УДК 517.9

Н. И. Ронто, А. М. Самойленко, С. И. Трофимчук
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРИЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА: ДОСТИЖЕНИЯ И НОВЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ. VI*

For the numerical-analytic method suggested by A. M. Samoilenko in 1965, we analyze the application to multipoint boundary-value problems.

Проаналізовано застосування чисельно-аналітичного методу, запропонованого А. М. Самойленком у 1965 р., до багатоточкових крайових задач.

Настоящая статья является шестой частью работы [1–5], поэтому в ней продолжена нумерация пунктов, формул, теорем и т. д.

3.8. Многоточечные краевые задачи. В предыдущих частях работы в основном исследовалась периодическая краевая задача, что естественно отражено в первоначальном названии численно-аналитического метода последовательных периодических приближений. Однако в работе [6] было впервые замечено, что алгоритм метода может быть пригоден и для рассмотрения двухточечной краевой задачи

$$\begin{gathered} dx/dt = f(t,x), \\ Ax(0) + Cx(T) = d, \end{gathered} \qquad (163)$$

где $t \in [0, T]$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, A, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $d \in \mathbb{R}^n$.

Анализ двухточечной краевой задачи (163), а в последствии и многоточечных задач, показал ряд их специфических особенностей. Несмотря на формальную близость задачи (163) к периодической задаче (1), ее анализ еще не полностью завершен. До сих пор не разработан оптимальный численно-аналитический алгоритм исследования задачи (163), который бы учитывал конкретные краевые условия.

Поясним эту мысль подробнее. Пусть, например, $\det(A + C) \neq 0$. В этом случае краевая задача (163) является „невырожденной", и поэтому существуют варианты метода, не требующие разрешения определяющего уравнения [7–9]. С другой стороны, если $A = -C = E$ и $d = 0$, из (163) получаем периодическую задачу (1), предусматривающую решение системы n определяющих уравнений с n неизвестными.

Существуют примеры [10, 11], показывающие возможность промежуточного варианта, когда размерность n_1 определяющей системы такова, что $0 < n_1 < n$. Однако общей теории метода для таких задач не имеется. Возможно, что решение этой проблемы потребует рассмотрения принципиально новых алгоритмов, в то время как имеющиеся процедуры для исследования непериодических краевых задач сводились к добавлению в правую часть интегрального уравнения (2) линейной добавки вида $pt + q$ с некоторыми p, $q \in \mathbb{R}^n$, т. е.

$$x(t,z) = z + \int_0^t f(s, x(s,z))\,ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x(s,z))\,ds + pt + q. \qquad (164)$$

При этом векторы p и q подбирались так, чтобы каждая итерация $x_m(t, z)$ метода удовлетворяла заданным краевым условиям, в полной аналогии с периодической задачей. Появляющаяся при этом новая особенность состоит в некотором усложнении выбора области D_β.

С другой стороны, достаточное условие сходимости $r(Q) < 1$, где $Q = TK/q$, для двухточечных задач то же, что и в периодическом случае и не

* Работа выполнена при частичной поддержке гранта OMFB UK-3/1999.

зависит от вида краевых условий. Однако это свойство не сохраняется уже для трехточечных задач.

С использованием численно-аналитического подхода двухточечные и многоточечные задачи рассматривались в работах [6–49] (см. также литературу, цитируемую в [1–5]). Остановимся на некоторых из упомянутых работ несколько подробнее.

Краевая задача (163) при условии $\det C \neq 0$ исследовалась в [6] с помощью итерационного процесса

$$x_{m+1}(t, z) = z + \left[Lf(\cdot, x_m(\cdot, z)) \right](t) + p_m t + q_m, \qquad m = 0, 1, \ldots; \quad x_0(t, z) \equiv z, \tag{165}$$

где

$$p_m = \frac{1}{T}\left[C^{-1} d - \left(C^{-1} A + E\right)z\right], \quad q_m = 0, \tag{166}$$

а оператор L введен в п. 3.1 [2].

В [6, 10, 11] доказано, что при условии

$$r(TK) < q \tag{167}$$

для всех $z \in D_{\beta(z)}$, где q — число, определенное в п. 1 [1], а

$$\beta(z) := \frac{1}{2} TM + \left| C^{-1} d - \left(C^{-1} A + E\right)z \right|,$$

последовательность $\{x_m(t, z)\}$, заданная согласно (165) и (166), равномерно сходится к функции $x^*(t, z)$, удовлетворяющей краевым условиям (163) и интегральному уравнению (164). Тем самым вопрос о существовании решения задачи (163) был сведен к изучению определяющего уравнения

$$\Delta(z) = \frac{1}{T}\left[C^{-1} d - \left(C^{-1} A + E\right)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x^*(s, z)\right) ds = 0. \tag{168}$$

Детальное исследование разрешимости определяющего уравнения (168) и выбора области начальных значений решений задачи (163), а также оценка погрешности при нахождении приближенного определяющего уравнения проведено в работах [6, 10, 11].

