УДК 519.2

**А. Ю. Заиграев** (Ин-т математики НАН Украины, Киев; Ун-т Н. Коперника, Торунь, Польша)

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ УСЛОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ С УЧЕТОМ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

Possible limiting laws are studied for multivariate conditional distribution of a subset of components of the sum of independent equally distributed random vectors under the condition that other components belong to the domain of large deviations. It is assumed that the considered deviation is absolutely continuous and belongs to the domain of attraction of the normal law but possesses "heavy tails". The approach suggested is based on the local theorem for large deviations.

Вивчаються можливі граничні закони для багатовимірного умовного розкладу підмножини компонент суми незалежних однаково розподілених випадкових векторів за умови, що інші компоненти знаходяться в області великих відхилень. Припускається, що згаданий розклад є абсолютно неперервним і належить області притягання нормального закону, але має „важкі хвости". Запропонований підхід грунтується на локальній теоремі для великих відхилень.

**Введение.** Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы (н. о. р. с. в.) со значениями в $R^d$. Предположим, что $E\xi = 0$, $E|\xi|^2 < \infty$, и обозначим через $B$ ковариационную матрицу $\xi$. Образуем суммы $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ . Пусть $A \subset R^d$ — множество непрерывности лебеговой меры. Из центральной предельной теоремы [1, с. 78] следует, что при $n \to \infty$

$$P\left(n^{-1/2} S_n \in A\right) \longrightarrow \int\limits_A \varphi_B(u)\, du, \tag{1}$$

где $\varphi_B$ — плотность многомерного нормального распределения с нулевым средним и ковариационной матрицей $B$.

Пусть $A$ зависит от $n$ и $r_n = n^{-1/2} \inf\limits_{x \in A} |x| \to \infty$, $n \to \infty$. В этом случае вероятность $P(S_n \in A)$ называется вероятностью большого уклонения суммы $S_n$, а величина $r_n$ — порядком большого уклонения. Аналогично, значение $x = x_n$, принимаемое суммой $S_n$, называем большим уклонением, если $n^{-1/2}|x| \to \infty$. Из (1) следует, что вероятность большого уклонения стремится к нулю.

В одномерном случае асимптотика вероятности большого уклонения изучена достаточно подробно. Среди работ, внесших существенный вклад в развитие той части теории, которая связана с установлением так называемой точной асимптотики $P(S_n \in A)$, следует выделить работы [2 – 8].

В многомерном случае задача более сложна и допускает много различных постановок, что обусловлено как разнообразием типов множеств $A$, которые имеет смысл рассматривать (в одномерном случае — это только интервалы, конечные или бесконечные), так и различием возможного поведения „хвостов" распределения. В этой ситуации, по мнению автора, единственно реальным подходом к исследованию предельных законов с учетом больших уклонений является подход, основанный на доказательстве локальной предельной теоремы.

Данная работа посвящена изучению возможных предельных законов для распределения подмножества компонент суммы н. о. р. с. в. при условии, что остальные компоненты находятся в области больших уклонений. Мы ограничимся случаем, когда исходное распределение абсолютно непрерывно и принадлежит области притяжения нормального закона, но имеет „хвосты" более „тяжелые", чем это допускается так называемым условием Крамера. Кроме того, будем считать, что $r_n \geq \ln n$. Тогда, как и в одномерном случае (см., например,

[8]), большое уклонение суммы образуется за счет одного аномально большого слагаемого, в то время как вклад остальных слагаемых пренебрежимо мал.

В п. 2 вводится класс правильно меняющихся плотностей, являющийся предметом нашего исследования, и приводится локальная предельная теорема для больших уклонений.

В п. 3 рассматривается следующая задача. Пусть $f\colon R^d \to R^k$ — нелинейная функция такая, что $Ef(\xi)=0$, $E|f(\xi)|^2<\infty$. Предметом исследования является асимптотика распределения суммы $T_n=f(\xi_1)+\ldots+f(\xi_n)$ при условии, что сумма $S_n$ имеет большое уклонение. Частным примером такого рода задачи является задача изучения предельного распределения эмпирического коэффициента асимметрии при большом уклонении эмпирического коэффициента эксцесса, исследованная в одномерном случае (см. [9]). Первое достаточно общее исследование таких задач было проведено в [10].

В приложениях часто возникает необходимость знать предельное поведение проекции суммы н. о. р. с. в. на некоторое подпространство при условии, что ее проекция на другое подпространство лежит в области больших уклонений. Задача такого типа для ситуации, когда указанные подпространства определяются фиксированной системой линейно независимых векторов, рассматривается в последнем пункте. Более точно, изучается асимптотика распределения вектора $(\langle S_n, v_1\rangle, \ldots, \langle S_n, v_s\rangle)$ при условии, что вектор $(\langle S_n, u_1\rangle, \ldots, \langle S_n, u_k\rangle)$ лежит в области больших уклонений, если $\{u_i, v_j\}_{i=1}^{k}{}_{j=1}^{s}$ — линейно независимые векторы в пространстве $R^d$, $k+s\le d$. Полученный результат по сути обобщает следствие 3 из работы [11], приведенное без доказательства.

**2. Правильно меняющиеся плотности и локальная предельная теорема для больших уклонений.** Введем следующий класс абсолютно непрерывных распределений с „тяжелыми хвостами". Пусть неотрицательные функции $r$ и $h$ определены соответственно на $[0,\infty)$ и единичной сфере $R^{d-1}$.

