УДК 517.925.51

И. Е. Витриченко, канд. физ.-мат. наук (Одес. ун-т)

К УСТОЙЧИВОСТИ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ НЕАВТОНОМНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

For $t \uparrow \omega$, $\omega \leq +\infty$, we obtain sufficient conditions for Lyapunov stability of the zero solution of a specific nonautonomous quasilinear differential system in the case where the matrix of the first-degree approximation has the Jordan form with triangular blocks. Methods to reduce certain classes of general differential systems to differential systems of special type are given.

Одержано достатні умови стійкості за Ляпуновим при $t \uparrow \omega$, $\omega \leq +\infty$, тривіального розв'язку неавтономної диференціальної системи (д. с.) спеціального вигляду, матриця коефіцієнтів д. с. першого наближення якої має майже жорданову форму з трикутними блоками. Вказано методи зведення деяких класів д. с. загального вигляду до дослідженої д. с. спеціального вигляду.

1. Постановка задачи. Исследуем устойчивость по Ляпунову при $t \uparrow \omega$ тривиального решения д. с. вида

$$X' = \{\operatorname{diag}[\pi_1(t)\Lambda_{n_1}(t), \ldots, \pi_k(t)\Lambda_{n_k}(t)] + R(t)\}X + F(t, X), \tag{1}$$

$$X \in \mathbb{C}^n,\ t \in \Delta = [a, \omega[,\ -\infty < a < \omega \leq +\infty,\ \pi_s\colon \Delta \to]0, +\infty[,$$

$$\Lambda_{n_s} = \|\lambda_{ljs}\|,\quad \pi_s, \lambda_{ljs} \in C_\Delta,\quad |\lambda_{ljs}|\colon \Delta \to [0, M],\quad M \in]0, +\infty[,$$

$$\lambda_{ljs} \equiv 0,\ j > l,\ \ l, j = \overline{1, n_s},\ s = \overline{1, k},\ \ \sum_{s=1}^{k} n_s = n;\quad R \in C_\Delta(\mathbb{C}^{n\times n}),$$

$$F \in C_{\Delta\times\mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n),\ \|F\| \leq \mathfrak{L}\|X\|^{1+\alpha},\ \mathfrak{L} \in C_\Delta,\ \mathfrak{L}\colon \Delta \to [0, +\infty[,\ \alpha \in]0, +\infty[,$$

$\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное евклидово пространство.

В дальнейшем используются принятые ниже условные обозначения и определения:

$$X = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n),\ Y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_n),\ Z = \operatorname{col}(z_1, \ldots, z_n),$$

$$\|X\| \equiv \sum_{s=1}^{n} |x_s|,\ \ X_{n_s} = \operatorname{col}(x_{1n_1}, \ldots, x_{n_s n_s}),\ \ V_{n_s} = \operatorname{col}(v_{1n_1}, \ldots, v_{n_s n_s}),$$

$$L_\Delta \equiv \left\{f\colon \Delta \to \mathbb{C}^1,\ \int^{\omega} |f|\,dt < +\infty\right\},\quad \|A\| \equiv \sum_{s,j=1}^{n} |a_{sj}|,$$

$$\text{если}\ \ A = \|a_{sj}\|,\quad s, j = \overline{1, n};$$

$$e_{s1j}(T, \mu) \equiv \exp\left[\int_T^t \left(\pi_j \operatorname{Re}\lambda_{ssj} - \mu\pi_1 \operatorname{Re}\lambda_{111}\right) d\tau\right],\ e_{1sj}(T, \mu) \equiv [e_{s1j}(T, \mu)]^{-1};$$

$$H \equiv 1 + \sum_{s=2}^{n_1} |v_{sn_1}| + \sum_{s=2}\sum_{j=1}^{n_s} |v_{jn_s}|,\ \ J_{s1j}(T, \mu) \equiv e_{s1j}(T, \mu)\int_T^t \pi_j e_{1sj}(T, \mu)\,d\tau,$$

$$J_{slj}(T, \mu) \equiv e_{s1j}(T, \mu)\int_T^t \pi_j J_{s-1, l-1, j}(T, \mu)\, e_{1sj}(T, \mu)\,d\tau,$$

$$A_{s1j}(T, \mu, H) \equiv e_{s1j}(T, \mu)\int_T^t \|R\| H\, e_{1sj}(T, \mu)\,d\tau,$$

