УДК 517.9

Н. Ю. Галушко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОДИН ВАРІАНТ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ, ЩО БАЗУЄТЬСЯ НА МЕТОДІ ХОРД

The application of a variant of projective-iterative method to nonlinear integral equations is considered. Sufficient conditions of the convergence of this method are established.

Розглядається питання застосування одного варіанту проекційно-ітеративного методу до нелінійних інтегральних рівнянь. З'ясовуються достатні умови збіжності методу.

Теорія проекційно-ітеративних методів розроблена в роботах [1, 2]. Узагальнення методу хорд для наближеного розв'язку нелінійних рівнянь проведене в роботах [3, 4]. Цікавим виявилось питання поєднання проекційно-ітеративного методу та методу хорд, розглянуте, зокрема, в [5]. У цій роботі розглядається застосування синтезованого методу до нелінійних інтегральних рівнянь.

Розглянемо рівняння

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt + \int_a^b G(x,t)\,F[t, y(t)]\,dt, \tag{1}$$

в якому:

1) функція $f \in L_p[a, b]$, оператори

$$(Ky)(x) = \int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt, \qquad (Gy)(x) = \int_a^b G(x,t)\,y(t)\,dt \tag{2}$$

відображають відповідно простори $L_p \to L_p$ та $L_p \to L_q$ і є компактними;

2) функція $F(t, u)$, що визначена при $t \in [a, b]$ та $u \in (-\infty, +\infty)$, задовольняє умови Каратеодорі та виконується нерівність

$$|F(t,u)| \le \alpha(t) + c|u|^{p/q}, \qquad p + q = pq, \tag{3}$$

де $\alpha \in L_p[a, b]$, $c = \text{const}$. Для $F(t, u)$ по другому аргументу існує поділена різниця $F(t, v) - F(t, u) = F(t, v, u)(v - u)$.

Суть методу. Послідовні наближення до шуканого розв'язку будемо визначати таким чином:

$$y_{k+1}(x) = w_{k+1}(x) + u_{k+1}(x), \tag{4}$$

$$u_{k+1}(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\,y_k(t)\,dt + \int_a^b G(x,t)\,F[t, y_k(t)]\,dt, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

де $w_{k+1}(x)$ — поправка з деякого підпростору розмірності n простору $L_p[a, b]$, яку визначатимемо з умови

$$\int_a^b P_n(x,t)\left\{ f(t) + \int_a^b K(t,\xi)\,y_{k+1}(\xi)\,d\xi + \int_a^b G(t,\xi)\,F[\xi, y_k(\xi)]\,d\xi \,+ \right.$$
$$\left. + \int_a^b G(t,\xi)\,F[\xi, y_k(\xi), y_{k-1}(\xi)](y_{k+1}(\xi) - y_k(\xi))\,d\xi - y_{k+1}(t) \right\} dt = 0, \tag{6}$$

$\{y_0, y_{-1}\} \subset L_p[a, b]$ — задані початкові наближення, оператор $(P_n v(x)) = \int_a^b P_n(x,t)\,v(t)\,d(t)$ проектує простір $L_p[a, b]$ на його підпростір розмірності n.

Для визначення функції $w_k(x)$, згідно з формулами (4)–(6), одержимо інтегральне рівняння

$$w_{k+1}(x) - \int_a^b K_n(x,t)w_{k+1}(t)\,dt - \int_a^b G_n(x,t)F[t, y_k(t), y_{k-1}(t)]w_{k+1}(t)\,dt =$$
$$= \int_a^b K_n(x,t)\varepsilon_{k+1}(t)\,dt + \int_a^b G_n(x,t)F[t, y_k(t), y_{k-1}(t)]\varepsilon_{k+1}(t)\,dt, \qquad (7)$$

але з виродженими ядрами, де

$$K_n(x,t) = \int_a^b P_n(x,\xi)K(\xi,t)\,d\xi, \qquad G_n(x,t) = \int_a^b P_n(x,\xi)G(\xi,t)\,d\xi,$$
$$\varepsilon_{k+1}(x) = u_{k+1}(x) - y_k(x). \qquad (8)$$

Запропонований метод при $P_n = 1$ переходить у метод хорд [3], а при $P_n = 0$ — у звичайний метод послідовних наближень.

