УДК 517. 925.51

И. Е. Витриченко (Одес. ун-т)

О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОЛИУСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕАВТОНОМНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

For quasilinear differential systems with boundary matrix of coefficients of systems of the first approximation, we obtain sufficient conditions of polystability generalizing a notion of exponential polystability.

Отримано достатні умови функціональної полістійкості, що узагальнює поняття експоненціальної полістійкості, для квазілінійних диференціальних систем з граничною матрицею коефіцієнтів системи першого наближення.

Введение. Исследование[1 – 3] критических случаев устойчивости дифференциальных систем (д. с.) с медленно изменяющимися коэффициентами позволяет ввести понятие функциональной полиустойчивости, обобщающее понятие экспоненциальной полиустойчивости [4].

Результаты по функциональной Y_{n_s}-устойчивости и полиустойчивости получены с помощью применения обобщенных „срезающих" [1], линейных „замороженных" [5], преобразований К. П. Персидского [6] и метода О. Перрона [7].

1. Постановка задачи. Исследуется д. с. возмущенного движения

$$Y' = F(t, Y), \tag{1}$$

где $Y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_n)$, $t \in \Delta \equiv [t_0, \omega[$, $t_0 \in R$, $R \equiv]-\infty, +\infty[$, $\omega \le +\infty$, $F : \Delta \times S(Y, r) \equiv \{Y, Y^{\mathrm{T}} : \|Y\| \le r, r \in R_+\}$, $R_+ \equiv]0, +\infty[$, C^n — n-мерное комплексное евклидово пространство, $F \equiv \pi P Y + G(t, Y)$, $\pi : \Delta \Rightarrow R_+$, $P = \|p_{sk}\|$, $p_{sk} \in C_\Delta^{(h)}$, $p_{sk} = p_{sk}^0 + o_{sk}(1)$, $p_{sk}^{(l)} = o_{skl}(1)$, $t \uparrow \omega$, $p_{sk}^0 \in C$, C — множество комплексных чисел, $s, k = \overline{1, n}$, $l \in \{\overline{1, h}\}$, $h \in N$, $N \equiv \{1, 2, \ldots\}$; уравнение $\det(P_0 - \lambda E_n) = 0$, $P_0 = \|p_{sk}^0\|$, $s, k = \overline{1, n}$, имеет n_0 корней λ_0 с условием $\operatorname{Re}\lambda_0 = 0$, а остальные его корни λ^* имеют свойство $\operatorname{Re}\lambda^* \ne 0$; $\|G\| \le L\|Y\|^{1+\alpha}$, $L : \Delta \Rightarrow \{0\} \cup R_+$, $L \in C_\Delta$, $\alpha \in R_+$.

Пусть состояние равновесия $Y = \overline{0}$, $\overline{0} \equiv (0, \ldots, 0)$, является единственным для д. с. (1) при $Y \in S(Y, r)$.

Ниже приняты следующие обозначения и определения:

$X = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n)$, $X \equiv \operatorname{col}(X_{n_1}, X_{n-n_1}) \equiv \operatorname{col}(X_{n_1}, \ldots, X_{n_{k_0}})$, $X_k = \operatorname{col}(x_{1,k}, \ldots, x_{k,k})$, X_k — субвектор вектора X, $\|X_k\| \equiv \left(\sum_{s=1}^k |x_{s,k}|^2\right)^{1/2}$, $\|X\| \equiv \left(\sum_{s=1}^n |x_s|^2\right)^{1/2} \equiv \left(\sum_{k=1}^n \|X_{n_k}\|^2\right)^{1/2}$; E_k — единичная матрица размера $k \times k$, $P_{s,k}$ — матрица размера $s \times k$, $P_{s,s} \equiv P_s$; $\|A\| \equiv \left(\sum_{s,k=1}^n |a_{s,k}|^2\right)^{1/2}$, $A = \|a_{sk}\|$, $s, k = \overline{1, n}$; $L_\Delta \equiv \left\{f : \Delta \Rightarrow C, \int^\omega |f| dt < +\infty\right\}$; $R_- \equiv]-\infty, 0[$.

