УДК 517.956

**Е. А. Калита,** канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

# ЧАСТИЧНАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ СЛЕДОВ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

For traces of generalized solutions of elliptic systems on smooth manifolds, the dependence between the Hausdorff dimensionality of the set of points, where the solution is not smooth, and the module of ellipticity of the systems is studied.

Для слідів на гладких многовидах узагальнених розв'язків еліптичних систем досліджена залежність хаусдорфової розмірності множини точок, у яких розв'язок негладкий, від модуля еліптичності системи.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$, рассматривается эллиптическая система

$$\mathcal{L}^i u \equiv \sum_{|\alpha|=m} (-D)^\alpha \Big( \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\beta|=m} A^{ij}_{\alpha\beta}(x, u, \dots, D^{m-1}u) D^\beta u^j +$$

$$+ A^i_\alpha(x, u, \dots, D^{m-1}u) \Big) + \sum_{|\alpha|<m} (-D)^\alpha A^i_\alpha(x, u, \dots, D^m u) = 0, \qquad (1)$$

$$i = 1, \dots, N,$$

где $A^{ij}_{\alpha\beta}$ непрерывны по совокупности переменных,

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta} A^{ij}_{\alpha\beta}(x,\xi)\,\eta^i_\alpha\,\eta^j_\beta \ge |\eta|^2, \quad \sum_{i,\alpha} \Big( \sum_{j,\beta} A^{ij}_{\alpha\beta}\,\eta^j_\beta \Big)^2 \le \Lambda |\eta|^2, \qquad (2)$$

$$|A^i_\alpha(x,\xi)| \le c \sum_j \sum_{|\beta|\le m} |\xi^j_\beta|^{p_\beta/p'_\alpha} + f_\alpha(x), \qquad (3)$$

$1/p_\alpha = 1/2 - (m - |\alpha|)/n$ при $m - |\alpha| < n/2$, $2n < p_\alpha < \infty$ при $m - |\alpha| \ge n/2$, $1/p'_\alpha = 1 - 1/p_\alpha$, буква $c$ обозначает различные несущественные положительные константы, условия на $f_\alpha$ будут указаны ниже.

Известно, что обобщенное решение (1) $u \in W^m_2(\Omega)$ может быть негладким только на замкнутом множестве, коразмерность которого больше двух [1]. В данной работе подобный результат устанавливается для следов решений на гладких многообразиях, причем размерности многообразия и множества точек негладкости решения на нем существенно зависят от модуля эллиптичности системы. Зависимость от модуля эллиптичности размерности многообразия, на котором решение имеет след, для систем второго порядка близкими методами изучалась в [2], зависимость гельдеровости решения и его производных для систем произвольного порядка — в [3].

Введем близкую к модулю эллиптичности характеристику системы (1)

$$K = \inf_{\kappa>0} \sup_{x,\xi} \| I - \kappa A(x,\xi) \|^2,$$

$$\| I - \kappa A \|^2 = \sup_{|\eta|=1} \sum_i \sum_{|\alpha|=m} \Big( \eta^i_\alpha - \kappa \sum_j \sum_{|\beta|=m} A^{ij}_{\alpha\beta}\,\eta^j_\beta \Big)^2, \qquad (4)$$

где $I = (\delta^{ij}\delta_{\alpha\beta})$ — единичная матрица, мультииндексы считаем упорядоченными: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_j \in \{1, \dots, n\}$. Отметим, что из (2) следует $K \le 1 - 1/\Lambda < 1$. Выражение $K$ через собственные числа матрицы $A^{ij}_{\alpha\beta}$ получено в [3, с. 34]. В частности, если

$$1 \le |\eta|^{-2} A^{ij}_{\alpha\beta}(x, \xi)\, \eta^i_\alpha\, \eta^j_\beta \le \lambda, \quad A^{ij}_{\alpha\beta} = A^{ji}_{\beta\alpha},$$

то $K \le \left(\dfrac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^2$. Обозначим

$$a_l(K) = \left( l^2 + 4\frac{l-1}{K^{-1/m}-1} \right)^{1/2} - 2\left( \frac{l-1}{K^{-1/m}-1} \right)^{1/2},$$

$l \ge 2$ целое, $l_0 = 1 + \dfrac{1}{4}\left( \sqrt{K^{-1/m}-1} + \sqrt{K^{-1/m}+3} \right)^2$.