**Определение.** *Будем говорить, что функция $p\in\mathcal{P}=\mathcal{P}_{\gamma h}$, если она равномерно ограничена в $R^d$ и представима в виде*

$$p(x) = r(|x|)\left(h(e_x)+w(|x|)\right), \quad e_x = |x|^{-1}x, \quad x\in R^d,$$

*где $r(t)$ правильно меняется при $t\to\infty$ с показателем $-\gamma$, $\gamma>d$, $h\not\equiv 0$ — непрерывная функция, а $w(t)\to 0$ при $t\to\infty$.*

Далее будем расматривать распределения с плотностью $p\in\mathcal{P}$. Как несложно заметить, в этом случае события $(|\xi|\ge t)$ и $(e_\xi\in A)$ асимптотически независимы при $t\to\infty$.

Простейшим примером плотности распределения из класса $\mathcal{P}$ является

$$p(x) = \begin{cases} C\left(|x_1|^\alpha+\ldots+|x_d|^\alpha\right)^{-\beta}, & |x|\ge x_0; \\ 0 \text{ — в противном случае.} \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $r(t)=t^{-\gamma}$, $\gamma=\alpha\beta$, $h(e)=C\left(|x_1|^\alpha+\ldots+|x_d|^\alpha\right)^{-\beta}$, а $w(t)=0$ при $t\ge x_0$.

Следующая теорема, доказанная в [11], является основополагающей при изучении асимптотики условных распределений.

Пусть $p_n$ обозначает плотность для $S_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$, а $E$ — носитель функции $h$.

**Теорема 1.** *Если $p\in\mathcal{P}$, $\gamma>d+2$, то для любого фиксированного $\varepsilon>0$ при $n\to\infty$*

$$p_n(x) = np(x)(1+o(1))$$

*равномерно по* $x$, $|x| \geq n^{1/2} \ln n$, $e_x \in E_\varepsilon = \{x \in R^{d-1} : h(e) \geq \varepsilon\}$, *и*

$$p_n(x) = o(nr(|x|))$$

*равномерно по* $x$, $|x| \geq n^{1/2} \ln n$, $e_x \notin E$.

**3. Предельно условные распределения для сумм функционально зависимых компонент вектора.** Пусть $f$: $R^d \to R^k$, $k \geq d$, — нелинейная функция и существует $(k \times d)$-матрица $F_x$ полного ранга, по крайней мере, для всех достаточно больших $x$ такая, что

$$\sup_{|u| \to \infty, |u| = o(|x|)} |F_x u|^{-1} |f(x) - f(x-u) - F_x u| = o(1), \quad |x| \to \infty. \tag{3}$$

Свойство (3) выполняется, например, в случае, когда $f$ дифференцируема по каждой из переменных для всех достаточно больших $x$. В таком случае в качестве $F_x$ следует взять матрицу, элементами которой являются частные производные компонент функции $f$. Например:

а) $F_x = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$ для $f(x_1, x_2) = \left(x_1^2, x_2^2, x_1 x_2\right)^T$;

б) $F_x = \left(2x, \ldots, (k+1)x^k\right)^T$ для $f(x) = \left(x^2, \ldots, x^{k+1}\right)^T$.

Пусть $B_f$ — ковариационная матрица вектора $f(\xi)$, а $\|\cdot\|$ — норма Фробениуса в множестве всех $(k \times d)$-матриц, т. е. $\|F\|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^d F_{ij}^2$. Обозначим через $G_x$ ковариационную матрицу вектора $f(\xi) - F_x \xi$, т. е. $G_x = B_f - F_x B_0^T - B_0 F_x^T + F_x B F_x^T$, где $B_0 = Ef(\xi)\xi^T$.

Далее полагаем, что $n \to \infty$, а $A$ — множество непрерывности лебеговой меры. Если $A \subset R^d$, а $F$ — $(k \times d)$-матрица, то под множеством $FA \subset R^k$ понимаем $\{Fa, a \in A\}$.

**Теорема 2.** *Пусть* $p \in \mathcal{P}$, $\gamma > d + 2$, *а* $f$ — *такая функция, что* $Ef(\xi) = 0$, $E|f(\xi)|^2 < \infty$. *Для фиксированного* $\varepsilon > 0$ *равномерно по* $x$, $|x| \geq n^{1/2} \ln n$, $e_x \in E_\varepsilon$, *выполняются следующие утверждения*:

1) *если* $\|F_x\| \to 0$, $|x| \to \infty$, *то для* $A \subset R^k$

$$P\left(T_n - f(x) \in n^{1/2} A \mid S_n = x\right) = \int_A \varphi_{B_f}(u)\, du (1 + o(1));$$

2) *если* $\|F_x\| \asymp 1$, $|x| \to \infty$, *то для* $A \subset R^k$

$$P\left(T_n - f(x) \in n^{1/2} A \mid S_n = x\right) = \int_A \varphi_{G_x}(u)\, du (1 + o(1)),$$

*причем в случае* $\|F_x - F\| \to 0$ *для некоторой* $(k \times d)$-*матрицы* $F$ *имеем в предельном законе* $G = B_f - F B_0^T - B_0 F^T + F B F^T$ *вместо* $G_x$;

3) *если* $\|F_x\| \to \infty$, $|x| \to \infty$, *то для* $A \subset R^k$

$$P\left(T_n - f(x) \in n^{1/2} F_x A \mid S_n = x\right) = \int_A \varphi_B(u)\, du (1 + o(1)).$$

*Доказательство.* Пусть $P = P\left(T_n - f(x) \in n^{1/2} A \mid S_n = x\right)$. Очевидно,

$$P = (p_n(x))^{-1} \lim_{|\Delta| \to 0} |\Delta|^{-1} P\left(T_n - f(x) \in n^{1/2} A,\ x \preceq S_n \preceq x + \Delta\right), \tag{4}$$

где $\prec$ ($\preceq$) означает покоординатное упорядочение.

