УДК 517.5

С. А. Пичугов, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ КОНСТАНТОЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ $\varphi(L)$

By using the best approximations of functions by a constant, we obtain necessary conditions for continuity moduli of periodic functions in metric spaces with integral metric. Young constants are calculated for these spaces.

За допомогою найкращого наближення функцій константою одержані необхідні умови для модулів неперервності періодичних функцій в метричних просторах з інтегральною метрикою, а також обчислені константи Юнга цих просторів.

Для произвольной измеримой почти всюду конечной функции $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty]$, $\varphi(0) = 0$, обозначим через $\varphi(L)$ множество измеримых 2π-периодических функций f таких, что

$$\|f\|_{\varphi(L)} \equiv \|f\|_{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(|f(x)|)\, dx < \infty.$$

Будем нормировать функцию φ условием $\varphi(1) = 1$.

Пусть $E_0(f)_\varphi = \sup\{\|f-c\|_\varphi;\ c \in \mathbb{R}^1\}$ — наилучшее приближение функции f константой, $\omega(f, h)_\varphi = \sup\{\|f(\cdot+t)-f(\cdot)\|_\varphi;\ |t| \le h\}$ — модуль непрерывности функции $f \in \varphi(L)$. Будем изучать величину

$$\sup\{E_0(f)_\varphi | \omega(f, \pi)_\varphi;\ f \in \varphi(L),\ f \not\equiv \text{const}\}$$

и свойства модулей непрерывности. В нормированных пространствах $L_p[0, 2\pi]$, $p \ge 1$, эти вопросы исследовались в [1 – 6], в метрических пространствах $L_p[0, 2\pi]$, $0 < p < 1$, — в [7].

Если φ — функция типа модуля непрерывности, т. е. непрерывная неубывающая полуаддитивная функция, и $\varphi(0) = 0$, то в этом случае функция $\rho_\varphi(f, g) = \|f-g\|_\varphi$ удовлетворяет неравенству треугольника и множество $\varphi(L)$ становится линейным метрическим пространством относительно этой метрики.

Примерами таких функций являются функции $\varphi(u) = u^p$, $0 < p < 1$, и $\varphi(u) = 2u/(1+u)$, а соответствующими пространствами — $L_p[0, 2\pi]$, $0 < p \le 1$, и пространство $L_p[0, 2\pi]$ с топологией сходимости по мере.

Теорема 1. *В любом метрическом пространстве $\varphi(L)$ выполняются соотношения*

$$\sup_{\substack{f \in \varphi(L) \\ f \not\equiv \text{const}}} \frac{\omega(f, \pi)_\varphi}{(2/\pi)\int_0^\pi \omega(f, t)_\varphi\, dt} = 1, \tag{1}$$

$$\sup_{\substack{f \in \varphi(L) \\ f \not\equiv \text{const}}} \frac{E_0(f)_\varphi}{(1/2\pi)\int_{-\pi}^\pi \|\Delta_t f\|_\varphi\, dt} = 1, \tag{2}$$

$$\sup_{\substack{f \in \varphi(L) \\ f \not\equiv \text{const}}} \frac{E_0(f)_\varphi}{\omega(f, \pi)_\varphi} = 1. \tag{3}$$

Доказательство. Неравенство

$$E_0(f)_\varphi \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|\Delta_t f\|_\varphi \, dt \tag{4}$$

выполняется для произвольной измеримой функции φ. Действительно, используя рассуждения из [3], имеем

$$E_0(f)_\varphi \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot)-f(t)\|_\varphi \, dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(|f(x)-f(t)|) \, dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(|f(x+t)-f(x)|) \, dx\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|\Delta_t f\|_\varphi \, dt.$$

Если $\varphi(L)$ — метрическое пространство, то из неравенства треугольника и (4) вытекает

$$\omega(f,\pi)_\varphi \le 2E_0(f)_\varphi \le \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \omega(f,t)_\varphi \, dt. \tag{5}$$