**Теорема 1.** *Пусть* $u \in W^m_2(\Omega)$ — *решение* (1), $Q \subset \Omega$ — *гладкое многообразие размерности* $n-l$, $2 \le l < \min\{n; l_0\}$, *а также*

$$f \in L_{q_\alpha}(\Omega), \qquad 1/q_\alpha < \min\{1/p'_\alpha - a_l(K)/2l;\ 1/2 + 1/n - 1/p_\alpha\}.$$

*Тогда найдется замкнутое множество* $Z \subset Q$ *хаусдорфовой размерности*

$$\dim Z \le n - 2 - a_l(K) \tag{5}$$

*такое, что* $u \in C^{m-1,\varepsilon}$ *в окрестности любой точки* $Q \setminus Z$, $\varepsilon > 0$ *зависит только от* $q_\alpha$, $p_\alpha$, $n$.

***Замечания.*** **1.** Условие $l < l_0$ равносильно $K\left( 1 + \dfrac{(l-2)^2}{l-1} \right)^m < 1$, а также $a_l(K) > l-2$. Оно обеспечивает $n - 2 - a_l < \dim Q$.

**2.** Поскольку $a_l < l$, $a_l \to l$ при $K \to 0$, имеем $n-2-a_l < \dim Q - 2$. Поэтому теорема 1 не дает непосредственного усиления упомянутого результата [1] о размерности множества точек $\Omega$, в которых решение не гладкое.

Пусть $(r, \theta, y)$ — цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^n$, а именно, $(r, \theta)$ — сферические координаты в $\mathbb{R}^l$, $2 \le l < n$, $y = (x_{l+1}, \dots, x_n)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^{n-l}$. Обозначим через $L_{2,a,l}$ пространство с нормой $\|u\|_{a,l} = \| r^{a/2} u; L_2(\mathbb{R}^n)\|$. Для оператора $D\Delta^{-1}\operatorname{div}$, где $\Delta^{-1}$ — интегральный оператор с символом $-|\zeta|^{-2}$, положим

$$\|D\Delta^{-1}\operatorname{div}\|^2_{a,l} \equiv \sup\left\{ \sum_{i=1}^n \Big\| \sum_{j=1}^n D_i \Delta^{-1} D_j f_j \Big\|^2_{a,l} \colon \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2_{a,l} = 1 \right\}.$$

**Лемма 1.** *Если* $l - 2 \le a < l$, *то*

$$\|D\Delta^{-1}\operatorname{div}\|_{a,l} \le M_l(a)^{1/2},$$

*где* $M_l(a) = 1 + a^2(l-1)\left( \dfrac{4}{l^2-a^2} \right)^2$.

***Доказательство.*** *Шаг* 1. Покажем, что если функция $u$ такая, что $Du \in L_{2,a,l}$, то для некоторой функции $v$, $Dv \not\equiv 0$, $Dv \in L_{2,-a,l}$, выполнено

$$\|Du\|_{a,l}\, \|Dv\|_{-a,l} \le M_l(a)^{1/2} \int Du\, Dv\, dx, \tag{6}$$

где $DuDv = \sum_i D_i u D_i v$. Разложим $u$ в ряд по полной ортонормированной системе сферических функций:

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(r, y) Y_j(\theta),$$

где $Y_j$ — сферические функции, соответствующие собственному числу $\lambda_j = j(j+l-2)$ оператора Бельтрами на единичной сфере в $\mathbb{R}^l$; индекс, указывающий кратность, опускаем ($\lambda_j$ простое только при $j = 0$). Определим $v$ коэффициентами разложения:

$$v_j(r, y) = u_j(r, y) r^a - a r^j \int_{+\infty}^{r} u_j(\rho, y) \rho^{a-1-j} d\rho.$$

Далее штрих обозначает дифференцирование по $r$. Поскольку

$$\| Du \|_{a,l}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-l}} \left( u_j'^2 + \lambda_j r^{-2} u_j^2 + |D_y u_j|^2 \right) r^{a+l-1} dr dy,$$

