = 0.$$

Останній вираз виконується для довільного вектора $f \in \mathcal{H}$, зокрема і для $f_0 \in \in \mathcal{H}$ такого, що $f_0 \perp n$, але $f_0 \not\perp g$. Таким чином, $\theta(f, g)n = 0$ і $\alpha + \overline{\alpha} = 0$.

З виразу (24) отримуємо

$$\overline{\theta} N^{-1} n - \theta (N^{-1})^* n = \alpha n. \tag{25}$$

Останній вираз є необхідною і достатньою умовою нормальності оператора N, але ця умова ніколи не виконується, якщо $\alpha \neq 0$. Ліва частина виразу належить до $\mathfrak{D}(N)$, тому що $\overline{\theta} N^{-1} n \in \mathfrak{D}(N)$ і $\theta (N^{-1})^* \in \mathfrak{D}(N^*) = \mathfrak{D}(N)$, а множина $\mathfrak{D}(N)$ є лінійною. Права частина умови (24) не належить до $\mathfrak{D}(N)$. Таким чином, $\theta \in \mathbb{R}$ і $N^{-1} n = (N^{-1})^* n$.

Проаналізуємо умову (9). Опишемо множину $\Omega \subset \mathbb{C}$, що містить числа θ, які задовольняють (9) для деякого фіксованого β.

Твердження 1. *Числа* θ *в* (9) *утворюють коло* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *із центром в* $-\beta \in \mathbb{C}$ *та радіусом* $|\beta|$.

Доведення. Покладемо $\beta = a + ib$ і $\theta = x + iy$. Тоді вираз (9) має вигляд

$$(x - iy)(a + ib) + (x + iy)(a - ib) + (x - iy)(x + iy) = 0,$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2yb = 0,$$

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2,$$

$$\Omega := \{\theta \in \mathbb{C} \mid \theta = x + iy, \ (x + a)^2 + (y + b)^2 = r^2 = a^2 + b^2 = |\beta|^2\}.$$

4. Переднормальні звуження нормального оператора. Припустимо, що оператор N нормальний, тобто $[N, N^*] = 0$. Розглянемо звуження $\dot{N} := := N \upharpoonright \mathfrak{D}(\dot{N})$, де $\mathfrak{D}(\dot{N}) := N^{-1}\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} := \mathcal{H} \ominus \mathfrak{N}$, відповідно до підмножини $\mathfrak{N} \subset \mathcal{H}$ такої, що $\mathfrak{N} \cap \mathcal{H} = \{0\}$. Позначимо $\overline{N} := \dot{N}^* \upharpoonright \mathfrak{D}(\dot{N})$. Оператори $\dot{N}$ і $\overline{N}$ є формально нормальними або, інакше кажучи, переднормальними, оскільки $\mathfrak{D}(N) \subset \mathfrak{D}(N^*)$ та $\|Nf\| = \|N^* f\|$ $\forall f \in \mathfrak{D}(N)$. Таким чином, ми утворили ланцюги операторів [11]:

$$\begin{gathered} \dot{N} \subset N \subset \dot{N}^*, \\ \overline{N} \subset N^* \subset \overline{N}^*. \end{gathered} \tag{26}$$

Зауважимо, що оператор N є нормальним тоді й тільки тоді, коли $\mathfrak{D}(N) = = \mathfrak{D}(N^*)$.

Позначимо $\mathfrak{N}_{\overline{z}} := (N - z)^* (N - z)^{-1} \mathfrak{N}_z$.

Твердження 2. *Нехай умови теореми* 3 *виконуються. Тоді підпростір* $\mathfrak{N}_{\overline{z}} : = := (N - z)^* (N - z)^{-1} \mathfrak{N}_z$ *є другим дефектним підпростором оператора* N, *тобто* $(\overline{N} - \overline{z})^* \mathfrak{N}_{\overline{z}} = 0$.

Доведення. Позначимо через $U := (N-z)^*(N-z)^{-1}$ перетворення Келі. Покажемо, що $\mathfrak{N}_{\bar{z}} = U\mathfrak{N}_z$ для будь-якої $\mathfrak{N}_z = \mathfrak{N}$ такої, що $\mathfrak{N} \cap \mathcal{H} = \{0\}$. Очевидно, що

$$\forall n \in \mathfrak{N}_z \quad n \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_+ \Leftrightarrow N^{-1} n \in \mathcal{H}_+ \setminus \mathcal{H}_{++},$$

де $\mathcal{H}_{++} := \mathfrak{D}(N^2)$.