$$A_{slj}(T,\mu,H) \equiv e_{s1j}(T,\mu)\int_T^t \pi_j A_{s-1,l-1,j}(T,\mu,H)\, e_{1sj}(T,\mu)\, d\tau,$$

$$B_{s1j}(T,\mu,H) \equiv e_{s1j}(T,\mu)\int_T^t \mathfrak{L}\exp\left(\alpha\mu\int_T^\tau \pi_1 \operatorname{Re}\lambda_{111}\,dt\right)H^{1+\alpha} e_{1sj}(T,\mu)\, d\tau,$$

$$B_{slj}(T,\mu,H) \equiv e_{s1j}(T,\mu)\int_T^t \pi_j B_{s-1,l-1,j}(T,\mu,H)\, e_{1sj}(T,\mu)\, d\tau,$$

$$E_j(T) \equiv 1 + \sum_{s=2}^{n_j}\sum_{l=1}^{s-1} J_{slj}(T,1),\;\; C_1(T,m) \equiv \sum_{l=2}^{n_1}\sum_{j=1}^{l-1}\Big\{A_{lj1}[T,1,1+mE_j(T)] +$$

$$+ A_{lj1}[T,1,\,(1+mE_j(T))^2] + B_{lj1}[T,0,1+mE_j(T)]\Big\},\;\; E_0(T) \equiv \sum_{j=1}^{k} E_j(T);$$

$$C_s(T,m) \equiv \sum_{j=1}^{n_s}\sum_{l=1}^{j-1}\Big\{A_{jls}[T,1,1+mE_j(T)] +$$

$$+ A_{jls}[T,1,\,(1+mE_j(T))^2] + B_{jls}[T,0,1+mE_j(T)]\Big\},$$

E_s — единичная матрица размера $s\times s$; $N \equiv \{1,2,\dots\}$.

***Определение* 1.** *Д. с.* (1) *имеет свойство* St *при* $t\uparrow\omega$, *если для любого* $\varepsilon\in\,]0,+\infty[$ *существуют* $\delta_\varepsilon\in\,]0,\varepsilon[$, $T_\varepsilon\in\Delta$ *такие, что любое решение* $X = X(t)$ *д. с.* (1) *с начальным условием* $\|X(T_\varepsilon)\| < \delta_\varepsilon$ *удовлетворяет неравенству* $\|X(t)\| < \varepsilon$ *для всех* $t\in[T_\varepsilon,\omega[$.

***Определение* 2.** *Д. с.* (1) *имеет свойство* $AsSt$ *при* $t\uparrow\omega$, *если выполнено определение* 1 *и* $\|X(t)\| = o(1)$, $t\uparrow\omega$.

***Определение* 3.** *Д. с.* (1) *имеет свойство* $\overline{St}$ *при* $t\uparrow\omega$, *если определение* 1 *не выполняется.*

2. Основные результаты. Теорема 1. *Пусть д. с. (1) такова, что*

$$e_{p1j}(T,0),\; J_{slj}(T,0)\colon \Delta\to[0,M_0];\quad A_{slj}(T,0,1),\; B_{slj}(T,0,1) = o(1),\; t\uparrow\omega,$$

$$M_0\in\,]0,+\infty[,\; p=\overline{1,n_j},\; l=\overline{2,s-1},\; s=\overline{2,n_j},\; j=\overline{1,k}.$$

Тогда д. с. (1) *имеет свойство* St *при* $t\uparrow\omega$.

Доказательство. Используем прием, впервые примененный О. Перроном [1], а затем получивший развитие в [2, 3]. Рассмотрим наряду с д. с. (1) вспомогательную д. с. вида

$$X' = \operatorname{diag}(\pi_1\Lambda_{n_1},\dots,\pi_k\Lambda_{n_k})X + R\Xi + F(t,\Xi), \tag{2}$$

где $\Xi = \operatorname{col}(\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\xi_s = \xi_s(t)$, $s=\overline{1,n}$, — так называемые функции-вар ации, удовлетворяющие единственному условию $|\xi_s(t)|\le\varepsilon$ для всех $t\in[$ $\omega[$, $T\in\Delta$, $s=\overline{1,n}$.