Определение 1. *Состояние равновесия* $Y \equiv \overline{0}$ *д. с.* (1) *называется функционально* Y_{n_s}*-устойчивым (в малом), если существует* $f_{n_s} : \Delta \Rightarrow R_+$, $f_{n_s}(t) =$

$= o(1)$, $t \uparrow \omega$, *и для любого сколь угодно малого* $\varepsilon \in R_+$ *существуют* $\delta_\varepsilon \in \in]0, \varepsilon[$, $T_\varepsilon \in \Delta$ *такие, что для субвектора* $Y_{n_s} = Y_{n_s}(t; T_\varepsilon, Y_0)$ *произвольного решения* $Y = Y(t; T_\varepsilon, Y_0)$, $Y_0 \equiv Y(T_\varepsilon; T_\varepsilon, Y_0)$, *д. с.* (1) *выполняется неравенство*

$$\left\| Y_{n_s}(t; T_\varepsilon, Y_0) \right\| \le \varepsilon f_{n_s}(t) \tag{2}$$

для всех $t \in [T_\varepsilon, \omega[$, *если* $\| Y_0 \| \le \delta_\varepsilon$ *и* $\| Y \|^2 - \| Y_{n_s} \|^2 < +\infty$, $1 \le s \le k_0$.

Определение 2. *Состояние равновесия* $Y \equiv \overline{0}$ *д. с.* (1) *называется функционально полиустойчивым (в малом), если существуют* $r_s \in R_+$, $s = \overline{1, k_0}$, f: $\Delta \Rightarrow R_+$, $f(t) = o(1)$, $t \uparrow \omega$ *и для любого сколь угодно малого* $\varepsilon \in R_+$ *существуют* $\delta_\varepsilon \in \in]0, \varepsilon[$, $T_\varepsilon \in \Delta$ *такие, что для субвекторов* $Y_{n_s} = Y_{n_s}(t; T_\varepsilon, Y_0)$ *произвольного решения* $Y = Y(t; T_\varepsilon, Y_0)$, $Y_0 \equiv Y(T_\varepsilon; T_\varepsilon, Y_0)$, *выполняется неравенство*

$$\sum_{s=1}^{k_0} \left\| Y_{n_s}(t; T_\varepsilon, Y_0) \right\|^{2r_s} \le \varepsilon f(t) \tag{3}$$

для всех $t \in [T_\varepsilon, \omega[$, *если* $\| Y_0 \| \le \delta_\varepsilon$.

***Замечание* 1.** В частном случае, когда $T_\varepsilon \equiv t_0$, $f(t) \equiv \exp[-\lambda(t - t_0)]$, $\lambda \in R_+$, определения 1, 2 совпадают с определениями экспоненциальной полиустойчивости [4].

2. Основные результаты. Рассмотрим сначала самый простой случай, когда для д. с. (1) $h = 2$, и задача типа (А), рассмотренная в [1], ранга n_0 решена полностью без редукции ее к задачам типа (А) рангов, меньших n_0. Тогда при выполнении условий

$$\pi^{-1}\sigma'\sigma^{-2} = \sigma_0 + o(1), \quad \| P' \| \pi^{-1}\sigma^{-2} = o(1), \quad t \uparrow \omega, \ \sigma_0 \in \{0\} \cup R_-, \tag{4}$$

$$\pi' \| P - P_0 \| \pi^{-2} = O(1), \quad \| P'' \| \| P - P_0 \| \pi^{-2}\sigma^{-2} = o(1), \quad t \uparrow \omega, \tag{5}$$