Рассмотрим события

$A_0 = \{\langle \xi_j, e_x \rangle < c|x|,\ j = 1, \dots, n\}$,

$A_1 = \{\langle \xi_j, e_x \rangle < c|x|,\ j = 1, \dots, n-1,\ \langle \xi_n, e_x \rangle \geq c|x|\}$,

$A_2 = \bigcup_{k, j=1, k \neq j}^{n} \{\langle \xi_k, e_x \rangle \geq c|x|,\ \langle \xi_j, e_x \rangle \geq c|x|\}$,

где $0 < c < (\gamma - 1)^{-1}(\gamma - d - 2)$ фиксировано.

Ясно, что имеет место представление

$$p_n(x) = p_{n0}(x) + p_{n1}(x) + p_{n2}(x), \tag{5}$$

где $p_{nj}(x) = \lim_{|\Delta| \to 0} |\Delta|^{-1} P(x \preceq S_n \preceq x + \Delta,\ A_j)$, причем (см. доказательство теоремы 1 в [11])

$$p_{n0}(x) = o(np(x)), \quad p_{n1}(x) = p(x)(1 + o(1)), \quad p_{n2}(x) = o(np(x)). \tag{6}$$

Из (4) – (6) получаем

$$P \sim (p_n(x))^{-1} \lim_{|\Delta| \to 0} |\Delta|^{-1} P\left(T_n - f(x) \in n^{1/2} A,\ x \preceq S_n \prec x + \Delta,\ A_1\right). \tag{7}$$

Пусть $\tilde{\xi}$, $\tilde{\xi}_1$, $\tilde{\xi}_2$, ... — н. о. р. с. в. со значениями в $\{u \in R^d\colon \langle u, e_x \rangle < c|x|\}$ и плотностью

$$\tilde{p}(u) = \frac{p(u)}{P(\langle \xi, e_x \rangle < c|x|)}.$$

Покажем, что при $|x| \geq n^{1/2} \ln n$

$$|Ef(\tilde{\xi})| = o(n^{-1/2}), \quad |Ef_i(\tilde{\xi}) f_j(\tilde{\xi}) - Ef_i(\xi) f_j(\xi)| = o(1), \quad i, j = 1, 2, \dots, k. \tag{8}$$

Действительно, поскольку

$$\int\limits_{\langle u, e_x \rangle < c|x|} f_i(u)\, p(u)\, du = -\int\limits_{\langle u, e_x \rangle \geq c|x|} f_i(u)\, p(u)\, du, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

то для достаточно больших $n$ ввиду $|Ef(\tilde{\xi})||\tilde{\xi}| < \infty$ имеем

$$|Ef(\tilde{\xi})| = O\left(\int\limits_{|u| \geq c|x|} |f(u)|\, p(u)\, du\right) = O\left(|x|^{-1} \int\limits_{|u| \geq c|x|} |f(u)||u|\, p(u)\, du\right) = o(n^{-1/2}).$$

Кроме того, поскольку $|Ef_i(\tilde{\xi})||f_j(\tilde{\xi})| < \infty$, то

$$|Ef_i(\tilde{\xi}) f_j(\tilde{\xi}) - Ef_i(\xi) f_j(\xi)| \leq \left((P(\langle \xi, e_x \rangle < c|x|))^{-1} - 1\right) \int\limits_{\langle u, e_x \rangle < c|x|} |f_i(u)||f_j(u)|\, p(u)\, du +$$

$$+ \int\limits_{\langle u, e_x \rangle \geq c|x|} |f_i(u)||f_j(u)|\, p(u)\, du = o(1).$$

Соотношения (8) доказаны. Из справедливости (8) следует, что для суммы $\tilde{T}_n = f(\tilde{\xi}_1) + \dots + f(\tilde{\xi}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, имеет место (1). Подобные рассуждения приводят к выводу, что и для суммы $\tilde{S}_n = \tilde{\xi}_1 + \dots + \tilde{\xi}_n$, $n = 1, 2, \dots$, также справедливо (1).

Заметим далее, что

$$\lim_{|\Delta|\to 0}|\Delta|^{-1} P\Big(T_n - f(x) \in n^{1/2}A,\ x \preceq S_n \prec x+\Delta,\ A_1\Big) = \big(P(\langle \xi, e_x\rangle < c|x|)\big)^{n-1} \times$$

$$\times \int\limits_{\langle u, e_x\rangle \le (1-c)|x|} P\Big(\tilde{T}_{n-1} + f(x-u) - f(x) \in n^{1/2}A \,\Big|\, \tilde{S}_{n-1} = u\Big)\tilde{p}_{n-1}(u)\,p(x-u)\,du. \qquad (9)$$

В силу неравенства Чебышева для $|x| \ge n^{1/2}\ln n$

$$P(\langle \xi, e_x\rangle \ge c|x|) = O\big(|x|^{-2}\big) = o\big(n^{-1}\big),$$

откуда

$$P(\langle \xi, e_x\rangle < c|x|)^n = 1 + o(1). \qquad (10)$$

Пусть $X > 0$ — произвольно большое фиксированное число. Из соотношений (7), (9) и (10) следует

$$P \sim (p(x))^{-1} \int\limits_{\langle u, e_x\rangle \le (1-c)|x|} P\Big(\tilde{T}_{n-1} + f(x-u) - f(x) \in n^{1/2}A \,\Big|\, \tilde{S}_{n-1} = u\Big)\tilde{p}_{n-1}(u)\,p(x-u)\,du \sim$$

$$\sim \int\limits_{|u|<n^{1/2}X} P\Big(\tilde{T}_{n-1} + f(x-u) - f(x) \in n^{1/2}A \,\Big|\, \tilde{S}_{n-1} = u\Big)\tilde{p}_{n-1}(u)\,du + \theta\, w(X), \qquad (11)$$

где $|\theta| < 1$, поскольку для $p \in \mathcal{P}$ выполняется $p(x-u) \sim p(x)$ при $|u| = o(|x|)$, $p(x-u) = O(p(x))$ при $|u| = O(|x|)$, $|x| \to \infty$, равномерно по $e_x \in S_\varepsilon$.