Ограничение $\det C \neq 0$ было снято в работах [21, 11]. При этом предполагалось, что для матриц A и C при некоторых действительных скалярах k_1, k_2, $k_1 \neq k_2$, выполнено неравенство

$$\det(k_1 A + k_2 C) \neq 0. \tag{169}$$

Было показано, что для задачи (163) при выполнении условий (169) и (167) итерационный процесс вида (165) окажется сходящимся, если положить

$$p_m = \frac{1}{T}(k_2 - k_1) H d(z), \quad q_m = k_1 H d(z),$$

где

$$\beta(z) = \left|(k_2 - k_1) H d(z)\right|, \quad H = (k_1 A + k_2 C)^{-1}$$

и

$$d(z) = d - (A + C) z$$

для $z \in D_{\beta(z)}$.

***Замечание* 15.** В первоначальных работах [6, 11, 21] в неравенстве (167) вместо q фигурировала величина π. Указанная же нами оценка (167) следует из результатов, изложенных в п. 1.2 [1].

Ниже мы подробнее остановимся на обсуждении статьи [45], где соответствующий итерационный процесс был построен при условии

$$\det(AK_1 + CK_2) \neq 0, \tag{170}$$

в котором K_1 и K_2 — подходящим образом подобранные $(n \times n)$-мерные матрицы.

В работах [15, 50] указано, как построить итерационный процесс в случае, когда

$$\operatorname{rank}[A, C] = n. \tag{171}$$

***Замечание* 16.** Пример матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

в краевых условиях (163) показывает, что ограничение (169) на матрицы A и C является более сильным сравнительно с условием (171), поскольку в этом случае $\operatorname{rank}[A, C] = 2$, тогда как

$$\det(k_1 A + k_2 C) = \det\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & k_1 + k_2 \\ k_1 + 2k_2 & k_1 + 2k_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

***Замечание* 17.** Можно показать, что условия (170) и (171) эквивалентны. Действительно, если ранг матрицы $G := [A, C]$ равен n, то согласно теореме Кронекера – Капелли можно указать такую матрицу R, что $GR = E$. С другой стороны, как было доказано в работе [44], из условия $GR = E$ следует (170).

Случай, когда $\det(A + C) \neq 0$, изучался в статье [7], где, в частности, был предложен алгоритм метода, не требующий введения определяющего уравнения.

Краевая задача (163) в пространстве l^∞ в случае, когда линейный оператор $C : l^\infty \to l^\infty$ обратим, рассматривалась в диссертации [51].

Конструктивное исследование многоточечных задач с краевыми условиями, заданными более чем в двух точках, в значительной мере усложняется по сравнению с двухточечными задачами. По сути, каждый конкретный класс задач требует подбора подходящего алгоритма метода. Это уже отчетливо видно в случае трехточечных краевых задач, например, с учетом работ [10, 31, 39, 41, 47, 52, 53].

В статье [39] численно-аналитический метод обосновывается для исследования существования и приближенного построения решений трехточечных краевых задач вида

$$\begin{gathered} dx/dt = f(t, x), \quad f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \\ Ax(0) + A_1 x(t_1) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n \end{gathered} \tag{172}$$

при условии

$$\det(t_1 A + TC) \neq 0. \tag{173}$$

В предположении, что

$$r(K + |HA_1|K) < 2/T \tag{174}$$

и $z \in D_{\beta(z)}$, где

$$H = \left(\frac{t_1}{T} A_1 + C\right)^{-1},$$

$$\beta(z) = \frac{T}{2} M + \left| H\left[d - \left(A + A_1 + C\right) z \right] \right| + |HA_1| \alpha_1(t_1) M,$$

была доказана сходимость последовательных приближений

$$x_{m+1}(t, z) = z + \left[Lf(\cdot, x_m(\cdot, z)) \right](t) + \frac{t}{T} H d_m(z), \tag{175}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$, $x_0(t, z) \equiv z$, а

$$d_m(z) := d - (A + A_1 + C)z - A_1[Lf(\cdot, x_m(\cdot, z))](t_1).$$

Пусть $x^*(t, z) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z)$ для $z \in D_{\beta(z)}$. В [39] установлены также условия, достаточные для разрешимости определяющего уравнения

$$\Delta(z) = \frac{1}{T}H[d - (A + A_1 + C)z - A_1[Lf(\cdot, x^*(\cdot, z))](t_1)] - Sf(\cdot, x^*(\cdot, z)) = 0.$$

Согласно методу, любой корень $z = z^*$ последнего уравнения задает решение $x = x^*(t, z^*)$ трехточечной краевой задачи (172), (173).