где $\sigma : \Delta \Rightarrow R_+$ — известная функция, $\sigma = o(1)$, $t \uparrow \omega$, можно построить преобразование [1]

$$Y = R(t)X,$$

где $\det R(t) = d_0[1 + r_0(t)]\sigma^{n_0(n_0-1)/2}$, $d_0 \in C \setminus \{0\}$, d_0 — известная константа, $r_0 : \Delta \Rightarrow C$ — известная функция, $r_0 = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $\| R(t) \| \le M_0$, $M_0 \in R_+$, для всех $t \in D$, приводящее д. с. (1) к д. с. вида

$$\begin{aligned} X'_{n_0} &= \pi\sigma \operatorname{diag}[\mu_1 E_{n_1} + \Omega_{n_1}(t), \ldots, \mu_{s_0} E_{ns_0} + \Omega_{n_{s_0}}(t)] X_{n_0} + \\ &\quad + P_{n_0, n-n_0}(t) X_{n-n_0} + G_{n_0}(t, X), \sum_{s=1}^{s_0} n_s = n_0, \\ X'_{n-n_0} &= \pi \operatorname{diag}[\lambda_1^* E_{m_1} + \Omega_{m_1}(t), \ldots, \lambda_{p_0}^* E_{m_{p_0}} + \Omega_{m_{p_0}}(t)] X_{n-n_0} + \\ &\quad + P^*_{n-n_0}(t) X_{n_0} + G^*_{n-n_0}(t, X), \quad \sum_{s=1}^{p_0} m_s = n - n_0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\mu_s \in C$, $s = \overline{1, s_0}$, $\operatorname{Re}\lambda_k^* \ne 0$, $k = \overline{1, p_0}$, $\| \Omega_{n_s} \|$, $\| \Omega_{m_k} \| \le \Omega_0$, причем константа

$$\Omega_0 \equiv \max_{1\le s\le s_0,\, 1\le k\le p_0} \left\{ \sup_{t\in[T,\,\omega[} \left\| \Omega_{n_s}(t) \right\|, \sup_{t\in[T,\,\omega[} \left\| \Omega_{m_k}(t) \right\| \right\}$$

сколь угодно мала, если T достаточно близко к ω; $\left\| P_{n_0,\, n-n_0}(t) \right\| = O(\sigma^{1-n_0} H)$, $\left\| P^*_{n-n_0,\, n_0}(t) \right\| \equiv O(H)$, $t \uparrow \omega$, $H \equiv \|P'\| + \pi \|P - P_0\|^2$; $\left\| G_{n_0}(t, X) \right\|$, $\left\| G^*_{n-n_0}(t, X) \right\| \le L^* \|X\|^{1+\alpha}$, $L^* \equiv M_0^* |1 + r_0|^{-1} \sigma^{-n_0(n_0-1)/2} L$, $M_0^* \in R_+$.

***Замечание* 2.** Величины σ, μ_s, $s = \overline{1,\, s_0}$, определяются в процессе приведения д. с. (1) к д. с. (6).

Теорема 1. *Пусть д. с. (1) такова, что*:

1) $h = 2$, *и задача типа* (A) [1] *ранга* n_0 *решена полностью без редукции ее к задачам типа* (A) *рангов, меньших* n_0;

2) *выполнены условия* (4), (5) *и* $|r_0| < 1$, $t \in \Delta$;

3) $\int^{\omega} \pi\sigma\, dt = +\infty \left(\int^{\omega} \pi\, dt = +\infty \right)$;

4) *существует* $g : \Delta \Rightarrow R_+$, $g \in C^{(1)}_{\Delta}$ *такая, что* $g = o(1)$, $g'(g\sigma\pi)^{-1} = g_0 + o(1)$, $t \uparrow \omega$, $(g'(g\pi)^{-1} = g_0 + o(1)$, $t \uparrow \omega$), $\sup_{t\in\Delta} g = G_0 < +\infty$, *и* $\operatorname{Re}\mu_s - g_0 \equiv \mu_s^* \in R_-$ $(\operatorname{Re}\lambda_k^* - g_0 \equiv \lambda_k^{**} \in R_-)$, $s = \overline{1,\, s_0}$ $(k = \overline{1,\, p_0})$;