Условие (3) означает, что при $|u| \to \infty$, $|u| = o(|x|)$,

$$f(x) - f(x-u) = F_x u + v, \quad |v| = o(|F_x u|). \qquad (12)$$

Рассмотрим три случая поведения $F_x$ при $|x| \to \infty$.

1. Пусть $\|F_x\| \to 0$, $|x| \to \infty$. Тогда в (12) $|f(x) - f(x-u)| = o(n^{1/2})$ равномерно по $x$, $|x| \ge n^{1/2}\ln n$, и $u$, $n^{1/2}\delta < |u| < n^{1/2}X$, где $\delta > 0$ — произвольно малое фиксированное число.

Для произвольно малого фиксированного $\varepsilon > 0$ определим множества

$$A_\varepsilon^- = \big\{x \in R^k :\ \forall y \in A\ |x-y| \ge \varepsilon\big\}, \quad A_\varepsilon^+ = \big\{x \in R^k :\ \exists y \in A\ |x-y| \le \varepsilon\big\}. \qquad (13)$$

Очевидно, для всех достаточно больших $n$

$$\big\{\tilde{T}_{n-1} \in n^{1/2}A_\varepsilon^-\big\} \subset \big\{\tilde{T}_{n-1} + f(x-u) - f(x) \in n^{1/2}A\big\} \subset \big\{\tilde{T}_{n-1} \in n^{1/2}A_\varepsilon^+\big\}, \qquad (14)$$

откуда

$$\int\limits_{n^{1/2}\delta<|u|<n^{1/2}X} P\Big(\tilde{T}_{n-1} \in n^{1/2}A_\varepsilon^- \,\Big|\, \tilde{S}_{n-1} = u\Big)\tilde{p}_{n-1}(u)\,du \le$$

$$\le \int\limits_{n^{1/2}\delta<|u|<n^{1/2}X} P\Big(\tilde{T}_{n-1} + f(x-u) - f(x) \in n^{1/2}A \,\Big|\, \tilde{S}_{n-1} = u\Big)\tilde{p}_{n-1}(u)\,du \le$$

$$\le \int\limits_{n^{1/2}\delta<|u|<n^{1/2}X} P\Big(\tilde{T}_{n-1} \in n^{1/2}A_\varepsilon^+ \,\Big|\, \tilde{S}_{n-1} = u\Big)\tilde{p}_{n-1}(u)\,du. \qquad (15)$$

Несложно понять, что

$$\int\limits_{n^{1/2}\delta<|u|<n^{1/2}X} P\Big(\tilde{T}_{n-1} \in n^{1/2}A_\varepsilon^- \,\Big|\, \tilde{S}_{n-1} = u\Big)\tilde{p}_{n-1}(u)\,du =$$

$$= P\Big(\tilde{T}_{n-1} \in n^{1/2}A_\varepsilon^-\Big) + \theta_1 w(X) + \theta_2 w(\delta^{-1}) =$$

$$= \int_A \varphi_{B_f}(u)\,du + \theta_1 w(X) + \theta_2 w(\delta^{-1}) + \theta_3 w(\varepsilon^{-1}), \tag{16}$$

а

$$\int_{n^{1/2}\delta<|u|<n^{1/2}X} P\Big(\tilde{T}_{n-1} \in n^{1/2}A_\varepsilon^+ \mid \tilde{S}_{n-1} = u\Big)\,\tilde{p}_{n-1}(u)\,du =$$

$$= P\Big(\tilde{T}_{n-1} \in n^{1/2}A_\varepsilon^+\Big) + \theta_4 w(X) + \theta_5 w(\delta^{-1}) =$$

$$= \int_A \varphi_{B_f}(u)\,du + \theta_4 w(X) + \theta_5 w(\delta^{-1}) + \theta_6 w(\varepsilon^{-1}), \tag{17}$$

где $|\theta_i| < 1$. В силу произвольности выбора $\varepsilon$, $\delta$ и $X$ из (15) – (17) имеем

$$\int_{|u|<n^{1/2}X} P\Big(\tilde{T}_{n-1} + f(x-u) - f(x) \in n^{1/2}A \mid \tilde{S}_{n-1} = u\Big)\,\tilde{p}_{n-1}(u)\,du \sim \int_A \varphi_{B_f}(u)\,du, \tag{18}$$

равномерно по $x$, $|x| \ge n^{1/2}\ln n$, $e_x \in E_\varepsilon$, откуда, учитывая (11), получаем первое утверждение теоремы.

2. Пусть $\|F_x\| \asymp 1$, $|x| \to \infty$. Тогда в (12) $|v| = o(n^{1/2})$ равномерно по $x$, $|x| \ge n^{1/2}\ln n$, и $u$, $n^{1/2}\delta < |u| < n^{1/2}X$, где $\delta > 0$ — произвольно малое фиксированное число. Вводя множества $A_\varepsilon^+$, $A_\varepsilon^-$, определяющиеся соотношениями (13), вместо (14) для всех достаточно больших $n$ имеем

$$\Big\{\tilde{T}_{n-1} - F_x u \in n^{1/2}A_\varepsilon^-\Big\} \subset \Big\{\tilde{T}_{n-1} + f(x-u) - f(x) \in n^{1/2}A\Big\} \subset \Big\{\tilde{T}_{n-1} - F_x u \in n^{1/2}A_\varepsilon^+\Big\}. \tag{19}$$

С помощью рассуждений, аналогичных (15) – (17), вместо (18) получаем

$$\int_{|u|<n^{1/2}X} P\Big(\tilde{T}_{n-1} + f(x-u) - f(x) \in n^{1/2}A \mid \tilde{S}_{n-1} = u\Big)\,\tilde{p}_{n-1}(u)\,dt \sim \int_A \varphi_{G_x}(u)\,du, \tag{20}$$

равномерно по $x$, $|x| \ge n^{1/2}\ln n$, $e_x \in E_\varepsilon$, откуда с учетом (11) следует второе утверждение теоремы. Легко заметить, что если для некоторой $(k \times d)$-матрицы $F$ справедливо $\|F_x - F\| \to 0$, то $|(F - F_x)u| = o(n^{1/2})$ и, следовательно, в (19) имеем $F$ вместо $F_x$, вследствие чего в (20) имеем $G$ вместо $G_x$.