и аналогично для $v$ по неравенству Харди получаем

$$\| Dv \|_{-a,l} \le c \| Du \|_{a,l} < \infty.$$

Обозначая

$$I_j = \int \int \left( u_j'^2 + \lambda_j r^{-2} u_j^2 + |D_y u_j|^2 \right) r^{a+l-1} dr dy,$$

$$\mathcal{J}_j = \int \int u_j^2 r^{a+l-3} dr dy,$$

$$H_j = \int \int \left( \int_{+\infty}^{r} D_j u_j \rho^{a-1-j} d\rho \right)^2 r^{2j+l-a-1} dr dy,$$

после интегрирования по частям получаем

$$(uv) \equiv \int DuDv\, dx = \sum_{j=0}^{\infty} \left( I_j + j a \mathcal{J}_j + a \frac{l+2j-a}{2} H_j \right). \tag{7}$$

Имеем также

$$V \equiv \| Dv \|_{-a,l}^2 = (uv) + \sum_{j=0}^{\infty} \Bigg( j a \mathcal{J}_j + a \frac{l+2j+a}{2} H_j +$$

$$+ a^2 (j^2 + \lambda_j) \int \int \left( \int_{+\infty}^{r} u_j \rho^{a-1-j} d\rho \right)^2 r^{2j+l-a-3} dr dy \Bigg).$$

Применяя неравенство Харди к последнему слагаемому, получаем

$$V \le (uv) + a \sum_{j=0}^{\infty} \left( j \frac{\kappa_+^2}{\kappa_-^2} \mathcal{J}_j + \frac{l+2j+a}{2} H_j \right),$$

где $\kappa_\pm = \frac{1}{2}(2j + l - 2 \pm a)$. Учитывая

$$U \equiv \|Du\|^2_{a,l} = (uv) - a\sum_{j=0}^{\infty}\left(j\mathcal{I}_j + \frac{l+2j-a}{2}H_j\right),$$

находим

$$M_l(a)(uv)^2 - UV \geq a^2\left[(l-1)\left(\frac{4}{l^2-a^2}\right)^2(uv)^2 - (uv)\sum_j\left(j\frac{2j+l-2}{\kappa_-^2}\mathcal{I}_j + H_j\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_i\left(i\mathcal{I}_i + \frac{l+2i-a}{2}H_i\right)\sum_j\left(j\frac{\kappa_+^2}{\kappa_-^2}\mathcal{I}_j + \frac{l+2j+a}{2}H_j\right)\right].$$

Отсюда следует, что

$$M_l(a)(uv)^2 - UV \geq a^2\left[\frac{4(l-1)}{(l+a)^2}(uv) - \sum_j\left(j\mathcal{I}_j + \gamma_j H_j\right)\right]\times$$

$$\times\left[\frac{4}{(l-a)^2}(uv) - \sum_j\left(j\frac{\kappa_+^2}{\kappa_-^2}\mathcal{I}_j + \frac{l+2j+a}{2}H_j\right)\right], \tag{8}$$

если $\gamma_j$ удовлетворяет условиям

$$\gamma_j \leq \frac{l+2j-a}{2}, \quad \frac{4}{(l-a)^2}\gamma_j + 2\frac{l-1}{(l+a)^2}(l+2j+a) \geq 1. \tag{9}$$

Применяя неравенство Харди, из (7) получаем

$$(uv)_j \equiv \int D(u_jY_j)D(v_jY_j)\,dx \geq \kappa_+^2\mathcal{I}_j + \frac{l+2j-a}{2}\frac{l+2j+a}{2}H_j.$$

Поэтому оба множителя в (8) неотрицательны, если выбрать

$$\gamma_0 = (l-1)\frac{l-a}{l+a}, \quad \gamma_1 = \min\left\{(l-1)\frac{(l+2)^2-a^2}{(l+a)^2};\ \frac{l+2-a}{2}\right\},$$

$$\gamma_j = \frac{l+2j-a}{2}, \quad j \geq 2.$$

Условие (9) также выполнено, и оценка (6) доказана.

