УДК 517.928

В. А. Плотников, д-р физ.-мат. наук,
Т. С. Зверкова, канд. физ.-мат. наук (Одес. ун-т),
О. Е. Слободянюк, преп. (Одес. ин-т низкотемператур. технологий и энергетики)

УСРЕДНЕНИЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗРЫВА*

The averaging method is justified for standard nonperiodic systems with parameters and discontinuous right-hand sides and its application to problems of rupture surface control is presented.

Наведено обгрунтування методу усереднення для систем стандартного вигляду з параметрами та розривними правими частинами при умові неперіодичності і його застосування у задачах керування поверхнею розриву.

Рассмотрим систему стандартного вида с разрывной правой частью

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x, w) = \varepsilon \begin{cases} X_1(t, x) & \text{при } \Phi(t, x, w) \le 0; \\ X_2(t, x) & \text{при } \Phi(t, x, w) > 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$x(0, \varepsilon) = x_0,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, x, X — n-мерные вектор-функции, $w \in W$ — m-мерный вектор управляющих параметров, $(t, x, w) \in Q = \{t \ge 0,\ x \in D \subset R^n,\ w \in W \subset \operatorname{comp} R^m\}$.

Требуется найти такие значения параметров $w \in W$, которые обеспечивают минимальное значение некоторого функционала

$$J(w) = F(x(T)) \to \min_{w \in W}, \tag{2}$$

где $T = L\varepsilon^{-1}$, $L > 0$, $L = \text{const}$.

Задаче (1), (2) ставится в соответствие усредненная задача

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \overline{X}(\xi, w), \quad \xi(0) = x_0, \tag{3}$$

$$J_0(w_0) = F(\xi(L)) \to \min_{w \in W}, \tag{4}$$

где

$$\overline{X}(x, w) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x, w)\, dt, \tag{5}$$

$$\tau = \varepsilon t.$$

Введем следующие множества:

$$I_1(x, w) = \{t \in [0, T] \,|\, \Phi(t, x, w) \le 0\},$$

$$I_2(x, w) = [0, T] \setminus I_1(x, w),$$

$$\psi_1^*(x, w) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} (\operatorname{mes}[0 \le \tau \le t] \,|\, \Phi(t, x, w) \le 0),$$

$$\psi_2^*(x, w) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} (\operatorname{mes}[0 \le \tau \le t] \,|\, \Phi(t, x, w) > 0)$$

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

и определим поверхности $\varphi_i(x, w) = 0$, $i = 1, 2$, такие, что при $\varphi_i(x, w) > 0$ справедливо $\psi_i^* < 1$, $i = 1, 2$, а при $\varphi_i(x, w) \le 0$, $i = 1, 2$, выполняется $\psi_i^* = 1$, $i = 1, 2$.

Поверхностями $\varphi_i(x, w) = 0$, $i = 1, 2$, определяются области

$$D_1(w) = \{x \in Q \mid \varphi_1(x, w) \le 0\}, \quad w \in W,$$

$$D_2(w) = \{x \in Q \mid \varphi_2(x, w) \le 0\}, \quad w \in W,$$

$$D_3(w) = Q \setminus (D_1(w) \cup D_2(w)), \quad w \in W.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в области Q выполнены условия:*

1) *$X_i(t, x)$, $i = 1, 2$, непрерывны по t, равномерно ограничены постоянной $M > 0$, удовлетворяют условию Липшица по x с постоянной λ;*

2) *равномерно относительно x существует предел (5);*

3) *решение $\xi(\tau)$ системы (3) определено при всех $w \in W$ для $\tau \ge 0$ и лежит вместе с ρ-окрестностью в области D;*

4) *функция $\Phi(t, x, w)$ непрерывна и является кусочно-гладкой по t, функция $\dfrac{\partial \Phi(t,x,w)}{\partial x}$ непрерывна, $w \in W$;*

5) *уравнение $\Phi(t, x, w) = 0$ при всех $w \in W$ и $x \in D$ имеет простые корни $t_j(x, w)$, причем $\dfrac{1}{T-t} K(x, w, t, T) \le k$, где $K(x, w, t, T)$ — количество корней $t_j(x, w)$ на сегменте $[t, T]$, и в корнях $t_j(x, w)$ выполняется условие „строгого пересечения"*

$$\left| \frac{\partial \Phi(t,x,w)}{\partial t} \right| \ge \delta > 0.$$

Тогда для любого $L > 0$, $\eta > 0$ найдется $\varepsilon_0(L, \eta) > 0$ такое, что на отрезке $0 \le t \le L/\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ существует решение $x(t, \varepsilon)$ системы (1) *и справедливо неравенство $\| x(t, \varepsilon) - \xi(\varepsilon t) \| < \eta$.*

Доказательство. Обозначим

$$F(T, x, w) = \frac{1}{T}\left[\int\limits_0^{t_1(x,w)} X_1(t, x)\, dt + \int\limits_{t_1(x,w)}^{t_2(x,w)} X_2(t, x)\, dt + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \int\limits_{t_k(x,w,\xi)}^{T} X_j(t, x)\, dt \right],$$

где $j = 1$ или $j = 2$ и на $[0, t_1(x, w)]$ для определенности $\Phi(t, x, w) \le 0$.