***Замечание* 18.** Условие (174) можно ослабить до неравенства

$$r\left(\begin{bmatrix} \frac{T}{3}K & K \\ |HA_1|K\alpha_2(t_1) & |HA_1|K\alpha_1(t_1) \end{bmatrix}\right) < 1.$$

Действительно, пусть N — нелинейный интегральный оператор, определяемый правой частью (175). Тогда

$$|[Nx](t) - [Ny](t)]| \le [V_1|x - y|](t),$$

где

$$[V_1 u](t) = K[\mathcal{A}u](t) + |HA_1|K[\mathcal{A}u](t_1),$$

а оператор $\mathcal{A}$ введен в п. 3.2.2 [3] формулой

$$[\mathcal{A}u](t) = (1 - t/T)\int_0^t u(s)\,ds + tT^{-1}\int_t^T u(s)\,ds. \tag{176}$$

Поскольку

$$V_1\alpha_1 = \frac{T}{3}\alpha_1 K + \alpha_2(t_1)|HA_1|K,$$

$$V_1 1 = \alpha_1 K + \alpha_1(t_1)|HA_1|K$$

и

$$\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 1 \end{pmatrix} \le B\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где

$$B = \begin{bmatrix} \frac{T}{3}K & \alpha_2(t_1)|HA_1|K \\ K & \alpha_1(t_1)|HA_1|K \end{bmatrix},$$

а также $r\left(\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_1 \end{bmatrix}\right) = r(V_1)$, то, как можно показать, $r(V_1) \le r(B)$. Далее, поскольку, с учетом леммы 2 [3],

$$r(B) \le r\left(\begin{bmatrix} \frac{T}{3}K & K \\ \frac{T^2}{6}|HA_1|K & \frac{T}{2}|HA_1|K \end{bmatrix}\right) \le r\left(\frac{T}{3}K + \frac{T}{2}|HA_1|K\right),$$

то неравенство (174) нами действительно ослаблено.

Ограничение (173) было снято в статье [47], где предполагалось существование постоянных k_1 и k_2 $(k_1 \ne k_2)$, таких, что

$$\det\left[k_1 A + k_2 A_1 + \left(k_1 + \frac{T}{t_1}(k_2 - k_1)\right)C\right] \ne 0. \tag{177}$$

При этом итерационный алгоритм метода получается из (175), если положить $q_m = \frac{t_1}{T}k_1 H d_m(z)$, $p_m = \frac{k_2 - k_1}{T}H(k_1, k_2)\,d_m(z)$,

$$H(k_1, k_2) = \left[\frac{t_1}{T}(k_1 A + k_2 A_1) + (k_1 t_1/T + (k_2 - k_1))\, C\right]^{-1}$$

и $d_m(z) = d - (A + A_1 + C)z - A_1[Lf(\cdot, x_m(\cdot, z))](t_1)$.

Если к тому же

$$r(K + [t_1|k_1|/T + |k_2 - k_1|]\,|H(k_1, k_2)A_1|K) < 2/T$$

и $z \in D_{\beta(z)}$, где

$$\beta(z) = TM/2 + [t_1|k_1|/T + |k_2 - k_1|]\,[|H(k_1, k_2)(d - (A + A_1 + C)z)|] + \\ + \frac{T}{2}|H(k_1, k_2)A_1|M\,,$$

то определенный выше итерационный процесс будет сходящимся к единственному решению x^* уравнения (164). Работы [47, 52] содержат подробное исследование возникающего определяющего уравнения

$$\Delta(z) = \frac{1}{T}(k_2 - k_1)H(k_1, k_2)d_\infty(z) - \frac{1}{T}\int_0^T f\big(s, x^*(s, z)\big)ds = 0\,,$$

корни $z = z^*$ которого задают искомые решения $x = x^*$ краевой задачи (172), (177). Заметим, что основные результаты [39] следуют из [47, 52], если положить в последних $k_1 = 0$ и $k_2 = 1$.

По аналогии с двухточечными задачами наиболее естественно рассматривать трехточечную краевую задачу (172) при условии

$$\operatorname{rank}[A, A_1, C] = n.$$

Этот, а также более общий случай $(m+2)$-точечной краевой задачи

$$dx/dt = f(t, x), \quad f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$
$$\sum_{i=0}^{m+1} A_i x(t_i) = d, \tag{178}$$

был рассмотрен в статье [45], если

$$\operatorname{rank}[A_0, A_1, \ldots, A_{m+1}] = n. \tag{179}$$

Как мы уже указывали выше, в [45] установлено, что в случае (179) всегда существует матричнозначная функция $G: [0, T] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\det H \neq 0$, где $H = \sum_{i=0}^{m+1} A_i G(t_i)$. Для многоточечной краевой задачи (178) в [9, 45] была предложена модификация метода, базирующаяся на решении интегрального уравнения

$$x(t, z) = z + \int_c^t f(s, x(s, z))ds + G(t)H^{-1}\Delta(z)\,, \tag{180}$$

где

$$\Delta(z) = d - \sum_{i=0}^{m+1} A_i\left(z + \int_c^t f(s, x(s, z))\,ds\right),$$

а c — произвольное фиксированное число от 0 до T. Было доказано, что G всегда можно подобрать таким образом, что итерационная последовательность, определяемая интегральным уравнением (180), будет сходящейся, как только ее члены будут определены. Следовательно, этот результат позволяет не только расширить класс допустимых краевых условий, но и рассматривать в правой части дифференциального уравнения (178) функции f с произвольными (не обязательно малыми) константами Липшица.