Умови збіжності. Для сформульованого методу з'ясуємо умови збіжності. Відмітимо, що при виконанні умов 1, 2 оператор

$$(\mathbf{T}y)(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)\,dt + \int_a^b G(x,t)F[t, y(t)]\,dt$$

відображає простір $L_p[a,b]$ в себе і є цілком неперервним.

Алгоритм (4)–(6), враховуючи позначення (8), зводиться до розв'язування такого рівняння:

$$y_{k+1}(t) = f(x) + \int_a^b K_n(x,t)y_{k+1}(t)\,dt + \int_a^b H_n(x,t)y_k(t)\,dt +$$
$$+ \int_a^b G(x,t)F[t, y_k(t)]\,dt + \int_a^b G_n(x,t)F[t, y_k(t), y_{k-1}(t)](y_{k+1}(t) - y_k(t))\,dt, \qquad (9)$$

де $H_n(x,t) = K(x,t) - K_n(x,t)$.

Нехай константи ν_n, μ_n такі, що виконуються нерівності

$$\left\{\int_a^b \left|\int_a^b (G(x,t) - G_n(x,t))y(t)\,dt\right|^q dx\right\}^{1/q} \le \nu_n \left\{\int_a^b |y(t)|^p\,dx\right\}^{1/p},$$
$$\left\{\int_a^b \left|\int_a^b H_n(x,t)y(t)\,dt\right|^p dx\right\}^{1/p} \le \mu_n \left\{\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}. \qquad (10)$$

Справедлива така теорема.

Теорема. *Нехай виконані умови:*

1) *функції* $\{y_0, y_{-1}\} \subset L_p[a,b]$ *такі, що*

$$\left(\int_a^b |\varepsilon_0(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \eta, \qquad \left(\int_a^b |y_0(x) - y_{-1}(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \delta, \qquad (11)$$

де

$$\varepsilon_0(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y_0(t)\,dt + \int_a^b G(x,t)F[t, y_0(t)]\,dt - y_0(x);$$

2) *для ядра* $M_n(x,t) = K_n(x,t) + G_n(x,t)F[t, y_0(t), y_{-1}(t)]$ *існує резольвентне ядро* $R_0(x,t)$ *і відома оцінка*

$$\left\{\int_a^b \left|\int_a^b R_0(x,t)y(t)\,dt\right|^p dx\right\}^{1/p} \le B_0\left\{\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}; \qquad (12)$$

3) *в кулі* $S := \{y \in L_p[a,b] \,|\, \|y - y_0\| \le r\}$ *справедливі нерівності*

$$\|F(t,\bar{y}) - F(t,\tilde{y})\| \le d\|\bar{y} - \tilde{y}\|,$$

$$\left\{\int_a^b \left|\int_a^b G_n(x,t)\{F(t,u(t),v(t)) - F(t,v(t),z(t))\}y(t)\,dt\right|^p dx\right\}^{1/p} \le$$

$$\le l_n\left\{\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right\}^{1/p} \qquad (13)$$

для будь-яких фіксованих $\{u, v, z\} \subset S$.

Тоді якщо $B\left(2\sqrt{l_n\eta} + l_n\delta + q_n\right) \le 1$, *де* $B = 1 + B_0$, $q_n = \mu_n + \nu_n d$, *та* $\max\{t_*, \delta\} \le r \le t^*$, *то рівняння* (1) *має в кулі* $S_1 := \{y \in L_p[a,b] \,|\, \|y - y_0\| \le \le \max\{t_*, \delta\}\}$ *розв'язок* $y^*(x)$, *який є єдиним у кулі* S. *Послідовні наближення* $\{y_k(x)\}$, *що визначаються формулами* (4) – (6), *лежать у кулі* S_1 *та збігаються до цього розв'язку. При цьому справедливі оцінки*

$$\|y_{k+1} - y_k\| \le t_{k+1} - t_k, \qquad (14)$$

$$\|y^* - y_k\| \le t_* - t_k. \qquad (15)$$

Послідовність $\{t_k\}$ *з* (14), (15) *будується за формулою*

$$t_{k+1} = t_k - \frac{l_nBt_k^2 - (1 - B(l_n\delta + q_n))t_k + B\eta}{l_nB(t_k + t_{k-1} + \delta) - 1}, \qquad t_{-1} < t_0 = 0, \qquad (16)$$

а t_*, t^* — *відповідно найменший та найбільший додатні корені мажорантного рівняння* $l_nBt^2 - (1 - B(l_n\delta + q_n))t + B\eta = 0$.