Пусть $x_{sj} = x_{sj}(t)$, $s=\overline{1,n_j}$, $j=\overline{1,k}$, — произвольное решение д. с. (2). Возьмем любое $\varepsilon\in\,]0,1[$. Согласно приему О. Перрона д. с. (1) имеет свойство St при $t\uparrow\omega$, если из предположения $|\xi_s(t)|\le\varepsilon$, $t\in[T,\omega[$, $s=\overline{1,n}$, можно указать $\delta_\varepsilon \in \,]0, \varepsilon[$, $T_\varepsilon \in \Delta$ такие, что из неравенства $|x_{sj}(T_\varepsilon)| < \delta_\varepsilon$ вытекает оценка $|x_{sj}(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [T_\varepsilon, \omega[$, $s = \overline{1, n_j}$, $j = \overline{1, k}$.

Предположив $|\xi_s(t)| \le \varepsilon$, $s = \overline{1, n}$, оценим компоненты решения $x_{sj} = x_{sj}(t)$, $s = \overline{1, n_j}$, $j = \overline{1, k}$, д. с. (2), соответствующие j-му, $1 \le j \le k$, блоку матрицы $\operatorname{diag}(\pi_1 \Lambda_{n_1}, \ldots, \pi_k \Lambda_{n_k})$. Пусть $|x_{sj}(T_j)| < \delta_j$, $s = \overline{1, n_j}$, $j = \overline{1, k}$. Тогда имеем неравенства

$$|x_{1j}(t)| \le \delta_j e_{11j}(T, 0) + \varepsilon A_{11j}(T, 0, 1) < \varepsilon, \quad j = \overline{1, k}, \tag{3}$$

$$|x_{sj}(t)| \le \delta_j \left[e_{s1j}(T_j, 0) + \sum_{l=1}^{s-1} M^l J_{slj}(T_j, 0) \right] +$$

$$+ \varepsilon \sum_{l=1}^{s-1} M^{l-1} A_{slj}(T_j, 0, 1) < \varepsilon, \quad s = \overline{2, n_j}, \quad j = \overline{1, k}. \tag{3$'$}$$

Выберем $T_j \in \Delta$, $j = \overline{1, k}$, так, чтобы

$$A_{11j}(T_j, 0, 1) < 1, \quad \sum_{l=1}^{s-1} M^{l-1} A_{slj}(T_j, 0, 1) < 1.$$

В результате из неравенств (3), (3′) для ε получаем неравенства

$$\delta_j e_{11j}(T_j, 0)[1 - A_{11j}(T_j, 0, 1)]^{-1} < \varepsilon, \tag{4}$$

$$\delta_j \left[e_{s1j}(T_j, 0) + \sum_{l=1}^{s-1} M^l J_{slj}(T_j, 0) \right] \left[1 - \sum_{l=1}^{s-1} M^{l-1} A_{slj}(T_j, 0, 1) \right]^{-1}, \tag{4$'$}$$

$$s = \overline{2, n_j}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Пусть

$$h_j = \sup_{t \in [T_j, \omega[} \left\{ e_{11j}(T_j, 0)[1 - A_{11j}(T_j, 0, 1)]^{-1},\ e_{s1j}(T_j, 0) + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{s-1} M^l J_{slj}(T_j, 0) \left[1 - \sum_{l=1}^{s-1} M^{l-1} A_{slj}(T_j, 0, 1) \right]^{-1}, \ s = \overline{2, n_j} \right\}.$$

Выберем δ_j так, чтобы $\delta_j = \min\{\varepsilon, \varepsilon h_j^{-1}\}$, $j = \overline{1, k}$. Положим $\delta_\varepsilon = \min\{\delta_j, j = \overline{1, k}\}$, $T_\varepsilon = \max\{T_j, j = \overline{1, k}\}$. Тогда неравенства (4), (4′) выполняются, и из неравенств (3), (3′) получаем, что все компоненты решения д. с. (2) с начальным условием $|x_{sj}(T_\varepsilon)| < \delta_\varepsilon$ удовлетворяют оценке $|x_{sj}(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [T_\varepsilon, \omega[$, $s = \overline{1, n_j}$, $j = \overline{1, k}$. Складывая все неравенства (3), (3′), получаем $\|X(t)\| < n\varepsilon$ для всех $t \in [T_\varepsilon, \omega[$, если $\|X(T_\varepsilon)\| < n\delta_\varepsilon$. Теорема доказана.