3. Пусть $\|F_x\| \to \infty$, $|x| \to \infty$. Тогда в (12) $|v| = o(n^{1/2}\|F_x\|)$ равномерно по $x$, $|x| \ge n^{1/2}\ln n$, и $u$, $n^{1/2}\delta < |u| < n^{1/2}X$, где $\delta > 0$ — произвольно малое фиксированное число. В этом случае рассматриваем $F_x A$ вместо $A$. Ввиду (12)

$$\int_{n^{1/2}\delta<|u|<n^{1/2}X} P\Big(\tilde{T}_{n-1} + f(x-u) - f(x) \in n^{1/2}F_x A \mid \tilde{S}_{n-1} = u\Big)\,\tilde{p}_{n-1}(u)\,du =$$

$$= \int_{n^{1/2}\delta<|u|<n^{1/2}X} P\Big(n^{-1/2}\tilde{T}_{n-1} - n^{-1/2}v \in F_x(n^{-1/2}u + A) \mid \tilde{S}_{n-1} = u\Big)\,\tilde{p}_{n-1}(u)\,du. \tag{21}$$

Снова вводя множества $A_\varepsilon^+$, $A_\varepsilon^-$, определяющиеся равенствами (13), заметим, что на этот раз вместо (14) или (19) для всех достаточно больших $n$ имеем

$$\Big\{n^{-1/2}\tilde{T}_{n-1} \in F_x A_\varepsilon^-\Big\} \subset \Big\{n^{-1/2}\tilde{T}_{n-1} - n^{-1/2}v \in F_x A\Big\} \subset \Big\{n^{-1/2}\tilde{T}_{n-1} \in F_x A_\varepsilon^+\Big\}. \tag{22}$$

Используя (22), с помощью рассуждений, аналогичных (15) – (17), из (21) получаем

$$\int\limits_{n^{1/2}\delta<|u|<n^{1/2}X} P\Big(\tilde{T}_{n-1}+f(x-u)-f(x)\in n^{1/2}F_xA \mid \tilde{S}_{n-1}=u\Big)\,\tilde{p}_{n-1}(u)\,du \sim$$

$$\sim \int\limits_{n^{1/2}\delta<|u|<n^{1/2}X} P\Big(n^{-1/2}\,\tilde{T}_{n-1}\in F_x(n^{-1/2}u+A) \mid \tilde{S}_{n-1}=u\Big)\,\tilde{p}_{n-1}(u)\,du =$$

$$= P\Big(n^{-1/2}\,\tilde{T}_{n-1}\in F_x(n^{-1/2}\,\tilde{S}_{n-1}+A)\Big)+\theta_1 w(X)+\theta_2 w(\delta^{-1}). \tag{23}$$

Представим

$$P\Big(n^{-1/2}\,\tilde{T}_{n-1}\in F_x(n^{-1/2}\,\tilde{S}_{n-1}+A)\Big) = I_1+I_2+I_3, \tag{24}$$

где

$$I_1 = P\Big(n^{-1/2}\,\tilde{T}_{n-1}\in F_x(n^{-1/2}\,\tilde{S}_{n-1}+A),\ n^{-1/2}\,\tilde{S}_{n-1}\in(-A)_\varepsilon^-\Big),$$

$$I_2 = P\Big(n^{-1/2}\,\tilde{T}_{n-1}\in F_x(n^{-1/2}\,\tilde{S}_{n-1}+A),\ n^{-1/2}\,\tilde{S}_{n-1}\notin(-A)_\varepsilon^+\Big),$$

$$I_3 = P\Big(n^{-1/2}\tilde{T}_{n-1}\in F_x(n^{-1/2}\,\tilde{S}_{n-1}+A),\ n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}\notin(-A)_\varepsilon^-,\ n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}\in(-A)_\varepsilon^+\Big).$$

Исследуем отдельно асимптотику каждого слагаемого в (24). Ввиду (1) имеем

$$I_1 = P\Big(n^{-1/2}\tilde{T}_{n-1}\in F_x(n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}+A)\mid n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}\in(-A)_\varepsilon^-\Big)\,P\Big(n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}\in(-A)_\varepsilon^-\Big) \sim$$

$$\sim P\Big(n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}\in(-A)_\varepsilon^-\Big) \sim \int\limits_A \varphi_B(u)\,du+\theta w(\varepsilon^{-1}),\quad |\theta|<1, \tag{25}$$

а

$$I_2 = P\Big(n^{-1/2}\tilde{T}_{n-1}\in F_x(n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}+A)\mid n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}\notin(-A)_\varepsilon^+\Big)\,P\Big(n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}\notin(-A)_\varepsilon^+\Big) \le$$

$$\le P\Big(n^{-1/2}\tilde{T}_{n-1}\in F_x(n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}+A)\mid n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}\notin(-A)_\varepsilon^+\Big) = o(1). \tag{26}$$

Наконец,

$$I_3 = P\Big(n^{-1/2}\tilde{T}_{n-1}\in F_x(n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}+A)\mid n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}\notin(-A)_\varepsilon^-,\ n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}\in(-A)_\varepsilon^+\Big)\times$$

$$\times\ P\Big(n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}\notin(-A)_\varepsilon^-;\ n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}\in(-A)_\varepsilon^+\Big) \le$$

$$\le P\Big(n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}\notin(-A)_\varepsilon^-,\ n^{-1/2}\tilde{S}_{n-1}\in(-A)_\varepsilon^+\Big) = \theta w(\varepsilon^{-1}),\quad |\theta|<1. \tag{27}$$

Соотношения (25) – (27) выполняются равномерно по $x$, $|x|\ge n^{1/2}\ln n$, $e_x\in E_\varepsilon$.