*Шаг* 2. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — ограниченная финитная функция. Тогда определена функция $u = \Delta^{-1}\operatorname{div} f$, и в силу ограниченности проекторов Риса в пространствах Лебега с весом Макенхоупта [4] $\|Du\|_{a,l} \leq c\|f\|_{a,l}$ при $|a| < l$. Определяя функцию $v$, $Dv \in L_{2,-a,l}$ по $u$ так, как на шаге 1, получаем

$$M_l(a)^{-1/2}\|Du\|_{a,l}\|Dv\|_{-a,l} \leq \int DuDv\,dx = \int fDv\,dx \leq \|f\|_{a,l}\|Dv\|_{-a,l}.$$

Учитывая $Dv \not\equiv 0$ при $Du \not\equiv 0$, а также плотность ограниченных финитных функций в $L_{2,a,l}$, получаем утверждение леммы.

Обозначим

$$E_\rho = \{(r, \theta, y):\ r < \rho,\ |y| < \rho\}, \quad G_\rho = \{x \in E_\rho;\ r > \rho/2\},$$

$$\|u\|_{p,\omega,E} = \|\omega^{1/p}u; L_p(E)\|,$$

при $p = 2$, $\omega(x) \equiv 1$, $E = E_\rho$ соответствующий индекс опускаем. В следующей лемме считаем, что малая окрестность точки $x_0 \in Q$ гладко отображена на окрестность начала координат так, что $Q$ в окрестности $x_0$ переходит в $\{x\colon x_1 = \ldots = x_l = 0\}$, и производная отображения в точке $x_0$ является ортогональной матрицей.

**Лемма 2.** *Пусть* $u \in W_2^m(\Omega)$ — *решение* (1), $a \in (-l;\ 0)$ *такое, что* $\| D^m \Delta^{-m} \operatorname{div} \|^2_{-a,l} < 1/K$. *Тогда при малом* $\rho > 0$

$$\| D^m u \|_{\omega, E_{\rho/2}} \le c\Big( \| D^m u \|_{\omega^\gamma} + \sum_{|\alpha| < m} \| D^\alpha u \|_{p_\alpha} \Big)_{E_\rho} + \operatorname{idem}^p + cF_{E_{\rho'}} \qquad (10)$$

*где* $\omega(x) = (\tau + r^{-a})^{-1}$, $\tau > 0$, *константа* $c$ *не зависит от* $\tau$,

$$\max\left\{ 1 + \frac{2l}{an};\ \frac{n}{n+2} \right\} < \gamma < 1, \quad p = \max_\alpha p_\alpha, \quad F_E = \sum_\alpha \| \omega^{1/2} f_\alpha \|_{p'_\alpha, E}.$$

***Доказательство.*** Пусть $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(E_\rho)$ — срезающая функция: $\varphi = 1$ в $E_{\rho/2}$, $|D^j \varphi| \le c_j \rho^{-j}$. Положим $v = \Delta^{-m} \operatorname{div}^m (\varphi \omega D^m u)$, где $\Delta^{-m}$ — оператор с символом $(-1)^m |\zeta|^{-2m}$. Определим полином $P$ условиями

$$\int_{G_\rho} D^\alpha (v - P)\, dx = 0, \quad |\alpha| < m, \quad \deg P < m.$$

Запишем систему (1) в виде $(-\Delta)^m u = (-\Delta)^m u - \kappa \mathcal{L} u$ и подставим в соответствующее интегральное тождество пробную функцию $v_0 = (v - P)\varphi$:

$$\int D^m u D^m v_0\, dx = \int \Big( \sum_{|\alpha| = m} \Big[ \Big( D^\alpha u - \kappa \sum_{|\beta| = m} A_{\alpha\beta} D^\beta u \Big) D^\alpha v_0 - $$
$$ - \kappa \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha D^\alpha v_0 \Big] dx, \qquad (11)$$

векторные индексы для краткости опускаем. В левой части

$$\int D^m u D^m v_0\, dx \ge \| \varphi D^m u \|^2_\omega - c \| D^m u \|_{\omega^\gamma} \sum_{j < m} \rho^{j-m} \| D^j (v - P) \|_{\omega^{-\gamma}}.$$

В правой части по определению $K$

$$\Big| \int \sum_{|\alpha| = m} \Big( D^\alpha u - \kappa \sum_{|\beta| = m} A_{\alpha\beta} D^\beta u \Big) D^\alpha v_0\, dx \Big| \le$$
$$\le K_\rho^{1/2} \| \varphi D^m u \|_\omega \| D^m v_0 \|_{1/\omega} + c \| D^m u \|_{\omega^\gamma} \sum_{j < m} \rho^{j-m} \| D^j (v - P) \|_{\omega^{-\gamma}},$$