Покажем, что функция $\overline{X}(x, w) = \lim\limits_{T \to \infty} F(T, x, w)$ будет локально удовлетворять условию Липшица по x.

Введем в рассмотрение множества

$$I_i^{1,2} = I_i(\xi_1, w) \cap I_i(\xi_2, w),$$

$$I_i^1 = I_i(\xi_1, w) \setminus I_i^{1,2},$$

$$I_i^2 = I_i(\xi_2, w) \setminus I_i^{1,2}, \quad i = 1, 2, \quad \xi_1, \xi_2 \in D_3(w), \quad w \in W.$$

Тогда

$$F(T, \xi_i, w) = \frac{1}{T}\left[\int\limits_{T_1(\xi_i, w)} X_1(t, \xi_i)\,dt + \int\limits_{T_2(\xi_i, w)} X_2(t, \xi_i)\,dt\right], \quad i = 1, 2,$$

и с учетом разбиения по множествам получим

$$\| F(T, \xi_1, w) - F(T, \xi_2, w) \| \le \frac{1}{T}\left[2\lambda \int\limits_0^T \| \xi_1 - \xi_2 \| \,dt + \right.$$

$$\left. + M(\operatorname{mes} I_1^1 + \operatorname{mes} I_1^2 + \operatorname{mes} I_2^1 + \operatorname{mes} I_2^2)\right] \le N \| \xi_1 - \xi_2 \|,$$

т. е. $\overline{X}(x, w)$ удовлетворяет условию Липшица по x с некоторой постоянной $\nu > 0$.

Оценим теперь разность решений исходной и усредненной систем:

$$\| x(t, \varepsilon) - \xi(\varepsilon t) \| \le \varepsilon \left\| \int\limits_0^t [X(s, x(s), w) - \overline{X}(\xi(\varepsilon s), w)]\,ds \right\| \le$$

$$\le \exp(\lambda L) \sup_{t \in [0, L\varepsilon^{-1}]} \left\| \int\limits_0^t [X(s, \xi(\varepsilon s), w) - \overline{X}(\xi(\varepsilon s), w)]\,ds \right\|.$$

Разобьем отрезок $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m равных частей и обозначим $t_p = pL/(\varepsilon m)$, $x(t_p, \varepsilon) = x_p$, $\xi(\varepsilon t_p) = \xi_p$, $p = \overline{0, m}$. Тогда

$$\left\| \int\limits_0^t [X(s, \xi(\varepsilon s), w) - \overline{X}(\xi(\varepsilon s), w)]\,ds \right\| \le$$

$$\le \sum_{p=0}^{m-1} \left[\left\| \int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} [X(s, \xi(\varepsilon s), w) - X(s, \xi_p, w)]\,ds \right\| + \right.$$

$$+ \left\| \int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} [\overline{X}(\xi(\varepsilon s), w) - \overline{X}(\xi_p, w)]\,ds \right\| +$$

$$\left. + \left\| \int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} [X(s, \xi_p, w) - \overline{X}(\xi_p, w)]\,ds \right\| \right] \le \lambda L^2 M \frac{1}{m} + \nu L^2 M \frac{1}{m} + m f(\varepsilon),$$

где $f(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Выбирая $m > m_0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, получаем оценку $\| x(t, \varepsilon) - \xi(\varepsilon t) \| < \eta$.

Теорема 2. *Пусть в области Q выполнены условия 1 – 3 теоремы 1 и, кроме того,*

4) *функция $\Phi(t, x, w)$ непрерывно дифференцируема по t и по x, при $x \,\overline{\in}\, \varphi_i(x, w)$, $i = 1, 2$, и при всех $w \in W$ уравнение $\Phi(t, x, w) = 0$ имеет простые корни $t_j(x, w)$, причем $\frac{1}{T - t} K(x, w, t, T) \le k$, где $K(x, w, t, T)$ — количество корней $t_j(x, w)$ на $[t, T]$;*

5) *функции $\varphi_i(x, w)$ и $\frac{\partial \varphi_i(x, w)}{\partial x}$, $i = 1, 2$, непрерывны;*

6) *$\xi(\tau)$ конечное число раз пересекает поверхности $\varphi_i(x, w)$, $i = 1, 2$, $\tau \in [0, L]$, и существует такое $\gamma > 0$, что при всех $w \in W$*

$$\left(\frac{\partial\varphi_i(x,w)}{\partial x},\ X_j(t,x)\right) \geq \gamma,$$

или

$$\left(\frac{\partial\varphi_i(x,w)}{\partial x},\ X_j(t,x)\right) \leq -\gamma, \quad j = 1, 2.$$

Тогда для любого $L > 0$ *и* $\eta > 0$ *найдется* $\varepsilon_0(L,\eta) > 0$ *такое, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *на отрезке* $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ *выполняется неравенство* $\|x(t,\varepsilon) - \xi(\varepsilon t)\| < \eta$, *где* $x(t,\varepsilon)$ *— решение системы* (1), *существование которого предполагается.*

Доказательство. Функция $\overline{X}(x,w)$ локально удовлетворяет условию Липшица в областях $D_1(w)$, $D_2(w)$ и $\operatorname{int} D_3(w)$. Это можно показать аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 1.