Применяя к $J_{slj}(T_j, 0)$, $A_{slj}(T_j, 0, 1)$, $s = \overline{1, n_j}$, $j = \overline{1, k}$, оценки из [4, с. 11], получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *Если д. с.* (1) *такова, что*

$$\lambda_{ssj} \equiv \lambda_j, \quad s = \overline{1, n_j}, \quad \operatorname{Re} \lambda_j < 0,$$

$$\int^{\omega} \pi_j \operatorname{Re} \lambda_j \, dt = -\infty, \quad t^{n_j - 1} \exp\left(\int_T^t \pi_j \operatorname{Re} \lambda_j \, d\tau \right) = O(1), \quad t \uparrow \omega, \quad j = \overline{1, k};$$

$$(\operatorname{Re}\lambda_j)^{-n_j}(\|R\| + \mathfrak{L}) = o(1),\ t \uparrow \omega,$$

или $\|R\| + \mathfrak{L} \in L_\Delta$, $n_j = 1$, $j = \overline{1,k}$, *то д. с.* (1) *имеет свойство* St *при* $t \uparrow \omega$.

Теорема 2. *Пусть д. с.* (1) *такова, что* $\int^\omega \pi_1 \operatorname{Re}\lambda_{111}\,dt = -\infty$, *существует* $\mu \in\ ]0,1[$ *такая, что*

$$e_{p1j}(T,\mu),\ J_{slj}(T,\mu)\colon \Delta \to [0, M_0],\ \ A_{slj}(T,\mu,1),\ B_{slj}(T,\mu,1) = o(1),$$
$$t \uparrow \omega,\ M_0 \in\ ]0,+\infty[,\ \ p = \overline{1,n_j},\ \ s = \overline{2,n_j},\ \ l = \overline{2,s-1},\ j = \overline{1,k}.$$

Тогда д. с. (1) *имеет свойство* $AsSt$ *при* $t \uparrow \omega$.

Доказательство. В д. с. (1) выполним замену

$$X = \exp\left(\mu \int_T^t \pi_1 \operatorname{Re}\lambda_{111}\,d\tau\right) Y.$$

К полученной относительно Y д. с. вида

$$Y' = \{\operatorname{diag}[\pi_1\Lambda_{n_1}, \ldots, \pi_k\Lambda_{n_k}] - \mu\pi_1\operatorname{Re}\lambda_{111}E_n + R\}Y + G,$$

где

$$G = \exp\left(-\mu\int_T^t \pi_1\operatorname{Re}\lambda_{111}\,d\tau\right)F\left[t,\ \exp\left(\mu\int_T^t \pi_1\operatorname{Re}\lambda_{111}\,d\tau\right)Y\right],$$

применим теорему 1, рассматривая в ней вспомогательную д. с. вида

$$Y' = \{\operatorname{diag}[\pi_1\Lambda_{n_1}, \ldots, \pi_k\Lambda_{n_k}] - \mu\pi_1\operatorname{Re}\lambda_{111}E_n\}Y + R\Xi + G(t,\Xi).$$

Оценки из [4, с. 11], применяемые к $J_{slj}(T,\mu)$, $A_{slj}(T,\mu)$, $s = \overline{1,n_j}$, $j = \overline{1,k}$, позволяют сформулировать такое следствие.

Следствие 2. *Если д. с.* (1) *такова, что* $\lambda_{ssj} \equiv \lambda_j$, $s = \overline{1,n_j}$, $\int^\omega \pi_1 \operatorname{Re}\lambda_1\,dt = -\infty$, *существует* $\mu \in\ ]0,1[$ *такая, что*

$$\pi_j\operatorname{Re}\lambda_j - \mu\pi_1\operatorname{Re}\lambda_1 < 0,\ \ t^{n_j-1}\exp\left[\int_T^t\left(\pi_j\operatorname{Re}\lambda_j - \mu\pi_1\operatorname{Re}\lambda_1\right)d\tau\right] = O(1),$$
$$t \uparrow \omega,\ \ j = \overline{1,k};$$

$$(\pi_j\operatorname{Re}\lambda_j - \mu\pi_1\operatorname{Re}\lambda_1)^{-n_j}\left[\|R\| + \mathfrak{L}\exp\left(\alpha\mu\int_T^t \pi_1\operatorname{Re}\lambda_1\,d\tau\right)\right] = O(1),\ \ t \uparrow \omega,$$

или

$$\|R\| + \mathfrak{L}\exp\left(\alpha\mu\int_T^t \pi_1\operatorname{Re}\lambda_1\,d\tau\right) \in L_\Delta,\ \ n_j = 1,\ \ j = \overline{1,k},$$

то д. с. (1) *имеет свойство* $AsSt$ *при* $t \uparrow \omega$.

