УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, д-р физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

НАИЛУЧШИЕ L_1-ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ W_1^r СПЛАЙНАМИ ИЗ W_1^r

Exact values of the best L_1-approximations of the classes W_1^r of periodic functions by periodic polynomial splines of order r and defect 1 with equidistant nodes that belong to the class W_1^r are determined.

Знайдені точні значення найкращих L_1-наближень класів W_1^r періодичних функцій періодичними поліноміальними сплайнами порядку r, дефекту 1, з рівновіддаленими вузлами, які належать до класу W_1^r.

Пусть L_p, $1 \le p \le \infty$, — пространства 2π-периодических функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_p$. Через W_p^r, $r \in \mathbb{N}$, обзначим класс функций $f \in L_1$ таких, что $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} := f)$ локально абсолютно непрерывна и $\|f^{(r)}\|_p \le 1$, а через W_V^r — класс функций f таких, что $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $\bigvee_0^{2\pi}(f^{(r)}) \le 1$. Пусть далее $S_{2n,r}$, $n \in \mathbb{N}$, — множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, дефекта 1, с узлами $k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если $\mathfrak{N} \subset L_p$ и $f \subset L_p$, то величина

$$E(f, \mathfrak{N})_p = \inf\{\|f-u\|_p\colon u \in \mathfrak{N}\}$$

называется наилучшим L_p-приближением функции f множеством $\mathfrak{N}$. Величина

$$E(W_p^r, \mathfrak{N})_p = \sup\{E(f, \mathfrak{N})_p\colon f \in W_p^r\}$$

называется наилучшим L_p-приближением класса W_p^r множеством $\mathfrak{N}$.

Цель данной статьи — найти точные значения величин $E(W_1^r, S_{2n,r} \cap W_1^r)_1$. Отметим, что наилучшие приближения классов функций пересечениями конечномерных аппроксимирующих подпространств с этими классами в связи с введенными им "относительными" поперечниками рассматривал В. Н. Коновалов [1]. В работе автора [2] были найдены точные значения величин $E(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap W_V^{r-1})_1$. Если $\varphi_\lambda(x) = \operatorname{sgn}\sin\lambda x$ и $\varphi_{\lambda,r}(x)$ – r-й, $2\pi/\lambda$-периодический интеграл от $\varphi_\lambda(x)$, имеющий на периоде нулевое среднее значение, то результат, полученный в [2], формулируется так: при $r \ge 3$

$$E(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap W_V^{r-1})_1 = \varphi_{1,r}(t_{\max}) - \varphi_{1,r}(t_{\max} + \pi/(2n)), \tag{1}$$

где $t_{\max} \in \mathbb{R}$ таково, что $\|\varphi_{1,r}\|_\infty = \varphi_{1,r}(t_{\max})$.

Теорема. *При* $r \ge 3$

$$E(W_1^r, S_{2n,r} \cap W_1^r)_1 = \varphi_{1,r}(t_{\max}) - \frac{n}{\pi} \int\limits_{t_{\max}}^{t_{\max}+\frac{\pi}{n}} \varphi_{1,r}(t)\,dt.$$

Доказательство. Используя теорему двойственности для наилучших приближений выпуклым множеством (см., например, [3], предложение 2.5.2) и учитывая, что множество $S_{2n,r} \cap W_1^r$ содержит константы, получаем

$$E := (W_1^r, S_{2n,r} \cap W_1^r)_1 =$$

$$= \sup_{f \in W_1^r} \sup_{\left\{\substack{\|g\|_\infty \le 1 \\ g \perp 1}\right\}} \left\{ \int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)dx - \sup_{u \in W_1^r \cap S_{2n,r}} \int\limits_0^{2\pi} u(x)g(x)dx \right\}.$$

После r-кратного интегрирования по частям в каждом интеграле и применения теоремы двойственности к первому интегралу будем иметь

$$E = \sup_{g \in W_\infty^r} \left\{ E(g)_\infty - \sup_{u \in W_1^r \cap S_{2n,r}} \int\limits_0^{2\pi} u^{(r)}(x)g(x)dx \right\}, \tag{2}$$

где $E(g)_\infty$ — наилучшее равномерное приближение функции g константой.

Функция $u^{(r)}$ постоянна на каждом из интервалов (x_k, x_{k+1}), где $x_k = k\pi/n$. Если c_k — ее значение на интервале (x_k, x_{k+1}), то $\sum_{k=0}^{2n} c_k = 0$, и если $u \in$ $\in S_{2n,r} \cap W_1^r$, то $\sum_{k=1}^{2n} |c_k| \le n/\pi$. Учитывая это и еще раз применяя теорему двойственности, из (2) выводим

$$E = \sup_{g \in W_\infty^r} \left\{ E(g)_\infty - \frac{n}{\pi} \sup_{\left\{\substack{\sum_1^{2n} c_k = 0 \\ \sum_1^{2n} |c_k| \le 1}\right\}} \sum_{k=1}^{2n} c_k \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} g(t)\,dt \right\} =$$

$$= \sup_{g \in W_\infty^r} \left\{ E(g)_\infty - \frac{n}{\pi} \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \max_k \left| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} g(t)\,dt - \lambda \right| \right\}.$$

Как нетрудно проверить, sup в последнем выражении можно брать только по таким $g \in W_\infty^r$, для которых

$$\inf_\lambda \max_k \left| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} g(t)\,dx - \lambda \right| = \max_k \left| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} g(t)\,dx \right|.$$