Пусть функция g из $\varphi(L)$ на периоде $[-\pi, \pi]$ определена равенствами $g(x) = -1/2$ при $x \in [-\pi, 0]$ и $g(x) = 1/2$ при $x \in [0, \pi]$. Тогда легко видеть, что

$$\omega(g,h)_\varphi = \frac{h}{\pi}, \quad h \le \pi; \quad \|g \pm 1/2\|_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi(1)\, dx = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Используя неравенство треугольника, получаем

$$E_0(g)_\varphi > \frac{1}{2} \omega(g,\pi)_\varphi = \frac{1}{2} = \|g \pm 1/2\|_\varphi,$$

т. е. $E_0(g)_\varphi = 1/2$. Отсюда и из (4) – (6) следуют (1), (2).

Докажем (3). Неравенство $E_0(f)_\varphi \le \omega(f,\pi)_\varphi$ следует из (4). Рассмотрим функции, построенные В. А. Юдиным для доказательства соотношений типа (3) в пространствах $L_p[0, 2\pi]$, $p \le 2$ [9].

Для простого числа q разобьем период $[0, 2\pi]$ равноотстоящими точками $x_k = k 2\pi/(q-1)$, $k = 0, \ldots, q-1$, и пусть $f_q(x) = 2^{-1}(k/q)$ при $x \in (x_{k-1}, x_k]$, где (k/q) — символ Лежандра [8, с. 69], $k = 1, \ldots, q-1$. Напомним, что $(k/q) = 1$, если существует решение уравнения $x^2 \equiv k \pmod q$. В противном случае $(k/q) = -1$.

Вычислим $\omega(f_q, \pi)_\varphi$. Если $a = \pm 1$ или 0, то $\varphi(|a|) = \varphi(1) a^2 = a^2$. Поэтому

$$\|\Delta_{x_k} f_q\|_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f_q\left(x + k\frac{2\pi}{q-1}\right) - f_q(x) \right|^2 dx =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_q(x)|^2 dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_q(x) f_q\left(x + k\frac{2\pi}{q-1}\right) dx \right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4(q-1)} \right) = \frac{1}{2} \frac{q}{q-1}.$$

При вычислении

$$\int_0^{2\pi} f_q(x) f_q\left(x + k\frac{2\pi}{q-1}\right)dx$$

использовано свойство [8, с. 82]

$$\sum_{r=0}^{q-1}\left(\frac{r}{q}\right)\left(\frac{r+q}{q}\right) = -1, \quad k = 1, \ldots, q-1.$$

Так как $\|\Delta_t f_q\|_\varphi$ — кусочно-линейная функция аргумента t с узлами в точках разбиения, то

$$\omega(f_q, \pi)_\varphi = \sup_k \|\Delta_{x_k} f_q\|_\varphi = \frac{1}{2}\frac{q}{q-1}. \tag{7}$$

Теперь вычислим $E_0(f_q)_\varphi$. Так как число вычетов равно числу невычетов, то для любой константы c

$$\|f_q - c\|_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\varphi\left(\left|-\frac{1}{2}-c\right|\right) + \varphi\left(\left|\frac{1}{2}-c\right|\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varphi\left(\left|\frac{1}{2}+c\right|\right) + \varphi\left(\left|\frac{1}{2}-c\right|\right)\right),$$

и, следовательно, $\|f_q - c\|_\varphi = \|f_q + c\|_\varphi$. Поэтому

$$1 = \varphi(1) = \|2f_q\|_\varphi = \|(f_q - c) + (f_q + c)\|_\varphi \leq$$

$$\leq \|f_q - c\|_\varphi + \|f_q + c\|_\varphi = 2\|f_q - c\|_\varphi,$$

и, значит, $E_0(f_q)_\varphi \geq 1/2 = \|f_q \pm 1/2\|_\varphi$. Отсюда и из (7) следует

$$\frac{E_0(f_q)_\varphi}{\omega(f_q,\pi)_\varphi} = \frac{q-1}{q} \underset{q\to\infty}{\to} 1.$$

Соотношение (3) доказано.