Внутри области $D_i(w)$, $i = 1, 2$, вне некоторых σ-окрестностей точек пересечения поверхностей $\varphi_i(x,w) = 0$, $i = 1, 2$, оценка может быть получена на основании теоремы [1, с. 13], а внутри области $D_3(w)$ — на основании теоремы 1.

Оценка близости решений исходной и усредненной систем внутри σ-окрестности проводится аналогично тому, как это сделано в работе [2] для окрестности одного корня. Учитывая условие 4 относительно количества корней на сегменте $[0, T]$, получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим задачу (1), (2) управления поверхностью разрыва. Пусть $(J^*, x^*(t), w^*)$ — оптимальное значение функционала, оптимальная траектория и оптимальные значения параметров в задаче (1), (2), а $(J_0^*, \xi^*(\tau), w_0^*)$ — оптимальное решение усредненной задачи (3), (4).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть в области* Q *выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того, функция* $F(x)$ *определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по* x *в области* Q.

Тогда для любых $L > 0$, $\eta > 0$ *найдется* $\varepsilon_0(L,\eta) > 0$ *такое, что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *будут выполняться неравенства*

$$|J^* - J_0^*| \leq \eta, \quad J(w_0^*) - J^* \leq \eta, \quad J_0(w^*) - J_0^* \leq \eta.$$

Доказательство. Обозначим через $x^1(t)$ решение системы (1) при $w = w_0^*$, а через $\xi^1(\varepsilon t)$ — решение системы (3) при $w_0 = w^*$, т. е.

$$\dot{x}^1 = \varepsilon X(t, x^1, w_0^*), \quad x^1(0) = x_0, \tag{6}$$

$$\dot{\xi}^1 = \varepsilon \overline{X}(\xi^1, w^*) \quad \xi^1(0) = x_0. \tag{7}$$

Очевидно, что оптимальные траектории $x^*(t)$ и $\xi^*(\varepsilon t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{x}^* = \varepsilon X(t, x^*, w^*), \quad x^*(0) = x_0, \tag{8}$$

$$\dot{\xi}^* = \varepsilon \overline{X}(t, x^*, w_0^*), \quad \xi^*(0) = x_0. \tag{9}$$

Согласно теореме 1 для систем (6), (9) и (8), (7) справедливы оценки

$$\|x^1(t) - \xi^*(\varepsilon t)\| \leq \eta, \quad \|x^*(t) - \xi^1(\varepsilon t)\| \leq \eta. \tag{10}$$

Из неравенства (10) на основании условия 6 следует

$$|J_0(w_0^*) - J(w_0^*)| \le \lambda\eta, \quad |J(w^*) - J_0(w^*)| \le \lambda\eta. \tag{11}$$

Очевидно, что

$$J(w_0^*) \ge J^*, \quad J_0(w^*) \ge J_0^*. \tag{12}$$

Для значений J^* и J_0^* справедливо одно из неравенств

$$J^* > J_0^* \tag{13}$$

или

$$J^* \le J_0^*. \tag{14}$$

В первом случае из (11) – (13) следует

$$J(w_0^*) \ge J^* > J_0^* \ge J(w_0^*) - \lambda\eta,$$

т. е.

$$|J^* - J_0^*| \le \lambda\eta. \tag{15}$$

Во втором случае из (11), (12), (14) следует

$$J_0(w^*) \ge J_0^* \ge J^* \ge J_0(w^*) - \lambda\eta,$$

т. е. также справедливо неравенство (15).

Оценим разность

$$J(w_0^*) - J^* = |J(w_0^*) - J_0(w_0^*) + J_0(w_0^*) - J^*| \le$$

$$\le |J(w_0^*) - J_0(w_0^*)| + |J_0(w_0^*) - J^*| \le 2\lambda\eta. \tag{16}$$

Аналогично $J_0(w^*) - J_0^* \le 2\lambda\eta$.

Полагая $\eta^* = 2\lambda\eta$, получаем утверждение теоремы.

Теорема 4. *Пусть в области Q выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, функция $F(x)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x в области Q.*

Тогда для любых $L > 0$, $\eta > 0$ найдется $\varepsilon_0(L, \eta) > 0$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ будут выполняться неравенства

$$|J^* - J_0^*| \le \eta, \quad J(w_0^*) - J^* \le \eta, \quad J_0(w^*) - J_0^* \le \eta.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3.

1. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев; Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
2. *Плотников В. А., Зверкова Т. С.* Метод усреднения для систем стандартного вида с разрывными правыми частями // Дифференц. уравнения. – 1982. – №6. – С. 1091 – 1093.

Получено 02.12.92