Аналогічно

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}(N) \quad N^* \varphi \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_+ \Leftrightarrow \varphi \in \mathcal{H}_+ \setminus \mathcal{H}_{++},$$

де $\mathcal{H}_{++} := \mathfrak{D}((N^*)^2)$. Таким чином, $\mathfrak{N}_{\bar{z}} \subset \mathcal{H} \setminus \mathfrak{D}(N)$. Тепер покажемо, що $(\overline{N} - \bar{z})^* \mathfrak{N}_{\bar{z}} = 0$. З (26) випливає

$$(\dot{N} - z) \subset (N-z), \qquad (\overline{N} - \bar{z}) \subset (N-z)^*,$$

$$(\dot{N} - z)^* \subset (N-z)^*, \qquad (\overline{N} - \bar{z})^* \subset (N-z).$$

Використовуючи останні включення, отримуємо

$$(\overline{N} - \bar{z})^* (N-z)^* (N-z)^{-1} \mathfrak{N}_z = 0.$$

Це дійсно так, оскільки кожний наступний вираз еквівалентний попередньому:

$$(N-z)^* (\overline{N} - \bar{z})^* (N-z)^{-1} \mathfrak{N}_z = 0,$$

$$(\dot{N} - z)^* (\overline{N} - \bar{z})^* (N-z)^{-1} \mathfrak{N}_z = 0,$$

$$(\dot{N} - z)^* (N-z)(N-z)^{-1} \mathfrak{N}_z = 0,$$

$$(\dot{N} - z)^* \mathfrak{N}_z = 0.$$

Твердження 2 було доведене в [12] для випадку самоспряженого оператора. Якщо в цьому твердженні $z = 0$, то позначимо $\mathfrak{N} := \mathfrak{N}_z$ і $\overline{\mathfrak{N}} := N^* N^{-1} \mathfrak{N}$.

Твердження 3. *Нехай умови теореми* 3 *виконуються. Припустимо додатково, що* $n \in \mathcal{H} \setminus \mathfrak{D}(N)$. *Тоді*

$$N^{-1} m = (N^{-1})^* n \tag{27}$$

та $\alpha = \overline{\beta}$.

Доведення. Зауважимо, що згідно з (7), $n \notin \mathfrak{D}(N)$ тоді й тільки тоді, коли $m \notin \mathfrak{D}(N)$.

Для доведення припустимо протилежне: $N^{-1} m \neq (N^{-1})^* n$. Тоді за лемою 1 $n, m \in \mathfrak{D}(N)$. Підставляючи (27) в (8) та враховуючи те, що $\alpha' = \beta$, отримуємо $\alpha = \overline{\beta}$.

5. Сингулярно збурені нормальні оператори. Використовуючи результати попередніх пунктів, сформулюємо основні факти щодо сингулярно збурених нормальних операторів.

Означення 1. *Нормальний оператор* $\tilde{N} \neq N$ *в* $\mathcal{H}$ *називається сингулярно збуреним відносно* N, *якщо лінійна множина*

$$\mathfrak{D} := \{ f \in \mathfrak{D}(N) \cap \mathfrak{D}(\tilde{N}) \mid Nf = \tilde{N} f \}$$

є щільною в $\mathcal{H}$.

Очевидно, що оператор $N_{\lambda,\omega}$, визначений в (2) або (3), є сингулярно збуреним відносно N.

Розглянемо лінійний симетричний оператор T, що діє з $\mathcal{H}_+$ в $\mathcal{H}_-$ і задовольняє умову

$$\langle T\varphi, \psi\rangle = \overline{\langle \varphi, T\psi\rangle}, \quad \varphi, \psi \in \mathfrak{D}(T) = \mathcal{H}_+.$$

Означення 2. *Оператор* $T : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$ *називається симетричним сингулярним збуренням* N, *якщо множина*

$$\ker(T) := \{ f \in \mathfrak{D}(T) \mid Tf = 0 \}$$

є щільною в $\mathcal{H}$.

Нехай T — одновимірний проектор на вектор ω, тобто $T = T_{\lambda,\omega} = \lambda\langle\varphi, \omega\rangle\omega$, $\omega \in \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Однією з проблем пункту є надання сенсу нормального оператора в $\mathcal{H}$ формальному виразу $N + T_{\lambda,\omega}$. Використовуючи теореми з попередніх пунктів, можна стверджувати, що деякий вектор $\omega \in \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}$ породжує щільно визначене звуження оператора N:

$$\dot{N} := N \restriction \mathfrak{D}, \qquad \mathfrak{D}(\dot{N}) := \mathfrak{D} = \ker T.$$

Очевидно, що дефектний підпростір $\mathfrak{N} = \ker \dot{N}^*$ збігається з підпростором, утвореним вектором $n = N^{-1}\omega$ а $\overline{\mathfrak{N}} = \ker \overline{N}^*$ — відповідно з підпростором, утвореним вектором $m = (N^{-1})^*\omega$, де оператори N^{-1} і $(N^{-1})^*$ слід розуміти як продовжені за неперервністю в $\mathcal{H}_-$ та діючі з $\mathcal{H}_-$ в $\mathcal{H}$. Зауважимо, що у випадку $z = 0$ цілком можливо $\mathfrak{N} \neq \overline{\mathfrak{N}}$.