Теорема 3. *Пусть д. с.* (1) *такова, что*

$$\int^\omega \pi_1\operatorname{Re}\lambda_{111}\,dt = +\infty,\ \ \ E_s^{-1}(T)\,C_s(T,1) = o(1),$$

$$\left(\int_T^t \pi_1\operatorname{Re}\lambda_{111}\,d\tau\right)^{-1}\int_T^t \|R\|\,[1 + E_1(T)]\,d\tau = o(1),\ t \uparrow \omega,\ \ s = \overline{1,k},$$

$$\exp\left[-\alpha(1-\varepsilon_0)\int\limits_T^t \pi_1 \operatorname{Re}\lambda_{111}\,d\tau\right]\int\limits_T^t \mathfrak{L}\,[1+E_1(T)]^{1+\alpha}\times$$

$$\times\exp\left[\alpha(1+\varepsilon_0)\int\limits_T^t \pi_1 \operatorname{Re}\lambda_{111}\,dt\right]d\tau = o(1), \quad t\uparrow\omega,$$

ε_0 *— достаточно малая положительная постоянная.*

Тогда д. с. (1) *имеет свойство* sT *при* $t\uparrow\omega$.

Доказательство. Пусть $M_0\in\,]M_1,+\infty[$, где $M_1=1$, если $M\in\,]0,1[$, $M_1=M^n$, если $M\in\,]1,+\infty[$. Обозначим через T_0 момент времени такой, что для всех $t\in[T_0,\omega[$ выполняются неравенства

$$E_1^{-1}(T_0)\,C_1(T_0,n-1)\le(M_0-M_1)\,M_1^{-1}(M_0+M_0^2+M_0^{1+\alpha})^{-1}, \tag{5}$$

$$E_s^{-1}(T_0)\,C_s(T_0,n-1)\le M_1^{-1},\quad s=\overline{2,k}. \tag{5'}$$

Допустим противное, т. е. д. с. (1) имеет свойство St при $t\uparrow\omega$. Покажем, что можно указать решение д. с. (1) с достаточно малым начальным значением, которое неограничено при $t\uparrow\omega$. Пусть $X=\operatorname{col}(X_{n_1},\ldots,X_{n_k})$. В д. с. (1) выполним замену

$$\begin{gathered} x_{1n_1}=\rho\exp(i\varphi),\quad \rho=|x_{1n_1}|,\quad \varphi=\arg x_{1n_1},\quad i^2=-1,\\ x_{ln_1}=\rho v_{ln_1},\quad l=\overline{2,n_1},\quad X_{n_s}=\rho V_{n_s},\quad s=\overline{2,k}. \end{gathered}\tag{6}$$

Отметим, что в силу допущения для любого $\varepsilon\in\,]0,1[$ существуют $\delta_\varepsilon\in\,]0,\varepsilon[$, $T_\varepsilon\in\Delta$ такие, что из условия $\rho(T_\varepsilon)<\delta_\varepsilon$ следует неравенство $\rho(t)<\varepsilon<1$ для всех $t\in[T_\varepsilon,\omega[$.

Обозначим $T_\varepsilon^*=\max\{T_0,T_\varepsilon\}$. Тогда для всех $t\in[T_\varepsilon^*,\omega[$ одновременно выполняются неравенства (5), (5′) и $\rho(t)<\varepsilon<1$.