Многоточечные краевые задачи с помощью различных модификаций метода исследовались в [31] для дифференциальных уравнений и в [32] для разностных уравнений.

В последние годы метод применяется также для нахождения и исследования существования решений краевых задач с функциональными краевыми условиями вида

$$\begin{gathered} dx/dt = f(t, x), \quad f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \\ l(x) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{181}$$

где $l : C([0, T], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ — линейный вектор-функционал, возможно, отличный от рассмотренных выше. Сначала в работах [26, 27, 40] изучался случай

$$l(x) = \int_0^T x(s)\,ds, \tag{182}$$

который впоследствии был рассмотрен в [14]. Приведем итерационную схему метода для задачи (181), (182):

$$x_{m+1}(t, z) = z + [Lf(\cdot, x_m(\cdot, z))](t) + \frac{t}{T}\left[\frac{2}{T}\left(d - \int_0^T [Lf(\cdot, x_m(\cdot, z))](s)\,ds\right) - 2z\right],$$

где $m \geq 0$ и $x_0(t, z) \equiv z$. Условия сходимости в [26, 27] таковы:

$$r(K) < 2/3T,$$

$$z \in D_{\beta(z)}, \text{ где } \beta(z) = \frac{T}{2}M + \left|\frac{2}{T}d - 2z\right| + \frac{2}{3}TM.$$

В [14] они ослаблены следующим образом:

$$r(K) < 3/T,$$

$$z \in D_{\beta(z)} \quad \text{для} \quad \beta(z) = \frac{T}{2}M + \left|\frac{2}{T}d - 2z\right|.$$

При этом определяющее уравнение [27] имеет вид

$$\Delta(z) \equiv \frac{1}{T}\left[\frac{2}{T}\left(d - \int_0^T [Lf(\cdot, x_m(\cdot, z))](s)\,ds\right) - 2z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s, z))\,ds = 0,$$

или, согласно [14],

$$z = \frac{1}{T}d - \int_0^T \left(1 - \frac{s}{T}\right) f(s, x^*(s, z))\,ds.$$

Имеет место утверждение.

Теорема 29 [14]. *Пусть выполняются условия:*

НТ.1) *вектор d/T лежит в области D вместе со своей $MT/2$-окрестностью;*

НТ.2) $r(K) < q/T$.

Тогда последовательность итераций, определенных формулой

$$x_{m+1}(t, z) = \frac{1}{T}d - \int_0^T \left(1 - \frac{s}{T}\right) f(s, x_m(s, z))\,ds +$$

$$+ \int_0^t f(s, x_m(s, z))\,ds, \quad m = 0, 1, 2, \ldots; \quad x_0(t, z) = \frac{1}{T}d, \tag{183}$$

равномерно сходится к функции x^*, которая является единственным решением в области D задачи (181), (182).

Более того, при выполнении лишь условия НТ.1 *существует по крайней мере одно решение этой задачи.*

В дальнейшем идеи последнего утверждения, в котором, как видно, нет необходимости в составлении и решении определяющего уравнения, были развиты в [7]. Еще раньше для двухточечных краевых задач подобные результаты были получены в работе [34].

Аналоги итерационного процесса (183) для невырожденных многоточечных краевых задач введены в [9, 45]. В [7] изучается задача вида (181) и предлагается модификация метода, в которой нет необходимости решать дополнительное определяющее уравнение.

Предположим, что правая часть системы дифференциальных уравнений (181) удовлетворяет в компактной области

$$(t, x) \in [0, T] \times D$$

условиям Каратеодори и (покомпонентно) неравенствам

НТ.3) $|f(t, x)| \le M(t); \quad |f(t, x) - f(t, y)| \le Q(t)|x - y|,$

где M — n-вектор, а Q — $n \times n$-матричная функция с суммируемыми компонентами.

Согласно теореме Ф. Рисса [55, с. 216], можно указать такую непрерывную слева матричнозначную функцию G ограниченной вариации, что

$$l(x) = \int_0^T dG(s)\, x(s)\,.$$

Пусть $G(0) = 0$, и матрица $G = G(T)$ невырождена. Заметим, что G несложно найти, учитывая, что

$$Ga = l(a), \qquad a \in \mathbb{R}^n.$$

Введем следующие обозначения:

$$(Bx)(t) = \int_0^t \left|G^{-1} G(u)\right| Q(u)\, x(u)\, du + \int_t^T \left|E - G^{-1} G(u)\right| Q(u)\, x(u)\, du\,,$$

$$Q = \max_{t \in [0, T]} \left\{ \int_0^t \left|G^{-1} G(u)\right| Q(u)\, du + \int_t^T \left|E - G^{-1} G(u)\right| Q(u)\, du \right\},$$

$$\beta = \max_{t \in [0, T]} \left\{ \int_0^t \left|G^{-1} G(u)\right| M(u)\, du + \int_t^T \left|E - G^{-1} G(u)\right| M(u)\, du \right\}, \tag{184}$$