Більше того, кожне нормальне розширення оператора $\dot{N}$ параметризується числом $\lambda \in \mathbb{C}$. Тому розширення позначимо через $N_{\lambda,\omega}$. Оператори типу $N_{\lambda,\omega}$ є сингулярно збуреними відносно N рангу один. В дійсності цей оператор відповідає однозначно сингулярному збуренню $T_{\lambda,\omega}$ (також рангу один) або, інакше кажучи, парі числа і вектора λ, ω.

Теорема 6. *Між множиною сингулярних збурень рангу один* $T_{\lambda,\omega}$, $\lambda \neq 0$, $\omega \in \mathcal{H}_- \setminus \mathcal{H}$, $\|\omega\| = 1$, *та множиною сингулярно збурених операторів* $\tilde{N} = \tilde{N}_{\lambda,\omega}$ *існує взаємно однозначна відповідність. А саме, оператор* $\tilde{N}_{\lambda,\omega}$ *визначається заданими* λ, ω:

$$\tilde{N}_{\lambda,\omega}^{-1} := N^{-1} + \lambda(\cdot, (N^{-1})^*\omega) N^{-1}\omega.$$

Навпаки, кожна пара N, $\tilde{N}$ *визначає* $T_{\lambda,\omega}$:

$$T_{\lambda,\omega} := \lambda\langle\cdot, N^* n\rangle N m, \qquad \lambda := ((\tilde{N}^{-1} - N^{-1})n, m),$$

де n *і* m *— дефектні вектори оператора* $\dot{N}$, *спільного для* N *і* $\tilde{N}$, *тобто*

$$\dot{N}^* n = 0, \qquad \overline{N}^* m = 0.$$

Зокрема, $m = N^* N^{-1} n$ *і* $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C} : N^{-1} m = \alpha m + \beta n$.

6. Приклад. Нехай A і $\tilde{A}$ — два різних самоспряжених розширення симетричного оператора $\dot{A}$ з індексами дефекту $(1, 1)$. Це означає, що для $z \in \rho(A)$ та дефектних векторів n_z і $n_{\bar{z}}$ справедлива формула М. Г. Крейна:

$$(\tilde{A} - z)^{-1} = (A - z)^{-1} + \theta_z(\cdot, n_{\bar{z}}) n_z,$$

де $(\tilde{A}-z)^{-1}$ і $(A-z)^{-1}$ — резольвенти відповідних операторів і θ_z — деяке число. Очевидно, що:

1) оператори $(\tilde{A}-z)$ і $(A-z)$ є нормальними;
2) вектори n_z і $n_{\bar{z}}$ задовольняють умову (див. (8))

$$n_z = n_{\bar{z}} + (z-\bar{z})(A-z)^{-1} n_{\bar{z}} = (A-z)^*(A-z)^{-1} n_{\bar{z}};$$

3) числа θ_z і $\theta_{\bar{z}}$ задовольняють умову (див. (9))

$$\frac{1}{\theta_z} - \frac{1}{\theta_{\bar{z}}} - (z-\bar{z})(n_{\bar{z}}, n_z) = 0.$$

В даному прикладі $\alpha = \dfrac{1}{\bar{z}-z}$, $\beta = \dfrac{1}{z-\bar{z}}$ і

$$\frac{\frac{1}{\bar{z}-z}}{\theta_z} + \frac{\frac{1}{z-\bar{z}}}{\theta_{\bar{z}}} + 1 = 0,$$

тому що $(n_{\bar{z}}, n_z) = 1$.

1. *Дудкин Н. Е., Кошманенко В. Д.* Коммутативные свойства сингулярно возмущенных операторов // Теорет. и мат. физика. – 1995. – **102**, № 2. – С. 183–197.
2. *Dudkin N. E.* Singularly perturbed normal operators // Spectral and Evolutional Problems: Sum. Lectures and Papers Crim. Full Math. School-Symp. (CFMS-III). – Sevastopol, 1995. – **3**. – P. 1.
3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 450 с. (English transl.: Providence: Amer. Math. Soc., 1968. – 450 p.)
4. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с.
5. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
6. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 178 с.
7. *Koshmanenko V. D.* Singular operators and forms in the scale of Hilbert spaces // Meth. Funct. Anal. in Probl. Math. Phys. – Kiev: Inst. Math. NAC Ukraine, 1992. – P. 73–87.
8. *Koshmanenko V. D.* Perturbations of self-adjoint operators by singular bilinear forms // Ukr. Math. J. – 1989. – **41**, № 1. – P. 3–19.
9. *Koshmanenko V. D.* Dense subspace in A-scale of Hilbert spaces. – Wrozlaw, 1993. – 22 p. – (Preprint / Univ. Wrozlaw; № 835).
10. *Дудкін М. Е.* Комутативні властивості сингулярно збурених операторів: Дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 1995. – 123 с.
11. *Coddington Earl A.* Normal extension of formally normal operators // Pacif. J. Math. – 1960. – **10**. – P. 1203–1209.
12. *Дудкін М. Є.* Ермітові інваріантні звуження самоспряжених операторів. – Київ, 1994. – 20 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 94.31).

Одержано 29.05.97