Доведення. Для зручності запису введемо такі позначення:

$$(K_ny)(x) = \int_a^b K_n(x,t)y(t)\,dt, \quad (H_ny)(x) = \int_a^b H_n(x,t)y(t)\,dt,$$

$$(Fy)(x) = \int_a^b G(x,t)F[t, y(t)]\,dt,$$

$$(L_ny)(x) = \int_a^b \{G(x,t) - G_n(x,t)\}F[t, y(t)]\,dt, \qquad (17)$$

$$[F_n(u,v)y](x) = \int_a^b G_n(x,t)F[t, u(t), v(t)]y(t)\,dt.$$

На основі нерівностей (10) та умови (13) маємо оцінки

$$\|H_n y\| \le \mu_n \|y\|, \quad \|L_n y - L_n z\| \le \|G - G_n\| \, \|Fy - Fz\| \le \nu_n d \|y - z\|,$$
$$\|[F_n(u, v) - F_n(v, z)]y\| \le l_n \|y\|. \tag{18}$$

Рівняння (9), враховуючи позначення (17), набуде вигляду

$$y_{k+1} = f + K_n y_{k+1} + H_n y_k + F y_k + F_n(y_k, y_{k-1})(y_{k+1} - y_k). \tag{19}$$

Аналогічно [4] можна показати, що послідовність (16) є монотонно зростаючою та збіжною до t_*.

За допомогою індукції покажемо, що послідовні наближення (19) належать кулі S_1. Справді, з (19) отримаємо

$$y_1 - y_0 = K_n(y_1 - y_0) + F_n(y_0, y_1)(y_1 - y_0) + f + Ky_0 + Fy_0 - y_0,$$

звідки

$$y_1 - y_0 = R_n(y_0, y_{-1})(f + Ky_0 + Fy_0 - y_0), \tag{20}$$

де $R_n(y_0, y_{-1})$ — оператор, обернений до оператора

$$\Phi_n(y_0, y_{-1}) := I - K_n - F_n(y_0, y_{-1}), \tag{21}$$

який існує на основі умови (12), причому $\|R_n(y_0, y_{-1})\| \le B$. З (16), (20) та умови 1 теореми одержуємо

$$\|y_1 - y_0\| \le \|R_n(y_0, y_{-1})\| \, \|f + Ky_0 + Fy_0 - y_0\| \le B\eta \le t_1 - t_0 \le t_*. \tag{22}$$

Припустимо, що перші k наближень належать кулі S_1 та для них виконана нерівність (14). Покажемо це для $(k+1)$-го наближення.

Спочатку встановимо, що для оператора $\Phi_n(y_k, y_{k-1}) = I - K_n - F_n(y_k, y_{k-1})$ існує обернений

$$R_n(y_k, y_{k-1}) = [I - K_n - F_n(y_k, y_{k-1})]^{-1}. \tag{23}$$

Розглянемо оператор

$$U_n(y_k, y_{k-1}) = R_n(y_0, y_{-1})[\Phi_n(y_0, y_{-1}) - \Phi_n(y_k, y_{k-1})]. \tag{24}$$

Для його норми, використовуючи (10), (12), умову 3 теореми та позначення (21), маємо

$$\begin{aligned}\|U_n(y_k, y_{k-1})\| &\le \|R_n(y_0, y_{-1})\| \, \|\Phi_n(y_0, y_{-1}) - \Phi_n(y_k, y_{k-1})\| \le \\ &\le \|R_n(y_0, y_{-1})\| \, \|F_n(y_k, y_{k-1}) - F_n(y_0, y_{-1})\| \le \\ &\le \|R_n(y_0, y_{-1})\| \{\|F_n(y_k, y_{k-1}) - F_n(y_{k-1}, y_0)\| + \\ &+ \|F_n(y_{k-1}, y_0) - F_n(y_0, y_{-1})\|\} \le 2B l_n < 1,\end{aligned}$$

тому, за теоремою Банаха, оператор $I - U_n(y_k, y_{k-1})$ має обернений та справедлива оцінка $\|[I - U_n(y_k, y_{k-1})]^{-1}\| \le 1/(1 - 2B l_n)$.