5)
$$\exp\left[\left(\mu_s^* + \omega_0\right) \int_T^t \pi\sigma\, d\tau \right] \int_T^t \left[\sigma^{1-n_0} H + \sigma^{-\frac{1}{2} n_0 (n_0 - 1)} L \right] g^{-1} \times$$
$$\times \exp\left[-\left(\mu_s^* + \omega_0\right) \int_T^{\tau} \pi\sigma\, dt \right] d\tau = o(1),\ t \uparrow \omega$$
$$\left(\exp\left[\left(\lambda_k^{**} + \omega_0\right) \int_T^t \pi\, d\tau \right] \int_T^t (H + L) g^{-1} \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left[-\left(\lambda_k^{**} + \omega_0\right) \int_T^{\tau} \pi\, dt \right] d\tau = o(1),\ t \uparrow \omega \right),$$

$T \le t$, ω_0 — *достаточно малая положительная постоянная*, $s = \overline{1,\, s_0}$ $(k = \overline{1,\, p_0})$.

Тогда ее состояние равновесия $Y \equiv \overline{0}$ *функционально* Y_{n_0} (Y_{n-n_0})*-устойчиво в малом.*

Доказательство. Докажем функциональную Y_{n_0}-устойчивость (функциональная Y_{n-n_0}-устойчивость доказывается аналогично). Применим к д. с. (1) преобразование

$$Y = gR(t)X, \qquad X \in S\,[X,\, r\,(M_0 G_0)^{-1}]. \tag{7}$$

Покажем, что новая д. с. устойчива [8] относительно части (X_{n_0}) своих переменных. Тогда д. с. относительно X_{n_0} (X_{n_0}-д. с.) (при выполнении условий теоремы 1 и $\left\| X_{n-n_0} \right\| < +\infty$) имеет центр притяжения решений $X_{n_0} = \overline{0}$ при $t \uparrow \omega$ [9]. Это означает, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon \in R_+$ существуют $\delta_\varepsilon \in \,]\,0,\, \min\{\varepsilon,\, \varepsilon\,(G_0 M_0)^{-1}\}\,[$, $T_\varepsilon \in \Delta$ такие, что любое решение $X_{n_0} = X_{n_0}(t;\, T_\varepsilon,\, X_0)$, $X_0 = X_{n_0}(T_\varepsilon;\, T_\varepsilon,\, X_0)$, X_{n_0} — д. с. с начальным условием

$$\|X_0\| \le \delta_\varepsilon (G_0 M_0)^{-1} \tag{8}$$

удовлетворяет неравенству

$$\left\|X_{n_0}(t;\ T_\varepsilon,\ X_0)\right\| < M_0^{-1}\varepsilon, \quad t \in [T_\varepsilon, \omega[. \tag{9}$$

Используя (7), оценим для всех $t \in [T_\varepsilon, \omega[$ субвектор $Y_{n_0} = Y_{n_0}(t;\ T_\varepsilon,\ Y_0)$ произвольного решения д. с. (1)

$$Y = Y(t; T_\varepsilon, Y_0) \equiv gR(t)X(t; T_\varepsilon, X_0). \tag{10}$$

Пусть $t = T_\varepsilon$. Тогда из (10) с учетом (8) получаем

$$\|Y_0\| \equiv \|Y(T_\varepsilon;\ T_\varepsilon,\ Y_0)\| \le g(T_\varepsilon)\|R(T_\varepsilon)\|\,\|X_0\| \le (G_0M_0)(G_0M_0)^{-1}\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon.$$

Пусть теперь $t \in]T_\varepsilon, \omega[$. Тогда из (7) и (9) следует оценка

$$\left\|Y_{n_0}(t;\ T_\varepsilon,\ X_0)\right\| < \varepsilon f_{n_0}(t),$$

где $f_{n_0}(t) \equiv |g(t)|$. Кроме того, из (7) и $\left\|X_{n-n_0}\right\| < +\infty$ вытекает неравенство $\left\|Y_{n-n_0}\right\| \le G_0M_0\left\|X_{n-n_0}\right\| < +\infty$. Тем самым определение 1 удовлетворено.