где $K_\rho$ — показатель $K$, испорченный распрямлением $Q$. Поскольку $Q$ гладкое, $K_\rho \to K$ при $\rho \to 0$. Учитывая, что $1/\omega$ является суммой константы и степенного веса, находим

$$\| D^m v \|^2_{1/\omega, \mathbb{R}^n} \le \tau \| D^m \Delta^{-m} \operatorname{div}^m \|^2_{L_2} \| \varphi \omega D^m u \|^2 +$$
$$+ \| D^m \Delta^{-m} \operatorname{div}^m \|^2_{-a,l} \| \varphi \omega D^m u \|^2_{r^{-a}} \le \| D^m \Delta^{-m} \operatorname{div}^m \|^2_{-a,l} \| \varphi D^m u \|^2_\omega.$$

По условию леммы $K_\rho^{1/2} \| D^m \Delta^{-m} \operatorname{div}^m \|_{-a,l} < 1$ при достаточно малом $\rho$, и из

(11) получаем

$$\|\varphi D^m u\|_\omega^2 \le c\|D^m u\|_{\omega^\gamma} \sum_{j<m} \rho^{j-m}\|D^j(v-P)\|_{\omega^{-\gamma}} +$$
$$+ c\sum_{|\alpha|\le m} \|\omega^{1/2}A_\alpha\|_{p'_\alpha}\|\omega^{-1/2}D^\alpha v_0\|_{p_\alpha}. \tag{12}$$

Оценим младшие члены. Вес $\omega^{-\gamma}$ принадлежит классу Макенхоупта $A_2$ равномерно по $\tau > 0$ при $\gamma|a| < l$ [4], поэтому справедливо неравенство Пуанкаре

$$\sum_{j<m} \rho^{j-m}\|D^j(v-P)\|_{\omega^{-\gamma}} \le c\rho^{-1}\|D^{m-1}(v-P)\|_{\omega^{-\gamma}}.$$

Используем вложение пространств Соболева с весом [4]:

$$W^j_{p,\mu} \subset L_{q,\mu^{q/p}}, \quad 1 < p < \frac{n}{j}, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{j}{n}, \quad \mu^{q/p} \in A_{1+q/p'}, \tag{13}$$

где $W^j_{p,\mu}$ — пространство с главной полунормой $\|\mu^{1/p}D^j u; L_p\|$, аналогично $\|\nu^{1/p}u; L_q\|$ — норма в $L_{q,\nu}$. В рассматриваемом случае $\omega^\sigma \in A_s$ равномерно по $\tau > 0$ тогда и только тогда, когда $-l < \sigma a < l(s-1)$, $1 < s < +\infty$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Поэтому

$$\|D^{m-1}(v-P)\|_{\omega^{-\gamma}} \le c\|D^m v\|_{q,\omega^{-\gamma q/2}} \le c\rho^{1+a(1+\gamma)/2}\|D^m v\|_{1/\omega},$$

$$q = \frac{2n}{n+2}, \quad \gamma > 1 + \frac{2l}{an}.$$

Проекторы Риса, композицией которых является оператор $D^m\Delta^{-m}\operatorname{div}^m$, ограничены в $L_{2,1/\omega}$ равномерно по $\tau > 0$ при $|a| < l$, поэтому

$$\|D^m v\|_{1/\omega,\mathbb{R}^n} \le c\|\varphi D^m u\|_\omega.$$

Члены в правой части (12), соответствующие $A^i_\alpha$, оцениваются аналогично с использованием вложения (13). Имеем

$$\|\omega^{-1/2}D^\alpha v_0\|_{p_\alpha} \le c\|D^m v\|_{1/\omega} \le c\|\varphi D^m u\|_\omega.$$

Учитывая условие (3), находим

$$\|\omega^{1/2}A^i_\alpha\|_{p'_\alpha} \le c\sum_\beta \left[\left(\int_{E_\rho}\|D^m u\|^2\omega^{p'_\alpha/p_\beta}dx\right)^{1/2} + c_\rho\|D^\beta u\|_{p_\beta}\right]^{p_\beta/p'_\alpha} + cF_{E_\rho}.$$

Поскольку или $|\alpha| < m$, или $|\beta| < m$, имеем $p'_\alpha/p_\beta \le n/(n+2)$. Из (12) получаем утверждение леммы.