В результате замены (6) получим д. с. вида

$$\begin{gathered} \rho'=\pi_1\operatorname{Re}\lambda_{111}\rho+H_{1n_1},\\ v'_{ln_1}=\pi_1\lambda_{l11}\exp(i\varphi)+\pi_1\sum_{s=2}^{l-1}\lambda_{ls1}v_{sn_1}+\\ +\pi_1(\lambda_{l11}-\operatorname{Re}\lambda_{111})v_{ln_1}+H_{ln_1},\quad l=\overline{2,n_1},\\ V'_{n_s}=(\pi_s\Lambda_{n_s}-\pi_1\operatorname{Re}\lambda_{111}E_{n_s})V_{n_s}+H_{n_s},\quad s=\overline{2,k}, \end{gathered}\tag{7}$$

где

$$|H_{1n_1}|\le\rho\,\|R\|H+\rho^{1+\alpha}\mathfrak{L}H^{1+\alpha},$$

$$|H_{ln_1}|,\ \|H_{n_s}\|\le\|R\|(H+H^2)+\rho^{\alpha}\mathfrak{L}H^{1+\alpha},\quad l=\overline{2,n_1},\ s=\overline{2,k}.$$

Покажем, что существует решение д. с. (7), для которого справедлива оценка

$$|v_{ln_1}|,\ \|V_{n_s}\|\le(n-1)M_0E_s(T_\varepsilon^*),\quad l=\overline{2,n_1},\ s=\overline{2,k}. \tag{8}$$

Полагая $v_{ln_1}(T_\varepsilon^*)=\|V_{n_s}(T_\varepsilon^*)\|=0$, $l=\overline{2,n_1}$, $s=\overline{2,k}$, и предполагая, что (8) выполняется, получаем

$$|v_{ln_1}| \le \sum_{j=1}^{l-1} M^j J_{lj1}(T_\varepsilon^*, 1) + \sum_{j=1}^{l-1} M^{j-1}[A_{lj1}(T_\varepsilon^*, 1, H) + A_{lj1}(T_\varepsilon^*, 1, H^2) +$$

$$+ B_{lj1}(T_\varepsilon^*, 0, H)] \le M_1 E_1(T_\varepsilon^*) + M_1 \sum_{j=1}^{l-1} \Big\{ M_0 A_{lj1}[T_\varepsilon^*, 1, 1 + (n-1)E_1(T_\varepsilon^*)] +$$

$$+ M_0^2 A_{lj1}[T_\varepsilon^*, 1, (1 + (n-1)E_1(T_\varepsilon^*))^2] + M_0^{1+\alpha} B_{lj1}[T_\varepsilon^*, 0, 1 + (n-1)E_1(T_\varepsilon^*)] \Big\} \le$$

$$\le M_1 E_1(T_\varepsilon^*) + M_1(M_0 + M_0^2 + M_0^{1+\alpha}) C_1(T_\varepsilon^*, n-1) =$$

$$= E_1(T_\varepsilon^*)[M_1 + M_1(M_0 + M_0^2 + M_0^{1+\alpha})(M_0 - M_1)(M_0 + M_0^2 + M_0^{1+\alpha})^{-1}] =$$

$$= E_1(T_\varepsilon^*)(M_1 + M_0 - M_1) = M_0 E_1(T_\varepsilon^*) \le M_0(n-1)E_1(T_\varepsilon^*), \quad l = \overline{2, n_1}.$$

Аналогично для $\| V_{n_s} \|$, $s = \overline{2, k}$, имеем

$$\| V_{n_s} \| \le (n-1) M_1 M_0 \sum_{j=1}^{n_s} \sum_{l=1}^{j} \Big\{ A_{ljs}[T_\varepsilon^*, 1, 1 + (n-1)E_s(T_\varepsilon^*)] +$$

$$+ A_{jls}[T_\varepsilon^*, 1, (1 + (n-1)E_s(T_\varepsilon^*))^2] + B_{jls}[T_\varepsilon^*, 0, 1 + (n-1)E_s(T_\varepsilon^*)] \Big\} =$$

$$= (n-1) M_0 E_s(T_\varepsilon^*) M_1 E_s^{-1}(T_\varepsilon^*) C_s(T_\varepsilon^*, n-1) \le$$

$$\le (n-1) M_0 E_s(T_\varepsilon^*) M_1 M_1^{-1} = (n-1) E_s(T_\varepsilon^*) M_0, \quad s = \overline{2, k}.$$