где max всюду берется покомпонентно. Очевидно, что B — непрерывный эндоморфизм $C([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Согласно варианту метода, изложенному в [50], решение задачи (181) ищется среди решений нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна

$$x(t) = \psi(t) + \int_0^T K(t, s)\, f(s, x(s))\, ds,$$

или, в краткой форме,

$$x = \psi + Rx, \tag{185}$$

где ядро и свободные слагаемые подобраны таким образом, чтобы решение (185) удовлетворяло функциональному условию

$$l(x) = d. \tag{186}$$

Предположим, что ядро $K(t, s)$ имеет вид

$$K(t,s) = \begin{cases} E - P(t)\Phi(s) & \text{при} \quad 0 \le s \le t \le T, \\ -P(t)\Phi(s) & \text{при} \quad 0 \le t \le s \le T, \end{cases}$$

где P и Φ — ограниченные суммируемые матричнозначные функции.

Подействовав оператором l на обе части (185) и применив теорему Фубини [54, с. 29], имеем

$$d = \int_0^T dG(u)\psi(u) + \int_0^T dG(u)\int_0^T K(u,s)\, f(s, x(s))\, ds =$$

$$= \int_0^T dG(u)\psi(u) + \int_0^T \left\{ G - G(s) - \left[\int_0^T (dG(t))P(t) \right] \Phi(s) \right\} f(s, x(s))\, ds.$$

Если матрица в квадратных скобках в последнем выражении невырождена, по определению положим

$$\Phi(s) := \left[\int_0^T dG(t)P(t) \right]^{-1} (G - G(s)), \tag{187}$$

$$\psi(t) := z + P(t)\left[\int_0^T (dG(t)Q(t)) \right]^{-1} (d - Gz). \tag{188}$$

Легко проверить, что такой выбор Φ и ψ обеспечит выполнение функционального условия (186) для решений уравнения (185).

Пусть, например, $P(t) = E$. Тогда $\Phi(s) = E - G^{-1}G(s)$, $\psi(t) = \psi = G^{-1}d$, а уравнение (185) принимает вид

$$x(t) = G^{-1}d + \int_0^T \left[G^{-1}G(s) - E \right] f(s, x(s))\, ds + \int_0^t f(s, x(s))\, ds.$$

Очевидно, что решение последнего уравнения будет и решением краевой задачи (181).

Непосредственные вычисления показывают, что

$$|(Rx)(t) - \psi| \le \beta, \qquad |Rx(t) - Ry(t)| \le (B|x - y|)(t)$$

для любых функций x и y из $C([0,T], D)$.

Применение теоремы Шаудера на $C([0,T], S_\beta(G^{-1}d))$ и итерационной теоремы из [50] позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 30 [7]. *Пусть выполнены* НТ.3, (184), (187), (188) *и, кроме того, имеют место следующие условия:*

НТ.4) $G^{-1}d$ *лежит в области* D *вместе со своей* β*-окрестностью;*

НТ.5) *наибольшее положительное собственное значение оператора* B *(равное спектральному радиусу в силу теоремы Крейна–Рутмана* [55]*) меньше единицы.*

Тогда последовательные приближения

$$x_{m+1}(t) = \psi + Rx_m(t), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad x_0(t) = G^{-1}d$$

равномерно сходятся к функции x^**, являющейся единственным решением задачи* (181) *в области* D*. При этом*

$$|x^*(t) - x_m(t)| \le (E - B)^{-1} B^{-1} v(t), \quad m \ge 0,$$

где

$$v(t) = \int_0^t \left| G^{-1} G(u) \right| M(u)\, du + \int_t^T \left| E - G^{-1} G(u) \right| M(u)\, du.$$

Более того, лишь одно условие НТ.4 *обеспечивает существование хотя бы одного решения функциональной краевой задачи* (181).

***Замечание* 19.** Спектральный радиус оператора B не превышает наибольшего положительного собственного значения матрицы Q.

***Следствие* 17.** *В случае двухточечной краевой задачи* (163) $G = A + C$ *и* $G(u)=A$ *при* $u \in (0, T)$. *При этом, если* $\det(A + C) \neq 0$, *и вектор* $z = (A+C)^{-1} d$ *лежит в* D *вместе со своей* $\beta = h\int_0^T M(u)\,du$*-окрестностью, где* $h = \max\left\{\left|(A+C)^{-1}A\right|, \left|(A+C)^{-1}C\right|\right\}$ ($\max$ *берется поэлементно*), *то краевая задача* (163) *имеет не менее одного решения. Если к тому же собственные значения матрицы* $h\int_0^T Q(u)\,du$ *по модулю не превышают единицы, то* (163) *в области* D *имеет единственное решение*

$$x^*(t,z) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,z) = \lim_{m\to\infty}\left[z + \int\limits_0^t (A+C)^{-1} A\, f\big(s, x_{m-1}(s)\big)\,ds - \right.$$

$$\left. - \int\limits_t^T (A+C)^{-1} C\, f\big(s, x_{m-1}(s)\big)\,ds \right], \quad m = 1, 2, \ldots;$$

$$x_0(t,z) = (A+C)^{-1} d.$$

Вернемся снова к рассмотрению функциональной краевой задачи (181), используя представление (164) при $q \equiv 0$.