***Следствие* 1.** *Если для д. с.* (1) *выполнены условия* $1-4$ *теоремы* 1 *и*

$$\left(\sigma^{n_0}\pi g\right)^{-1}[\|P'\| + \pi\|P-P_0\|^2 + \sigma^{-1-\frac{1}{2}n_0(n_0-3)}L] = o(1), \quad t\uparrow\omega,$$

или

$$\left(\sigma^{n_0-1}g\right)^{-1}\left[\|P'\| + \pi\|P-P_0\|^2 + \sigma^{-1-\frac{1}{2}n_0(n_0-3)}L\right] \in L_\Delta$$

$$\left((\pi g)^{-1}\left[\|P'\| + \pi\|P-P_0\|^2 + \sigma^{-\frac{1}{2}n_0(n_0-1)}L\right] = o(1), \quad t\uparrow\omega,\right.$$

или

$$\left. g^{-1}\left[\|P'\| + \pi\|P-P_0\|^2 + \sigma^{-\frac{1}{2}n_0(n_0-1)}L\right] \in L_\Delta\right),$$

то ее состояние равновесия $Y \equiv \overline{0}$ *функционально* $Y_{n_0}(Y_{n-n_0})$*-устойчиво в малом.*

Доказательство. К бесконечно малым величинам условия 4 теоремы 1 применяется правило Лопиталя или прием их оценки из [10, с. 11].

Теорема 2. *Пусть д. с.* (1) *такова, что*:

1) *выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 1;

2) $\int^{\omega}\sigma\pi\,d\tau = +\infty$, $\quad \operatorname{Re}\lambda_k^* \in R_-$, $k = \overline{1,\ p_0}$, *и существует* $\mu_0 \in]0, 1[$ *такое, что в д. с.* (6) $\operatorname{Re}\mu_s - \mu_0\operatorname{Re}\mu_1 \equiv \mu_s^* \in R_-$, $s = \overline{1,\ s_0}$;

3)
$$\exp\left[\left(\mu_s^* + \omega_0\right)\int_T^t \pi\sigma\,d\tau\right]\int_T^t\left[\sigma^{1-n_0}H + L_1^*\right]\times$$
$$\times\exp\left[-\left(\mu_s^* + \omega_0\right)\int_T^\tau \pi\sigma\,dt\right]d\tau = o(1), \quad t\uparrow\omega,$$

$$\exp\left[\left(\operatorname{Re}\lambda_k^* + \omega_0\right)\int_T^t \pi\,d\tau\right]\int_T^t\left[H + L_1^*\right]\exp\left[-\left(\operatorname{Re}\lambda_k^* + \omega_0\right)\int_T^\tau \pi\,dt\right]d\tau = o(1), \quad t\uparrow\omega,$$

$$L_1^* \equiv \sigma^{-\frac{1}{2}n_0(n-n_0)} \exp\left(\alpha\mu_0 \operatorname{Re}\mu_1 \int_T^\tau \pi\sigma\, d\tau\right) L, \quad T \le t,$$

ω_0 — *достаточно малая положительная постоянная,* $s = \overline{1,\ s_0}$, $k = \overline{1,\ p_0}$.