Приведем одно приложение доказанной теоремы. Константой Юнга метрического пространства (X, ρ) называют величину

$$J(X) = \sup\{J(M); M \subset X\} = \sup\left\{\frac{r(M)}{d(M)}; M \subset X\right\},$$

где

$$r(M) = \inf_{a\in X}\sup_{m\in M}\rho(x, a)$$

— радиус Чебышева множества M, а $d(M) = \sup\{\rho(m_1, m_2); m_1, m_2 \in M\}$ — диаметр M.

Ясно, что $1/2 \leq J(X) \leq 1$. Известно, что $J(L_p[0, 2\pi]) = 1$ при $0 < p \leq 1$ (случай $p = 1$ см. в [3], $p \in (0, 1)$ — в [9]). Обобщим этот результат.

Теорема 2. *Для любого метрического пространства* $\varphi(L)$ *справедливо равенство*

$$J(\varphi(L)) = 1. \tag{8}$$

Доказательство. Достаточно доказать неравенство $J(\varphi(L)) \geq 1$.

Для произвольной функции $f(x) \in \varphi(L)$ рассмотрим множество ее сдвигов $M_f = \{f_t(\cdot); t \in [0, 2\pi)\}$, где $f_t(\cdot) = f(x+t)$. Покажем, что

$$E_0(f)_\varphi \leq r(M_f). \tag{9}$$

Действительно, пусть для произвольного $\varepsilon > 0$ $a(x)$ — такой элемент из $\varphi(L) \cap L_1$, что $\| f_t - a \|_\varphi < r(M_f) + \varepsilon$ для всех t. Используя инвариантность φ-метрики относительно сдвигов, получаем

$$E_0(f)_\varphi \leq \left\| f(\cdot) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(t)dt \right\|_\varphi = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(f(\cdot) - a(\cdot + t)\big) dt \right\|_\varphi \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| f - a_t \|_\varphi \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| f_t - a \|_\varphi \, dt \leq r(M_f) + \varepsilon.$$

Далее, $d(M_f) = \sup \{ \| f_{t_1} - f_{t_2} \|_\varphi, \ t_1, t_2 \in [0, 2\pi) \} = \omega(f, \pi)_\varphi$. Поэтому равенство (8) следует из (9) и (3):

$$J(\varphi(L)) \geq \sup \left\{ \frac{r(M_f)}{d(M_f)}; \ f \in \varphi(L) \right\} \geq \sup \left\{ \frac{E_0(f)_\varphi}{\omega(f, \pi)_\varphi}; \ f \in \varphi(L) \right\} = 1.$$

Заметим, что при доказательстве мы фактически повторили рассуждения С. Б. Стечкина, приведенные в [3] для нормированных пространств.

1. *Корнейчук Н. П.* Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**. – С. 514–515.
2. *Черных Н. И.* О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 71–74.
3. *Бердышев В. И.* Связь между неравенством Джексона и одной геометрической задачей // Мат. заметки. – 1968. – **3**, № 3. – С. 327–338.
4. *Юдин В. А.* О модуле непрерывности в L_2 // Сиб. мат. журн. – 1979. – **20**, № 2. – С. 449–450.
5. *Конягин С. В.* О модулях непрерывности функций // Всесоюз. шк. по теории функций: Тез. докл. (Кемерово, 10–12 сент. 1983 г.). – Кемерово, Кемеров. ун-т, 1983. – С. 6.
6. *Иванов В. И.* О модуле непрерывности в L_p // Мат. заметки. – 1987. – **41**, № 5. – С. 682–686.
7. *Иванов В. И.* Приближение в L_p полиномами по системе Уолша // Мат. сб. – 1987. – **134**, № 3. – С. 386–403.
8. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981. – 176 с.
9. *Пичугов С. А.* Константа Юнга пространства L_p // Мат. заметки. – 1988. – **43**, № 5. – С. 604–614.

Получено 22.09.92