Заметим, что оператор $x \mapsto l(gx) \in \mathbb{R}^n$ является линейным, если в произведении gx зафиксировать функцию $g(t) := t$ и изменять вектор $x \in \mathbb{R}^n$. Поэтому

$$l(gx) = G_1 x,$$

где G_1 — некоторая $(n\times n)$-мерная матрица. Аналогично, можем записать, что

$$l(\alpha_1 Kx) = G_2 x, \quad l(x) = G_0 x, \quad l(\alpha_1 x) = G_3 x,$$

где G_2, G_0, G_3 — некоторые $(n\times n)$-мерные матрицы.

Поскольку оператор $l : C([0,T]\times\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ — линейный и непрерывный, то можно указать матрицу $K_l \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ такую, что

$$|l(x) - l(y)| \le K_l \max_{[0,T]} |x - y|$$

для произвольных x и y, где для вектора $\omega(t) = \operatorname{col}(\omega_1(t),\ldots,\omega_n(t))$ через $\max_{[0,T]}|\omega|$ обозначен вектор

$$\max_{[0,T]}|\omega| = \operatorname{col}\left(\max_{[0,T]}|\omega_1|,\ldots,\max_{[0,T]}|\omega_n|\right).$$

Поэтому существует такая матрица $G_4 \le K_l$, что

$$|l(x) - l(y)| \le G_4 \max_{[0,T]}|x - y|, \tag{189}$$

если $x(0) = y(0) = x(T) = y(T) = 0$.

Предполагая, что $\det G_1 \neq 0$, выберем в (164)

$$p = G_1^{-1}\left[d - l(z) - l(Lf(\cdot, x(\cdot, z)))\right].$$

Несложно проверить, что значение функционала l на функции x, удовлетворяющей (164), равно d, и поэтому можно строить схему метода согласно (165), где

$$p_m = [\, d - l(z) - l(Lf(\cdot, x_m(\cdot, z)))\,], \qquad q \equiv 0. \tag{190}$$

Выясним условия сходимости процесса (165), (190). Эти итерации будут корректно определены, когда $z \in D_{\beta(z)}$, где

$$\beta(z) = \frac{T}{2}M + T\left|G_1^{-1}(d - G_0 z)\right| + \frac{T}{2}\left|G_1^{-1}\right| G_4 M .$$

Если к тому же

$$r\left(\frac{T}{3}K + \frac{T^2}{2}\left|G_1^{-1}\right| G_4 K\right) < 1, \tag{191}$$

то итерационный процесс (165), (190) будет равномерно сходящимся. Действительно,

$$r_{m+1}(t, z) = |x_{m+1}(s, z) - x_m(s, z)| \le K[\mathcal{A}(|x_m(\cdot, z) - x_{m-1}(\cdot, z)|)](t) +$$
$$+ t\left|G_1^{-1}\right| G_4 K \max_{[0,T]} |\mathcal{A}(|x_m(\cdot, z) - x_{m-1}(\cdot, z)|)|. \tag{192}$$

Предположив, что выполняется неравенство вида

$$r_{m+1}(t, z) \le \overline{p}_m \alpha_1(t) + \overline{q}_m ,$$

с использованием (192) несложно показать, что выполнено условие леммы 4 [3] с матрицей

$$Q = R = \begin{bmatrix} \frac{T}{3}K & K \\ \frac{T^3}{6}\left|G_1^{-1}\right| G_4 K & \frac{T^2}{2}\left|G_1^{-1}\right| G_4 K \end{bmatrix}.$$

Далее, в силу леммы 2 [3], примененной к транспонированной матрице R, получаем условие (191).

Рассмотрим отдельно случай, когда для всех x таких, что $x(0) = x(T) = 0$, функционал l удовлетворяет неравенству

$$|l(x)| \le l(|x|), \tag{193}$$

и, следовательно, $l(x) \ge 0$ для всех $x \ge 0$. Можно показать, что в случае (193) в качестве $\beta(z)$ можно взять вектор

$$\beta(z) = \frac{T}{2}M + T\left|G_1^{-1}(d - G_0 z)\right| + \left|G_1^{-1}\right| G_3 M ,$$

причем условие (191) заменится на соотношение

$$r\left(\frac{T}{3}K + T\left|G_1^{-1}\right| G_2\right) < 1. \tag{194}$$

Рассмотрим частный случай функциональных краевых условий (186), когда

$$l(x) = Ax(0) + Cx(T) + \int_0^T A_1(t)x(t)\,dt . \tag{195}$$

Краевая задача (181), (195) изучалась в [40]. Автором этой работы были получены следующие условия сходимости построенного для этого случая алгоритма метода:

$$z \in D_{\beta(z)}, \quad \beta(z) = \frac{T}{2}M + T\left|G_1^{-1}d\right| + T\left|G^{-1}G_0 z\right| + T\left|G^{-1}\right| G_2 M , \tag{196}$$

$$r\left(\frac{T}{2}K + T\left|G_1^{-1}\right| G_2 K\right) = r\left(\frac{T}{2}K + T\left|G^{-1}\right| G_1\right) < 1, \tag{197}$$