Тогда ее состояние равновесия $Y \equiv \overline{0}$ *функционально полиустойчиво в малом.*

Доказательство. К д. с. (1) применим преобразование (7), где $g \equiv \equiv \exp[\mu_0\mu_1\int_{t_0}^t \sigma\pi\, d\tau]$. Тогда при выполнении условий теоремы 2 X-д. с. имеет свойство St при $t \uparrow \omega$ [2]. Это означает, что для сколь угодно малого $\varepsilon \in R_+$ существуют $\delta_\varepsilon \in]0,\ \min(\varepsilon, \varepsilon M_0^{-1})[$, $T_\varepsilon \in \Delta$ такие, что любое решение $X = X(t;\, T_\varepsilon, X_0)$, X-д. с. с начальным условием X_0, удовлетворяющим (8), где $G_0 \equiv 1$, для всех $t \in [T_\varepsilon, \omega[$ удовлетворяет неравенству $\|X(t;\, T_\varepsilon, X_0)\| < M_0^{-1}\varepsilon^{1/2}$. Далее оценка для $\|Y_0\|$ выполняется аналогично ее оценке в теореме 1. Затем из замены (7) для всех $t \in [T_\varepsilon, \omega[$ следует оценка

$$\left\|Y_{n_0}(t;\ T_\varepsilon,\ Y_0)\right\|^2 + \left\|Y_{n-n_0}(t;\ T_\varepsilon,\ Y_0)\right\|^2 \le \varepsilon f(t),$$

где $f(t) \equiv \exp(2\mu_0 \operatorname{Re}\mu_1 \int_{t_0}^t \sigma\pi\, d\tau)$, т. е. выполняется определение 2, где $r_1 = r_2 = 1$.

Следствие 2. *Если для д. с.* (1) *выполнены условия* 1, 2 *теоремы* 2 *и*

$$(\sigma^{n_0}\pi)^{-1}\left[\|P'\| + \pi\|P - P_0\|^2 + \sigma^{-1-\frac{1}{2}n_0(n_0-3)} \exp(\mu_0 \operatorname{Re}\mu_1 \int_{t_0}^t \sigma\pi\, d\tau) L\right] = o(1),\ t \uparrow \omega,$$

или

$$\sigma^{1-n_0}\left[\|P'\| + \pi\|P - P_0\|^2 + \sigma^{-1-\frac{1}{2}n_0(n_0-3)} \exp(\mu_0 \operatorname{Re}\mu_1 \int_{t_0}^t \sigma\pi\, d\tau) L\right] \in L_\Delta,$$

то ее состояние равновесия $Y \equiv \overline{0}$ *функционально полиустойчиво в малом.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Рассмотрим более общий случай. Пусть проблема типа (A) решена полностью редукцией ее к таким же проблемам рангов, меньших n_0. Тогда можно построить преобразование [1] вида

$$Y = R_1(t)X, \tag{11}$$

где $\det R_1(t) = d_1[1 + r_1(t)]\prod_{s=1}^{k_0}\sigma_s^{n_s(n_s-1)/2}(t)$, $d_1 \in C\setminus\{0\}$, $r_1 : \Delta \Rightarrow C$, — известная функция, $r_1 = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $\sigma_s : \Delta \Rightarrow R_+$, $s = \overline{1,\ k_0}$, — известные функции, $\sigma_s = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{1,\ k_0 - 1}$, $\sigma_{k_0} \equiv 1$, $\sum_{s=1}^{k_0-1} n_s = n_0$, $n_{k_0} = n - n_0$, $k_0 \in \in \overline{\{1,\ n\}}$, $\|R(t)\| \le M_1$, $M_1 \in R_+$, для всех $t \in \Delta$, приводящее д. с. (1) к д. с. вида

$$X'_{n_s} = \pi_s \operatorname{diag}[\mu_{1,n_s} E_{p_1,n_s} + \Omega_{p_1,n_s}(t), \ldots, \mu_{k_{n_s},n_s} E_{p_{k_{n_s}},n_s} +$$
$$+ \Omega_{p_{k_{n_s}},n_s}(t)]X_{n_s} + \sum_{\substack{k=1\\k\ne s}}^{k_0} P_{n_s,n_k}(t)X_{n_k} + G_{n_s}(t, X), \sum_{q=1}^{k_{n_s}} p_{q,n_s} = n_s, \qquad s = \overline{1, k_0}, \tag{12}$$