Объединяя (11) (с учетом $F_xA$ вместо $A$) и (23) – (27), получаем, в силу произвольности выбора $X$, $\varepsilon$ и $\delta$, третье утверждение теоремы. Теорема доказана.

Рассмотрим примеры применения теоремы 2. Всюду предполагаем, что распределение случайной величины $\xi$ со значениями в $R^d$ абсолютно непрерывно с плотностью $p\in\mathcal{P}$, $\gamma>d+2$. Считаем, что $E\xi=0$, а $B$ — ковариационная матрица $\xi$. Приведенные утверждения выполняются равномерно по $x$, $|x|\ge n^{1/2}\ln n$, а в многомерном случае еще и по $e_x\in E_\varepsilon$ для фиксированного $\varepsilon>0$.

*Условное распределение выборочных смешанных моментов при условии на выборочное среднее.* Пусть $\bar{\xi} = n^{-1}\sum_{i=1}^n\xi_i$, $\hat{B} = n^{-1}\sum_{i=1}^n\xi_i\xi_i^T$, $E|\xi|^4<\infty$. Рассмотрим сначала случай $d=2$. Возьмем $f(z_1,z_2)=(z_1^2, z_1^2, z_1z_2)^T$.

Предельное распределение выборочных смешанных моментов $\hat{b}_{11}$, $\hat{b}_{22}$, $\hat{b}_{12}$

при условии $n\overline{\xi} = x$, где $x$ лежит в области больших уклонений, несколько различается в зависимости от того, где лежат компоненты $x_1$ и $x_2$.

Для примера приведем два утверждения. Пусть $\eta = (\hat{b}_{11} - b_{11}, \hat{b}_{22} - b_{22}, \hat{b}_{12} - b_{12})^T$. Если обе компоненты вектора $x$ лежат в области больших уклонений, то для $A \subset R^2$

$$P\left(n\eta - (x_1^2, x_2^2, x_1 x_2)^T \in n^{1/2} F_x A \mid n\overline{\xi} = x\right) = \int_A \varphi_B(u)\, du (1 + o(1)),$$

где $F_x = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$. Если же $|x_1| \geq n^{1/2} \ln n$, т. е. первая компонента вектора $x$ лежит в области больших уклонений, а $|x_2| = o(n^{1/2})$, то

$$P\left(n\eta - (x_1^2, 0, 0)^T \in n^{1/2} F_x A \mid n\overline{\xi} = x\right) = \int_A \varphi_B(u)\, du (1 + o(1))$$

с той же матрицей $F_x$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $f_j(z) = z_j^2$, $f_{ij}(z) = z_i z_j$, $z \in R^d$, $j = 1, 2, \ldots, d$, $i = 1, 2, \ldots, j-1$, а $\eta = (\hat{b}_{11} - b_{11}, \ldots, \hat{b}_{dd} - b_{dd}, \hat{b}_{12} - b_{12}, \ldots, \hat{b}_{1d} - b_{1d}, \hat{b}_{23} - b_{23}, \ldots, \hat{b}_{(d-1)d} - b_{(d-1)d})^T$. Предположим, что все компоненты вектора $x$ лежат в области больших уклонений. Для $A \subset R^d$ имеем

$$P\left(n\eta - (x_1^2, \ldots, x_d^2, x_1 x_2, \ldots, x_1 x_d, x_2 x_3, \ldots, x_{d-1} x_d)^T \in n^{1/2} F_x A \mid n\overline{\xi} = x\right) =$$
$$= \int_A \varphi_B(u)\, du (1 + o(1)),$$

где

$$F_x = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 2x_d \\ x_2 & x_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_d & 0 & \ldots & 0 & x_1 \\ 0 & x_3 & x_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & x_d & 0 & \ldots & x_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & x_{d-1} & x_d \end{pmatrix}.$$

В следующих двух примерах рассматривается случай $d = 1$. Обозначим $b_k = E\xi^k$, $\eta_k = n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i^k - b_k$, $k \geq 1$.

*Условное распределение выборочных моментов при условии на выборочное среднее*. Предположим, что $E\xi^{2m} < \infty$ для некоторого $m \in N$. Пусть $f_j(z) = z^j$, $z \in R$, $j = 2, \ldots, m$. Вектор $\eta = (\eta_2, \ldots, \eta_m)^T$ при условии $n\overline{\xi} = x$ имеет вырожденное распределение, сосредоточенное вдоль прямой

$$\frac{\sqrt{n}\,z_1}{2x} - \frac{x}{2\sqrt{n}} = \ldots = \frac{\sqrt{n}\,z_{m-1}}{mx^{m-1}} - \frac{x}{m\sqrt{n}},$$

причем

$$P\left(\frac{\sqrt{n}\,\eta_2}{2x} - \frac{x}{2\sqrt{n}} < y \mid n\bar{\xi} = x\right) = \Phi(b_2^{-1/2}y),$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Таким образом, усреднение по выборочному моменту наинизшего порядка приводит к вырожденному распределению для вектора выборочных моментов более высоких порядков.