З (21), (24), зробивши певні перетворення, отримаємо

$$[I - U_n(y_k, y_{k-1})]^{-1} R_n(y_0, y_{-1}) = R_n(y_k, y_{k-1})$$

та

$$\|R_n(y_k, y_{k-1})\| \le \|[I - U_n(y_k, y_{k-1})]^{-1}\| \, \|R_n(y_0, y_{-1})\| \le B/(1 - 2B l_n). \tag{25}$$

Тепер покажемо справедливість нерівності (14). З рівняння (19) маємо

$$y_{k+1} - y_k = K_n(y_{k+1} - y_k) + H_n(y_k - y_{k-1}) + F y_k - F y_{k-1} +$$
$$+ F_n(y_k, y_{k-1})(y_{k+1} - y_k) - F_n(y_{k-1}, y_{k-2})(y_k - y_{k-1}).$$

Використовуючи (17), (23), отримуємо

$$y_{k+1} - y_k = R_n(y_k, y_{k-1})[H_n(y_k - y_{k-1}) +$$
$$+ F y_k - F y_{k-1} - F_n(y_{k-1}, y_{k-2})(y_k - y_{k-1})] =$$
$$= R_n(y_k, y_{k-1})[H_n(y_k - y_{k-1}) + L_n y_k - L_n y_{k-1} +$$
$$+ F_n(y_k, y_{k-1})(y_k - y_{k-1}) - F_n(y_{k-1}, y_{k-2})(y_k - y_{k-1})].$$

Звідси на основі (14), (18), (25) маємо

$$\|y_{k+1} - y_k\| = \|R_n(y_k, y_{k-1})\| [\|H_n(y_k - y_{k-1})\| +$$
$$+ \|F_n(y_k, y_{k-1}) - F_n(y_{k-1}, y_{k-2})\| \|y_k - y_{k-1}\| + \|L_n y_k - L_n y_{k-1}\|] \le$$
$$\le \frac{B}{1 - 2Bl_n}[\mu_n + l_n + \nu_n d](t_k - t_{k-1}) \le t_{k+1} - t_k,$$

звідки випливає, що послідовність $\{t_k\}$ є мажорантною для $\{y_k\}$.

Залишилось показати, що послідовність $\{y_k\}$ належить кулі S_1. Справді,

$$\|y_{k+1} - y_0\| \le \|y_{k+1} - y_k\| + \|y_k - y_{k-1}\| + \ldots + \|y_1 - y_0\| \le$$
$$\le t_{k+1} - t_k + t_k - t_{k-1} + \ldots + t_1 - t_0 = t_{k+1} - t_0 = t_{k+1} \le t_*.$$

Тому існує елемент $y^* \in S_1$ такий, що $y^* \to y_k$ при $k \to \infty$. При переході до границі в (19) отримаємо, що y^* є розв'язком (1).

Нарешті, покажемо справедливість нерівності (15): для $p \in \mathbf{R}$ маємо

$$\|y_{k+p} - y_k\| \le \|y_{k+p} - y_{k+p-1}\| + \ldots + \|y_{k+1} - y_k\| \le$$
$$\le t_{k+p} - t_{k+p-1} + \ldots + t_{k+1} - t_k = t_{k+p} - t_k.$$

При переході до границі при $p \to +\infty$ отримаємо (15).

Методика доведення єдиності розв'язку аналогічна [3].

1. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 264 с.
2. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.
3. *Сергеев А. С.* О методе хорд // Сиб. мат. журн. – 1961. – **2**, № 2. – С. 282 – 289.
4. *Ульм С. Ю.* Принцип мажорант и метод хорд // Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1964. – № 3. – С. 217 – 227.
5. *Кіндибалюк А. Ю.* Синтез проекційно-ітеративного методу та методу хорд // Допов. НАН України. – 1995. – № 3. – С. 45 – 49.

Одержано 08.08.97,
після доопрацювання — 27.02.98