Кроме того, для любой функции $g \in W_\infty^r$ найдется $\lambda \ge 1$ такое, что $E(g)_\infty =$ $= \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$. Поэтому

$$E = \sup_{\lambda \ge 1} \left\{ \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty - \frac{n}{\pi} \inf_{E(g)_\infty = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty} \max_k \left| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} g(t)\,dx \right| \right\}.$$

Ясно, что $E \ge E\left(W_1^r, S_{2n,r}\right)_1 = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$ (по поводу последнего равенства см., например, [4], теорема 5.4.8). Поэтому

$$E = \sup_{1\le\lambda\le n}\left\{\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty - \frac{n}{\pi}\inf_{E(g)_\infty=\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty}\max_k\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(t)\,dx\right|\right\}. \tag{3}$$

Используя теорему сравнения производных (см., например, [3], теорема 5.6.2), устанавливаем, что для любой функции $g\in W_\infty^r$ такой, что $E(g)_\infty=\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$, будет

$$\max_k\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(t)\,dx\right| \ge \int_{t_{\max}}^{t_{\max}+\frac{\pi}{n}}\varphi_{\lambda,r}(x)\,dx,$$

где $t_{\max}$ определено выше (не уменьшая общности и для сокращения записей считаем, что $t_{\max}=0$).

Теперь из (3) выводим

$$E = \sup_{1\le\lambda\le n}\left\{\varphi_{\lambda,r}(0) - \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi/n}\varphi_{\lambda,r}(x)\,dx\right\} =$$

$$= \sup_{1\le\lambda\le n}\left\{\frac{1}{\lambda^r}\varphi_{1,r}(0) - \frac{n}{\pi\lambda^{r+1}}\int_0^{\lambda\pi/n}\varphi_{1,r}(x)\,dx = \sup_{1\le\lambda\le n}F(\lambda),\right.$$

где

$$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda^r}\varphi_{1,r}(0) - \frac{n}{\pi\lambda^{r+1}}\int_0^{\lambda\pi/n}\varphi_{1,r}(t)\,dt.$$

Покажем, что $F'(\lambda)<0$ для $\lambda\in(1,n)$. Имеем

$$F'(\lambda) = -\frac{r}{\lambda^{r+1}}\varphi_{1,r}(0) + \frac{n}{\pi}\frac{(r+1)}{\lambda^{r+2}}\int_0^{\lambda\pi/n}\varphi_{1,r}(x)\,dx - \frac{1}{\lambda^{r+1}}\varphi_{1,r}\left(\frac{\lambda\pi}{n}\right).$$

Убедимся в том, что при $r\ge 3$

$$\frac{n}{\pi\lambda}\int_0^{\lambda\pi/n}\varphi_{1,r}(x)\,dx < \frac{r}{r+1}\varphi_{1,r}(0) + \frac{1}{r+1}\varphi_{1,r}\left(\frac{\lambda\pi}{n}\right). \tag{4}$$

Рассмотрим разность

$$\Delta(\lambda) = \int_0^{\lambda\pi/n}\varphi_{1,r}(x)\,dx - \frac{r\pi\lambda}{n(r+1)}\varphi_{1,r}(0) - \frac{\lambda\pi}{n(r+1)}\varphi_{1,r}\left(\frac{\lambda\pi}{n}\right).$$

Ясно, что $\Delta(0)=0$. Для доказательства (4) достаточно доказать, что $\Delta'(\lambda)<0$ для $\lambda\in(1,n)$. Имеем

$$\Delta'(\lambda) = \frac{\pi}{n}\varphi_{1,r}\left(\frac{\lambda\pi}{n}\right) - \frac{r\pi}{n(r+1)}\varphi_{1,r}(0) - \frac{\pi}{n(r+1)}\varphi_{1,r}\left(\frac{\lambda\pi}{n}\right) -$$

$$-\frac{\lambda\pi}{n(r+1)}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n(r+1)}\left(r\int_0^{\lambda\pi/n}\varphi_{1,r-1}(x)\,dx - \frac{\lambda\pi}{n}\varphi_{1,r-1}\left(\frac{\lambda\pi}{n}\right)\right).$$

Учитывая, что на $(0,\lambda\pi/n)$ $\varphi_{1,r-1}(x)<0$ и выпукла вниз, получаем

$$\Delta'(\lambda) < 0,$$

и (4) доказано, а из (4) следует, что $F'(\lambda) < 0$ для $\lambda \in (1, n)$.

Следовательно,

$$E = \sup_{1 \le \lambda \le n} F(\lambda) = F(1) = \varphi_{1,r}(0) - \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \varphi_{1,r}(x)\, dx.$$

Теорема доказана.

Отметим в заключение, что

$$\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \varphi_{1,r}(x)\, dx < \varphi_{1,r}\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Сопоставляя (1) и (2), получаем

$$E\left(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap W_V^{r-1}\right)_1 < E\left(W_1^r, S_{2n,r} \cap W_1^r\right)_1.$$

1. *Коновалов В. Н.* Оценки поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. – 1984. – **35**, № 3. – С. 369 – 380.
2. *Бабенко В. Ф.* Приближения в среднем при наличии ограничений на производные приближающих функций // Вопросы анализа и приближения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 9 – 18.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

Получено 15.12.92