*Условное распределение первых* $2m$ *выборочных моментов при условии на* $(2m+1)$*-й выборочный момент.* Предположим, что $E\xi^{4m+2} < \infty$ для некоторого $m \in N$. Пусть $f_j(z) = z^{j/(2m+1)}$, $z \in R$, $j = 1, \ldots, 2m$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{2m})^T$. Для $A \subset R^{2m}$ имеем

$$P\left(n\eta - ((x + b_{2m+1})^{1/(2m+1)}, \ldots, (x + b_{2m+1})^{2m/(2m+1)})^T \in n^{1/2}A \mid n\eta_{2m+1} = x\right) =$$
$$= \int_A \varphi_D(u)\,du(1 + o(1)),$$

где $D = \left|b_{i+j} + b_i b_j\right|_{i,j=1}^{2m}$. В отличие от предыдущего примера, усреднение по выборочному моменту наивысшего порядка приводит к невырожденному распределению для вектора выборочных моментов более низких порядков.

**4. Предельные условные распределения для сумм проекций вектора на заданные подпространства.** Пусть $\{u_i, v_j\}_{i=1}^{k}{}_{j=1}^{s}$ — линейно независимая система векторов в пространстве $R^d$, $k + s \le d$. Обозначим $\langle S_n, u\rangle = (\langle S_n, u_1\rangle, \ldots$ $\ldots, \langle S_n, u_k\rangle)^T$, $\langle S_n, v\rangle = (\langle S_n, v_1\rangle, \ldots, \langle S_n, v_s\rangle)^T$.

Введем следующие обозначения: $g(y) = h(e_y)\,|y|^{-\gamma}$, $y \in R^d$, $U = |\langle u_i, u_j\rangle|_{i,j=1}^{k}$, $V = |\langle v_j, u_i\rangle|_{j=1}^{s}{}_{i=1}^{k}$ — ортогональный проектор на подпространство $\{x \in R^d\colon \langle x, u_i\rangle = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k\}$. Будем также предполагать, что векторы $\{P_u v_j\}_{j=1}^{s}$ линейно независимы, и обозначать $Q = |\langle P_u v_i, v_j\rangle|_{i,j=1}^{s}$.

Если $x \in R^k$, а $y \in R^s$, то через $(x, y)$ будем обозначать $(k + s)$-мерный вектор, у которого первые $k$ компонент суть компоненты $x$, а последние $s$ — компоненты $y$.

**Теорема 3.** *Если $p \in \mathcal{P}$, $\gamma > d + 2$, то для $A \subset R^s$ равномерно по $t$, $|t| \ge$ $\ge n^{1/2}\ln n$, выполняется*

$$P\left(\langle S_n, v\rangle - VU^{-1}t \in |x|\,Q^{1/2}A \mid \langle S_n, u\rangle = t\right) = \int_A q_{e_x}(y)\,dy(1 + o(1)),$$

*где* $x = U^{-1/2}t$, $q_{e_x}(y) = K_{e_x} q((e_x, y))$, $y \in R^s$,

$$q(z) = |z|^{d-k-s-\gamma} \int_{R^{d-k-s}} g(T(e_z, w))\,dw, \quad z \in R^{k+s},$$

*а $T$ — ортогональная $(d \times d)$-матрица, определяемая векторами $\{u_i, v_j\}_{i=1}^{k}{}_{j=1}^{s}$, явный вид которой указан при доказательстве.*

***Замечание.*** Вид предельной условной плотности существенно упрощается, если $k+s=d$. В этом случае $q(z)=g(Tz)$. Если, к тому же, $u_i=e_i$, $v_j=e_{k+j}$, $i=1,\ldots,k$, $j=1,\ldots,d-k$, где $e_i$ — $i$-й единичный вектор в $R^d$, то $q(z)=g(z)$. В частности, для плотности $p$ вида (2) имеем $q(z)=p(z)$.

*Доказательство.* Далее всюду полагаем, не оговаривая этого специально, что $|x|\geq n^{1/2}\ln n$, и, по-прежнему, $n\to\infty$.

Обозначим $P=P\left(\langle S_n,v\rangle - VU^{-1}t\in \left|U^{-1/2}t\right|Q^{1/2}A \mid \langle S_n,u\rangle = t\right)$. Поскольку $\langle S_n,u\rangle$ находится в области больших уклонений, то же самое можно сказать и о всей сумме $S_n$. Поэтому из теоремы 1 следует, что

$$P = P\left(\langle\xi,v\rangle - VU^{-1}t\in\left|U^{-1/2}t\right|Q^{1/2}A \mid \langle\xi,u\rangle=t\right)(1+o(1)). \tag{28}$$

Пусть $u_i'=\sum_{i=1}^k (U^{-1/2})_{ij}u_j$, $i=1,2,\ldots,k$. Векторы $\{u_i'\}_{i=1}^k$ ортонормированы и, следовательно, справедливо представление

$$\xi = \sum_{i=1}^k \langle\xi,u_i'\rangle u_i' + P_u\xi,$$

откуда

$$\langle\xi,v\rangle - VU^{-1}\langle\xi,u\rangle = \langle\xi,P_u v\rangle. \tag{29}$$

Подставляя (29) в (28), имеем

$$P = P\left(\langle\xi,P_u v\rangle\in\left|U^{-1/2}t\right|Q^{1/2}A \mid \langle\xi,u\rangle=t\right)(1+o(1)). \tag{30}$$

Вводя ортонормированные векторы $v_i'=\sum_{j=1}^s (Q^{-1/2})_{ij}u_j$, $i=1,2,\ldots,s$, для ортонормированного набора векторов $\{u_i',v_j'\}_{i=1}^{k}{}_{j=1}^{s}$ и вектора $x=U^{-1/2}t$, который находится в области больших уклонений, из (30) получаем

$$P = P\left(\langle\xi,v'\rangle\in|x|A \mid \langle\xi,u'\rangle = x\right)(1+o(1)). \tag{31}$$