***Доказательство теоремы*** **1.** Известно [1], что если $u \in W^m_2(\Omega)$ — решение (1), то $u \in W^m_{2+\varepsilon}$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Поэтому

$$\|D^m u\|_{a,Q} \equiv \|\operatorname{dist}(x,Q)^{a/2}D^m u; L_2(\Omega')\| < \infty$$

при некотором $a = b_1 < 0$ для любой внутренней подобласти $\Omega' \subset\subset \Omega$. Выберем $b_2 < b_1$ так, что $b_2 > \max\{b_1 - 2l/n; b_1(1+2/n); -a_l(K)\}$. Тогда при $a =$

$= b_2$ норма $D^m u$ в правой части (10) ограничена равномерно по $\tau > 0$.

Если $a \in (-a_l(K); 0)$, то по теореме Стейна – Вейса (интерполяционная теорема Риса – Торина для весовых пространств Лебега) при $\theta = 1 + a/a_l(K)$ имеем

$$\| D\Delta^{-1} \operatorname{div} \|_{-a,l} \le \| D\Delta^{-1} \operatorname{div} \|_{L_2}^{1-\theta} \, \| D\Delta^{-1} \operatorname{div} \|_{a_l(K),l}^{\theta}.$$

Поскольку $\| D\Delta^{-1} \operatorname{div} \|_{L_2} = 1$, а число $a_l(K)$ определяется как корень уравнения $M_l(a) = K^{-1/m}$, по лемме 1 находим

$$\| D\Delta^{-1} \operatorname{div} \|_{-a,l} \le K^{-\theta/2m} < K^{-1/2m}.$$

Значит, выполнено условие леммы 2 $\| D^m \Delta^{-m} \operatorname{div}^m \|_{-a,l}^2 < 1/K$. Из (10) при $\tau \to 0$ получаем $\| D^m u \|_{b_2, Q} < \infty$. Определим $b_3$ по $b_2$ так, как определяли $b_2$ по $b_1$. Очевидно, за конечное число шагов получим $\| D^m u \|_{a,Q} < \infty$ для любого $a > -a_l(K)$.

Обозначим

$$U(y, R) = \| D^m u; L_2(B(y, R)) \|^2, \quad B(y, R) = \{x: |x - y| < R\}.$$

Для $u \in C^{m-1, \varepsilon}$ в окрестности $y$ достаточно, чтобы $\limsup\limits_{R \to 0} U(y, R) R^b < \infty$ с каким-нибудь $b < 2 - n$, причем $\varepsilon > 0$ не зависит от $b$ [1]. Пусть $\Omega' \subset\subset \Omega$ — произвольная внутренняя подобласть, $Q' \subset\subset Q$ — внутреннее подмногообразие, $Q' \subset \Omega'$. Положим $R_i = 2^{-i}$, $i$ столь большое, что $4R_i < \operatorname{dist}(Q', \partial Q \cup \partial\Omega)$. При каждом $i$ покроем $Q'$ шарами $B_{ij} = B(y_{ij}, R_i)$, $y_{ij} \in Q'$, так, что $\forall\, y \in Q'$ $\exists\, j: B(y, R_{i+1}) \subset B_{ij}$ и кратность покрытия ограничена равномерно по $i$. Из $\| D^m u \|_{a,Q} < \infty$ следует $\left| \{j: R_i^b U(y_{ij}, R_i) > 1\} \right| < c R_i^{b-a}$. Поэтому множество точек $y \in Q'$, для которых $\sup \{R^b U(y, R): R_{i+2} < R < R_{i+1}\} > 4^n$, может быть покрыто $c R_i^{b-a}$ шарами радиуса $2R_i$. Для $h$–мерной меры Хаусдорфа множества

$$Z_b = \{ y \in Q': \limsup_{R \to 0} R^b U(y, R) = \infty \}$$

при $h > a - b$ находим

$$\mu_h(Z_b) \le c \sum_{i=I}^{\infty} R_i^{h-a+b} \le c R_I^{h-a+b},$$

$I$ произвольно большое. Следовательно, $\mu_h(Z_b) = 0$. Поскольку $Z \subset \bigcap_{b<2-n} Z_b$, при $b \to 2 - n$, $a \to -a_l(K)$ получаем (5).