где

$$G = TC + \int_0^T sA(s)\,ds, \qquad G_1 = \int_0^T \alpha_1(s)A_1(s)K\,ds,$$

$$G_0 = A + C + \int_0^T A_1(s)\,ds, \qquad G_2 = \int_0^T \alpha_1(s) A_1(s)\,ds.$$

Условие (193) будет выполнено, если $A_1(s) \geq 0$. Очевидно, условия (196) и (197) более ограничительны, чем полученные нами выше условия (191). Кроме того, заметим, что выкладки в [40], касающиеся задач (195), справедливы лишь при ряде дополнительных ограничений (отсутствующих в упомянутой работе):

1) $l(x) = \operatorname{col}(l_1(x_1), \ldots, l_n(x_n))$ для $x = (x_j)_{j=1}^n$;

2) условие $|l(x) - l(y)| \leq K_1 |x - y|$, где $x, y \in D$, следует заменить на соотношение (189);

3) в определении функционала (195) следует полагать, что $A_1(t) \geq 0$.

1. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 1. – С. 102 – 117.
2. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. II // Там же. – № 2. – С. 225 – 243.
3. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III // Там же. – № 7. – С. 960 – 979.
4. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. IV // Там же. – № 12. – С. 1656 – 1672.
5. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. V // Там же. – 1999. – **51**, № 5. – С. 663 – 673.
6. *Самойленко А. М., Ронто В. А.* О численно-аналитическом методе решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Там же. – 1981. – **33**, № 3. – С. 467–475.
7. *Трофимчук Е. П., Коваленко А. В.* Численно-аналитический метод А. М. Самойленко без определяющего уравнения // Там же. – 1995. – **47**, № 1. – С. 31 – 36.
8. *Ронто А. Н.* О построении итерационной схемы приближенного решения одного класса нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Сб. работ студентов и аспирантов Киевского университета. Ест. науки. – Киев: Киев. ун-т, 1995. – Вып. 2. – С. 17 – 22.
9. *Ронто А. М.* Чисельно-аналітичні методи дослідження багатоточкових крайових задач: Дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 1997. – 158 с.
10. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
11. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
12. *Ронто Н. И., Мартынюк О. М.* Исследование периодических решений счетных систем второго порядка // Укр. мат. журн. – 1991. – **44**, № 1. – С. 83 – 93.
13. *Трофимчук Е. П.* Исследование численно-аналитическим методом с улучшенной сходимостью решений краевой задачи для импульсной системы // Асимптотические методы в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 152 – 158.
14. *Трофимчук Е. П.* Об улучшении оценок сходимости численно-аналитического метода для задачи с интегральными условиями // Аналитические методы исследования нелинейных дифференциальных систем. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 115 – 119.
15. *Трофимчук Е. П.* Итерационные методы исследования дифференциальных систем с особенностями: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1992. – 75 с.
16. *Ронто Н. И.* Метод тригонометрических полиномиальных приближений при исследовании периодических решений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 2. – С. 16 – 19.
17. *Ронто Н. И* Метод полиномиальных приближений при исследовании решений двухточечных краевых задач // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 4. – С. 518 – 522.
18. *Rontó M.* On numerical-analytic method for BVPs with parameters // Publ. Univ. Miskolc. Ser. D, Natur. Sci. Math. – 1996. – **36**, № 2. – P. 125 – 132.
19. *Rontó M.* On some existence results for parametrized boundary value problems // Ibid. – 1997. – **37**, № 2. – P. 95 – 104.
20. *Rontó M.* Numerical-analytic successive approximation method for nonlinear boundary value problems // Nonlinear Analysis TMA. – 1997. – **30**, № 5. – P. 3179 – 3188.
21. *Ронто Н. И.* Численно-аналитический метод в случае вырожденных матриц в краевых условиях // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 673 – 681.
22. *Овездурдыев Х.* Численно-аналитические методы исследования решений двухточечных краевых задач: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1985. – 15 с.
23. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Модификация численно-аналитического метода последовательных приближений для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 8. – С. 1107 – 1116.
24. *Самойленко А. М., Ронто Н. И., Ронто В. А.* Двухточечная краевая задача с параметрами в граничных условиях // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1985. – № 7. – С. 23 – 26.