Пусть $f_{21}$ — совместная плотность $\langle\xi,v'\rangle$ и $\langle\xi,u'\rangle$, а $f_1$ — плотность $\langle\xi,u'\rangle$. Очевидно,

$$P\left(\langle\xi,v'\rangle\in|x|A \mid \langle\xi,u'\rangle=x\right) = \frac{|x|^s}{f_1(x)}\int_A f_{21}(|x|y,x)\,dy. \tag{32}$$

Найдем распределение $\langle\xi,u'\rangle$. Имеем

$$P\left(\langle\xi,u'\rangle \prec x\right) = \int\limits_{\langle z,u_1'\rangle<x_1,\ldots,\langle z,u_k'\rangle<x_k} (h(e_z)+w(|z|))\,l(|z|)\,|z|^{-\gamma}dz,$$

где $l(t)$ медленно меняется при $t\to\infty$.

Пусть $T'$ — ортогональная матрица вида $T'=(\,u_1'\ \ldots\ u_k'\ D^T\,)$, где $D$ — $((d-k)\times d)$-матрица такая, что $Du_i'=0$, $i=1,\ldots,k$, $DD^T$ — единичная матрица. После замены переменных $z=T'y$ получаем

$$P\left(\langle\xi,u'\rangle\prec x\right) = \int_{-\infty}^{x_1}\ldots\int_{-\infty}^{x_k} dy_1\ldots dy_k \int\limits_{R^{d-k}}\left(h(e_{T'y})+w(|y|)\right)l(|y|)\,|y|^{-\gamma}dy_{k+1}\ldots dy_d.$$

Следующая замена переменных $y_{k+1}=|y_0|z_1,\ \ldots\ ,y_d=|y_0|z_{d-k}$, где $y_0=(y_1,\ldots,y_k)$, приводит к выражению

$$P\left(\langle\xi, u'\rangle \prec x\right) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_k} |y_0|^{d-k-\gamma} dy_1 \ldots dy_k \int_{R^{d-k}} \left(h(e_{T'(e_{y_0}, z)}) + w\left(|y_0|\left(1+|z|^2\right)^{1/2}\right)\right) \times$$
$$\times\ l\left(|y_0|\left(1+|z|^2\right)^{1/2}\right)\left(1+|z|^2\right)^{-\gamma/2} dz.$$

Дифференцируя по $x_1, \ldots, x_k$ и используя свойства медленно меняющихся функций, получаем

$$f_1(x) = |x|^{d-k-\gamma} l(|x|) \int_{R^{d-k}} \left(h(e_{T'(e_x, z)})\right)\left(\left(1+|z|^2\right)^{-\gamma/2}\right) dz(1+o(1)). \qquad (33)$$

Аналогично,

$$f_{21}(t, x) = \left(|x|^2+|t|^2\right)^{(d-k-s-\gamma)/2} l\left(\left(|x|^2+|t|^2\right)^{1/2}\right) \times$$
$$\times \int_{R^{d-k-s}} h(e_{T(e_{(x,t)}, z)})\left(1+|z|^2\right)^{-\gamma/2} dz(1+o(1)),$$

где $T = (\, u_1' \ldots u_k' \; v_1' \ldots v_s' \; F^T)$, а $F$ — $((d-k-s)\times d)$-матрица такая, что $Fu_i' = 0,\ i = 1, \ldots, k,\ Fv_j' = 0,\ j = 1, \ldots, s,\ FF^T$ — единичная матрица. Следовательно,

$$f_{21}(|x|y, x) = |x|^{d-k-s-\gamma}\left(1+|y|^2\right)^{(d-k-s-\gamma)/2} l(|x|) \times$$
$$\times \int_{R^{d-k-s}} h(e_{T(e_{(e_x, y)}, z)})\left(1+|z|^2\right)^{-\gamma/2} dz(1+o(1)).$$

Подставляя (33) и (34) в (32), и далее в (31), приходим к утверждению теоремы. Теорема доказана.


1. *Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
2. *Von Bahr B.* Multi-dimentional integral limit theorems for large deviations // Ark. mat. – 1967. – **7**. – P. 89 – 99.
3. *Боровков А. А., Рогозин Б. А.* О центральной предельной теореме в многомерном случае // Теория вероятностей и ее применения. – 1965. – **10**, № 1. – С. 61 – 69.
4. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Большие уклонения и проверка статистических гипотез. I. Большие уклонения сумм случайных векторов // Сиб. мат. журн. – 1992. – **2**, № 3. – С. 52 – 120.
5. *Ney P.* Dominating points and the asymptotics of large deviations for random walk on $R^d$ // Ann. Probab. – 1983. – **11**, № 1. – P. 158 – 167.
6. *Osipov L. V.* On large deviations for sums of random vectors in $R^k$ // J. Multivar. Anal. – 1981. – **11**, № 2. – P. 115 – 126.
7. *Rozovskii L. V.* On probabilities of large deviations in some classes of $k$-dimentional Borel sets // Ibid. – 1985. – **17**, № 1. – P. 1 – 26.
8. *Нагаев А. В.* Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, при нарушении условия Крамера // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1969. – **6**. – С. 17 – 22.
9. *Нагаев А. В.* Предельные теоремы для выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса // Докл. АН СССР. – 1971. – **198**. № 2. – С. 291 – 292.
10. *Мухамеджанов К. М., Нагаев А. В.* Предельные теоремы для условных распределений // Асимптотические задачи теории вероятностей и математической статистики. – Ташкент: Фан, 1990. – С. 56 – 69.
11. *Nagaev A. V., Zaigraev A. Yu.* Multidimentional limit theorems allowing large deviations for densities of regular variation // J. Multivar. Anal. – 1998. – **67**. – P. 385 – 397.


Получено 29.01.97,
после доработки — 19.02.98