где $\pi_s \equiv \sigma_s \pi_{s+1}$, $s = \overline{1,\ k_0 - 1}$, $\pi_{k_0} \equiv \pi$; μ_{q,n_s}, $q = \overline{1,\ k_{n_s}}$, $s = \overline{1,\ k_0}$, — известные константы; $\left\| \Omega_{p_{k_{n_s}}, n_s}(t) \right\| \le \Omega_1$, причем константа

$$\Omega_1 \equiv \max_{1 \le q \le k_{n_s},\, 1 \le s \le k_0} \ \sup_{t \in [T, \omega[} \left\| \Omega_{q,n_s}(t) \right\|$$

сколь угодно мала, если T достаточно близко к ω; $\left\| P_{n_s, n_k} \right\| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s, k = \overline{1, k_0}$, $k \ne s$; $\left\| G_{n_s}(t, X) \right\| \le L_s \| X \|^{1+\alpha}$, $L_s \equiv M_1^* |1 + r_1|^{-1} \prod\limits_{k=s}^{k_0} \sigma_k^{-\frac{1}{2} n_k (n_k - 1)} L$, $M_1^* \in R_+$, $s = \overline{1, k_0}$.

Замечание **3.** Величины σ_s, μ_{q,n_s}, $q = \overline{1, k_{n_s}}$, $s = \overline{1, k_0}$, определяются в процессе сведения д. с. (1) к д. с. (12).

Теорема 3. *Пусть д. с.* (1) *такова, что*:

1) *проблема типа* (A) [1] *ранга* n_0 *решена,* $|r_1| < 1$, $t \in \Delta$, *и д. с.* (1) *приведена к д. с.* (12);

2) $\int^{\omega} \pi_s\, dt = +\infty$, $1 \le s \le k_0$;

3) *существует* $g_s : \Delta \Rightarrow R_+$, $g_s \in C_\Delta^{(1)}$ *такая, что* $g_s = o(1)$, $g_s'(g_s \pi)_s^{-1} = g_{0_s} + o(1)$, $t \uparrow \omega$, $\sup\limits_{t \in \Delta} g_s < +\infty$, *и* $\operatorname{Re} \mu_{q,n_s} - g_{0_s} \equiv \mu_{q,n_s}^* \in R_-$, $q = \overline{1,\ k_{n_s}}$, $1 \le$ $\le s \le k_0$;

4) $\exp\left[(\mu_{q,n_s}^* + \omega_0) \int\limits_T^t \pi_s\, d\tau \right] \int\limits_T^t (H_s + L_s^{**}) g_s^{-1} \exp\left[-(\mu_{q,n_s}^* + \omega_0) \int\limits_T^\tau \pi_s\, dt \right] d\tau = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $T \le t$, $H_s \equiv \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \ne s}}^{k_0} \left\| P_{n_s, n_k} \right\|$, $L_s^{**} \equiv \prod\limits_{k=s}^{k_0} \sigma_k^{-\frac{1}{2} n_k (n - n_k)} L$, ω_0 — *достаточно малая положительная постоянная,* $q = \overline{1,\ k_{n_s}}$, $1 \le s \le k_0$.

Тогда ее состояние равновесия $Y \equiv \overline{0}$ *функционально* Y_{n_s}*-устойчиво в малом* $(1 \le s \le k_0)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие **3.** *Если для д. с.* (1) *выполнены условия* $1-3$ *теоремы* 3 *и*

$$(H_s + L_s^{**})(g_s \pi_s)^{-1} = o(1),\ t \uparrow \omega,\ \text{или}\ (H_s + L_s^{**}) g_s^{-1} \in L_\Delta,\ 1 \le s \le k_0,$$

то ее состояние равновесия $Y \equiv \overline{0}$ *функционально* Y_{n_s}*-устойчиво в малом* $(1 \le s \le k_0)$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Теорема 4. *Пусть д. с.* (1) *такова, что*:

1) *проблема типа* (A) [1] *ранга* n_0 *решена,* $|r_1| < 1$, $t \in \Delta$, *и д. с.* (1) *приведена к д. с.* (12);

2) $\int^{\omega} \pi_1\, dt = +\infty$;

3) *существует* $\mu_0^* \in]0,1[$ *такое, что в д. с.* (12) $\mathrm{Re}\mu_{q,n_s} - \mu_0^* \mathrm{Re}\mu_{q,n_s} \equiv \equiv \mu_{q,n_s}^{**} \in R_-$, $q = \overline{1, k_{n_s}}$, $s = \overline{1, k_0}$;

4) $\exp[(\mathrm{Re}\mu_{q,n_s}^{**} + \omega_0)\int_T^t \pi_1\, d\tau]\int_T^t (H_s + L_s^{***})\exp[-(\mathrm{Re}\mu_{q,n_s}^{**} + \omega_0)\int_T^\tau \pi_1\, dt]d\tau = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $T \le t$, $H_s \equiv \sum_{\substack{k=1\\k\ne s}}^{k_0} \| P_{n_s, n_k} \|$, $L_s^{***} \equiv \prod_{k=s}^{k_0} \sigma_k^{-n_k(n-n_k)/2} \times \exp(\alpha\mu_0^* \mathrm{Re}\mu_{1,n_1}\int_{t_0}^t \pi_1 d\tau)L$, ω_0 — *достаточно малая положительная постоянная,* $q = \overline{1, k_{n_s}}$, $s = \overline{1, k_0}$.

Тогда ее состояние равновесия $Y \equiv \overline{0}$ *функционально полиустойчиво в малом.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Следствие 4. *Если для д. с.* (1) *выполнены условия* 1 – 3 *теоремы* 4, *и*

$$\pi_s^{-1}(H_s + L_s^{***}) = o(1),\ t \uparrow \omega,\ \text{или}\ H_s,\ L_s^{***} \in L_\Delta,\quad s = \overline{1, k_0},$$

то ее состояние равновесия $Y \equiv \overline{0}$ *функционально полиустойчиво в малом*

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

1. *Витриченко И. Е., Никоненко В. В.* О сведении к почти блок-треугольному (диагональному) виду линейной неавтономной системы в случае кратного нулевого собственного значения предельной матрицы коэффициентов // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 1994. – **110**. – P. 59–65.
2. *Витриченко И. Е.* К устойчивости одного уравнения *n*-го порядка в одном критическом случае // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1138 – 1143.
3. *Витриченко И. Е.* К устойчивости неавтономной существенно нелинейной системы в одном критическом случае // Допов. НАН України. – 1997. – **8**. – С. 25 – 29.
4. *Мартынюк А. А.* Об экспоненциальной полиустойчивости движения // Teorijska i Primenjena Mehanika. – 1994. – **20**. – P. 143 – 151.
5. *Костин А. В., Витриченко И. Е.* Обобщение теоремы Ляпунова об устойчивости в случае одного характеристического показателя для неавтономных систем // Докл. АН СССР. – 1982. – **264**, № 4. – С. 819 – 822.
6. *Персидский К. П.* О характеристических числах дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР. Сер. мат. и мех. – 1947. – **1**, № 12. – С. 5 – 47.
7. *Perron O.* Die Stabilitatsfrage bei Differential geichungen // Math. Z. – 1930. – **32**. – S. 703 – 738.
8. *Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К.* Метод функций Ляпунова в задачах о полиустойчивости движения // Прикл. математика и механика. – 1987. – **5**. – С. 709 – 716.
9. *Витриченко И. Е., Занун Т. Ю.* О центре притяжения квазилинейной неавтономной системы в критическом случае // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 6. – С. 1081 – 1084.
10. *Раппопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. – Киев: Изд-во АН УССР, 1954. – 526 с.

Получено 27.10.97