25. *Самойленко А. М., Ле Лыонг Тай.* Об одном методе исследования краевых задач с нелинейными краевыми условиями // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 7. – С. 951 – 957.
26. *Самойленко А. М., Мартынюк С. В.* Обоснование численно-аналитического метода последовательных приближений для задач с интегральными краевыми условиями // Там же. – 1991. – **42**, № 9. – С. 1231 – 1239.
27. *Самойленко А. М., Ронто Н. И., Мартынюк С. В.* О численно-аналитическом методе для задач с интегральными краевыми условиями // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1991. – № 4. – С. 36 – 47.
28. *Ронто Н. И., Ронто В. А.* Об одном методе исследования краевых задач с параметрами // Краевые задачи математической физики. – Киев: Наук. думка, 1990. – С. 3 – 10.
29. *Kwapisz M.* On boundary value problems for difference equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1991. – **151**. – P. 254 – 270.
30. *Kwapisz M.* Some remarks on an integral equation arising in applications of numerical-analytic method of solving boundary value problems // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 1. – С. 128 – 132.
31. *Kwapisz M.* On modifications of the integral equation of Samoilenko's numerical-analytic method of solving boundary value problems // Math. Nachr. – 1991. – **57**. – P. 125 – 135.
32. *Kwapisz M.* On modifications of Samoilenko's numerical-analytic method of solving boundary value problems for difference equations // Appl. Math. – 1993. – **38**. – P. 133 – 144.
33. *Kwapisz M.* On integral equations arising in numerical-analytic method of solving boundary value problems for differential functional equations // Proc. Int. Conf. Different. Equat., Barcelona, Spain, 26 – 31 August, 1991. – London: World Sci ., 1993. – **2**. – P. 671 – 677.
34. *Augustinowicz A., Kwapisz M.* On a numerical-analytic method of solving boundary value problems for functional differential equation of neutral type // Math. Nachr. – 1990. – **145**. – P. 255 – 269.
35. *Евхута Н. А., Забрейко П. П.* О сходимости метода последовательных приближений А. М. Самойленко отыскания периодических решений // Докл. АН БССР. – 1985. – **29**, № 1. – С. 15 – 18.
36. *Евхута Н. А., Забрейко П. П.* О методе А. М. Самойленко отыскания периодических решений квазилинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 2. – С. 162 – 168.
37. *Evhuta N. A., Zabreiko P. P.* The Poincaré method and Samoilenko method for the construction of periodic solutions to ordinary differential equations // Math. Nachr. – 1991. – **153**. – P. 85 – 99.
38. *Ронто Н. И., Король И. И.* Исследование и решение краевых задач с параметрами численно-аналитическим методом // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 8. – С. 1031 – 1043.
39. *Ронто Н. И., Савина Т. В.* Численно-аналитический метод для трехточечных краевых задач // Там же. – № 4. – С. 393 – 403.
40. *Мартынюк С. В.* Исследование решений краевых задач для систем нелинейных дифференциальных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1992. – 16 с.
41. *Савіна Т. В.* Дослідження розв'язків багатоточкових крайових задач чисельно-аналітичним методом: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 1993. – 114 с.
42. *Шовкопляс В. Н.* Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1979. – 15 с.
43. *Перестюк Н. А., Ронто А. Н.* Об одном методе построения последовательных приближений для исследования многоточечных краевых задач // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1243 – 1253.
44. *Perestyuk M., Ronto A.* Numerical-analytic method for the equation of non-linear oscillator // Publ. Univ. Miskolc. Ser. D, Natur. Sci. Math. – 1996. – **36**, № 2. – P. 115 – 124.
45. *Ronto A.* On the boundary-value problems with linear multipoint restrictions // Ibid. – 1995. – **36**, № 1. – P. 81 – 89.
46. *Ronto A.* On application of the numerical-analytic method to linear systems // Ibid. – 1997. – **37**. – P. 85 – 94.
47. *Rontó M., Tégen R. M.* Successive approximation method for investigating three-point boundary value problems with singular matrices // Math. Pannonica. – 1994.– **5/1**. – P. 15 – 28.
48. *Rontó M., Trofimchuk S. I.* Numerical-analytic method for non-linear differential equations. – Miskolc, 1996. – 19 p. – (Preprint / Univ. Miskolc, Inst. Math.; № 96-01).
49. *Rontó M., Ronto A., Trofimchuk S. I.* Numerical-analytic method for differential and difference equations in partially ordered Banach spaces, and some applications. – Miskolc, 1996. – 34 p. – (Preprint / Univ. Miskolc, Inst. Math.; № 96-02).
50. *Трофимчук Е. П.* Интегральные операторы метода последовательных периодических приближений // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1990. – Вып. 13 (47). – С. 31 – 36.
51. *Мартинюк О. М.* Дослідження розв'язків крайових задач для зліченних систем нелінійних диференціальних рівнянь: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 1993. – 15 с.
52. *Tégen R. M.* On existence of solution of some three-point BVPs // Publ. Univ. Miskolc. Ser. D, Natur. Sci. Math. – 1995. – **36**, № 1. – P. 101 – 109.
53. *Gupta Ch., Trofimchuk S. I.* A sharper condition for the solvability of a three-point second order boundary value problem // J. Math. Anal. and Appl. – 1997. – **205**. – P. 586 – 597.
54. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.
55. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, вып. 1 (23). – С. 3 – 95.

Получено 7.04.99