Тогда для $\rho = \rho(t)$ из первого уравнения д. с. (7) получаем дифференциальное неравенство

$$\rho' \ge \pi_1 \operatorname{Re} \lambda_{111} \rho - \rho \| R \| [1 + (n-1) M_0 E_1(T_\varepsilon^*)] -$$

$$- \rho^{1+\alpha} \mathfrak{L} [1 + (n-1) M_0 E_1(T_\varepsilon^*)].$$

Используя принцип Чаплыгина [5] для $\rho = \rho(t)$, $0 < \rho(T_\varepsilon^*) < \varepsilon$, получаем оценку

$$\rho^\alpha(t) \ge \rho^\alpha(T_\varepsilon^*) \exp \left\{ \alpha \int_{T_\varepsilon^*}^t \pi_1 \operatorname{Re} \lambda_{111} \, d\tau \left[1 - \left(\alpha \int_{T_\varepsilon^*}^t \pi_1 \operatorname{Re} \lambda_{111} \, d\tau \right)^{-1} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \int_{T_\varepsilon^*}^t \| R \| [1 + (n-1) M_0 E_0(T_\varepsilon^*)] \, d\tau \right] \right\} \left\{ 1 + \alpha \rho^\alpha(T_\varepsilon^*) \times \right.$$

$$\times \int_{T_\varepsilon^*}^t \mathfrak{L} [1 + (n-1) M_0 E_0(T_\varepsilon^*)]^{1+\alpha} \exp \left\{ \alpha \int_{T_\varepsilon^*}^t \pi_1 \operatorname{Re} \lambda_{111} \, dt \times \right.$$

$$\left.\left. \times \left[1 - \left(\alpha \int_{T_\varepsilon^*}^t \pi_1 \operatorname{Re} \lambda_{111} \, d\tau \right)^{-1} \int_{T_\varepsilon^*}^t \| R \| [1 + (n-1) M_0 E_0(T_\varepsilon^*)] \, dt \right] \right\} d\tau \right\}^{-1}. \tag{9}$$

Из неравенства (9) следует, что $\rho(t) \to +\infty$, $t \uparrow \omega$, если выполнены условия теоремы. Это противоречит тому, что $\rho(t) < \varepsilon < 1$ для всех $t \in [T_\varepsilon^*, \omega[$. Теорема доказана.

Следствие. *Если д. с.* (1) *такова, что*

$$\lambda_{ssj} \equiv \lambda_j, \quad s = \overline{1, n_j}, \quad j = \overline{1, k}, \ \operatorname{Re}\lambda_1 > 0, \quad \int^{\omega} \pi_1 \operatorname{Re}\lambda_1 \, dt = +\infty,$$

$$\pi_j \operatorname{Re}\lambda_j - \pi_1 \operatorname{Re}\lambda_1 < 0, \quad \int^{\omega} (\pi_j \operatorname{Re}\lambda_j - \pi_1 \operatorname{Re}\lambda_1) \, dt = -\infty,$$

$$t^{n_1 - 1} \| R \| [(\pi_1 \operatorname{Re}\lambda_1)^{-n_1} + | \pi_j \operatorname{Re}\lambda_j - \pi_1 \operatorname{Re}\lambda_1 |^{-n_j}] = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

$$t^{\alpha(n_1 - 1)} \mathfrak{L} [(\pi_1 \operatorname{Re}\lambda_1)^{-n_1} + | \pi_j \operatorname{Re}\lambda_j - \pi_1 \operatorname{Re}\lambda_1 |^{-n_j}] = o(1), \quad t \uparrow \omega, \ j = \overline{2, k},$$

то д. с. (1) *имеет свойство* $\overline{St}$ *при* $t \uparrow \omega$.

***Замечание* 1.** Полученные результаты охватывают критические случаи устойчивости по Ляпунову при $t \uparrow \omega$, когда в д. с. (1), например, $\pi_j \operatorname{Re}\lambda_{ssj} = o_{sj}(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{1, n_j}$, $1 \le j \le k_0$, $\pi_j \operatorname{Re}\lambda_{ssj} : \Delta \to]-\infty, -\gamma]$, $\gamma \in]0, +\infty[$, $s = \overline{1, n_j}$, $k_0 < j \le k$.

3. Вспомогательные результаты. Приведение квазилинейной д. с. к д. с. специального вида (1). Приведем примеры д. с., которые можно преобразовать к д. с. вида (1). Рассмотрим д. с. вида

$$X' = \pi(t) P(t) X + S(t, X). \tag{10}$$

***Пример* 1.** Пусть существует предел $\lim\limits_{t \uparrow \omega} P(t) = P_0$, $\pi : \Delta \to]0, +\infty[$, $P \in C_{\Delta}^{h}(\mathbb{C}^{n \times n})$, $\| P^{(r)} \| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $r = \overline{1, h}$, $h \in N$, уравнение $\det(P_0 - \lambda E_n) = 0$ имеет корни λ_s^0 такие, что $\operatorname{Re}\lambda_s^0 = 0$, $s = \overline{1, n_0}$, $1 \le n_0 \le n$; $S \in C_{\Delta \times \mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n)$.