Рассмотрим систему

$$\sum_{|\alpha| \le m} (-D)^\alpha A_\alpha^i(x, u, \ldots, D^m u) = 0, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{14}$$

функции $A_\alpha^i(x, \xi)$ один раз дифференцируемы, $A_{\alpha\beta}^{ij} \equiv \partial A_\alpha^i / \partial \xi_\beta^j$ непрерывны и ограничены при $|\alpha| = |\beta| = m$,

$$\sum_{i,j=1}^{N} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} A_{\alpha\beta}^{ij}(x,\xi)\,\eta_\alpha^i\,\eta_\beta^j \ge |\eta|^2,$$

$$\left| A_{\alpha\beta}^{ij}(x,\xi) \right|^{p_{\alpha\beta}} \le cT + f(x), \quad |\alpha|+|\beta| \le 2m,$$

$$\left| \partial A_\alpha^i(x,\xi)/\partial x \right| \le cT^{1/p'_\alpha} + f_\alpha(x),$$

$$\frac{1}{p_{\alpha\beta}} = 1 - \frac{1}{p_\alpha} - \frac{1}{p_\beta}, \quad T = \sum_i \sum_{|\alpha|\le m} |\xi_\alpha^i|^{p_\alpha}, \quad f \in L_1(\Omega).$$

Определим $K$ формулой (4) по матрице $\left( A_{\alpha\beta}^{ij} \right)$, $|\alpha| = |\beta| = m$.

**Теорема 2.** *Пусть* $u \in W_2^m(\Omega)$ *— решение* (14), $Q, f_\alpha$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда найдется замкнутое множество* $Z \subset Q$, *удовлетворяющее* (5), *такое, что* $u \in C^{m,\varepsilon}$ *в окрестности любой точки* $Q \setminus Z$, $\varepsilon > 0$.

***Доказательство*** теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 с учетом следующих замечаний. Условия на $A_\alpha^i$ обеспечивают $u \in W_2^{m+1}$. Дифференцируя систему (14) по независимой переменной, находим, что функция $u_k = D_k u$, $k = \{1, \ldots, n\}$, является решением системы

$$\sum_{|\alpha|\le m} (-D)^\alpha \left( \sum_j \sum_{|\beta|\le m} A_{\alpha\beta}^{ij}(x, u, \ldots, D^m u) D^\beta u_k^j + \partial A_\alpha^i / \partial x_k \right) = 0.$$

Если $a \in (-l; 0)$ такое, что $\| D^m \Delta^{-m} \operatorname{div}^m \|_{-a,l}^2 < 1/K$, аналогично (10) получаем

$$\| D^m u_k \|_{\omega, E_{\rho/2}} \le c \left( \| D^m u_k \|_{\omega^\gamma} + \sum_{|\alpha|\le m} \| D^\alpha u \|_{p_\alpha} \right)_{E_\rho} + \text{idem}^p + cF_{E_\rho},$$

обозначения те же, что и в лемме 2. С другой стороны, $u$ является решением системы порядка $2m+2$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{|\alpha|\le m} D_k (-D)^\alpha \left( \sum_j \sum_{|\beta|\le m} A_{\alpha\beta}^{ij} D^\beta D_k u^j + \partial A_\alpha^i / \partial x_k \right) = 0,$$

и применимы результаты работы [1]: 1) $u \in W_{2+\varepsilon}^{m+1}$, 2) если

$$\limsup_{R\to 0} R^b \left\| D^{m+1} u; L_2(B(y,R)) \right\|^2 < \infty$$

с каким-нибудь $b < 2 - n$, то $u \in C^{m,\varepsilon}$ в окрестности точки $y$.

1. *Giaquinta M., Modica G.* Regularity results for some classes of higher order non linear elliptic systems // J. reine und angew. Math. – 1979. – **311 / 312**. – P. 145–169.
2. *Челкак С. И.* Слабая регулярность решений эллиптических квазилинейных систем второго порядка // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 11. – С. 74–84.
3. *Koshelev A. I., Chelkak S. I.* Regularity of solutions of quasilinear elliptic systems. – Leipzig: Teubner, 1985. – 208 p.
4. *Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техники. Мат. анализ / ВИНИТИ. – 1983. – **21**. – С. 42–129.

Получено 10.02.93