Используя метод обобщенных "срезающих" преобразований [6] и метод К. П. Персидского [7], д. с. (10) можно привести к д. с. (1), у которой $\Lambda_{n_s} \equiv \lambda_s E_{n_s} + R_{n_s}$, $|\operatorname{Re}\lambda_s| \in]0, +\infty[$, $\| R_{n_s} \| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{1, k}$.

***Пример* 2.** Пусть д. с. (10) — так называемая д. с. с медленно изменяющимися коэффициентами, т. е. $\pi : \Delta \to]0, +\infty[$, $P \in C_{\Delta}^{h}(\mathbb{C}^{n \times n})$ — ограниченная в Δ матрица, а предел $\lim\limits_{t \uparrow \omega} P(t)$ может не существовать $\| P^{(r)} \| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $r = \overline{1, h}$, $h \in N$, уравнение $\det(P - \lambda E_n) = 0$ имеет корни λ_s, $s = \overline{1, n}$; $S \in C_{\Delta \times \mathbb{C}^n}(\mathbb{C}^n)$ (например, $\pi = 2 + \cos\sqrt{t}$, $P = \| A_{sl} \sin t^{\alpha_{sl}} \|$, $A_{sl} = \text{const}$, $\alpha_{sl} \in]0, 1[$, $s, l = \overline{1, n}$).

Для приведения д. с. первого приближения такой д. с. (10) к д. с. первого приближения д. с. специального вида (1) воспользуемся результатом из [8].

Лемма. *Пусть* A_{sl}, $1 \le l \le n$, $s = \overline{1, n}$, — *алгебраические дополнения* l-*строки матрицы* $P - \lambda_1 E_n$, *удовлетворяющие условию*

$$\sum_{j=1}^{n} |A_{lj}|^2 > 0. \tag{11}$$

Тогда преобразование $P = \| p_{sl} \|$, $s, l = \overline{1, n}$,

$$Y = AX = \begin{bmatrix} \overline{p_{11}} - \overline{\lambda_1} & \overline{p_{12}} & \cdots & \overline{p_{1, l-1}} & A_{l1} & \overline{p_{1, l+1}} & \cdots & \overline{p_{1n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{p_{n1}} & \overline{p_{n2}} & \cdots & \overline{p_{n, l-1}} & A_{ln} & \overline{p_{n, l+1}} & \cdots & \overline{p_{nn}} - \overline{\lambda_1} \end{bmatrix} X \tag{12}$$

приводит д. с. (10) *к д. с. вида*

$$Y' = \pi(APA^{-1} - \pi^{-1}A'A^{-1})Y + S_1, \tag{13}$$

причем $Q \equiv APA^{-1} = \|q_{sl}\|$, $q_{11} \equiv \lambda_1$, $q_{1k} \equiv 0$, $k = \overline{2,n}$, $s, l = \overline{1,n}$, $S_1 \equiv$ $\equiv \det^{-1} AS(t, AY)$.

Замечание 2. Легко понять, что λ_s, $s = \overline{2,n}$, — собственные значения матрицы $Q_1 \equiv \|q_{sl}\|$, $s, l = \overline{2,n}$.

Если предположить, что B_{sl}, $1 \le l \le n-1$, $s = \overline{2, n-1}$, — алгебраические дополнения l-строки матрицы $Q_1 - \lambda_2 E_{n-1}$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{n-1} |B_{lj}|^2 > 0, \tag{14}$$

то преобразование

$$\begin{gathered} z_1 = y_1, \\ \operatorname{col}(z_2, \ldots, z_n) = B \operatorname{col}(y_2, \ldots, y_n), \end{gathered} \tag{15}$$

где

$$B = \begin{bmatrix} \overline{q_{22}} - \overline{\lambda_2} & \overline{q_{23}} & \ldots & \overline{q_{2,l-1}} & B_{l1} & \overline{q_{2,l+1}} & \ldots & \overline{q_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{q_{n2}} & \overline{q_{n3}} & \ldots & \overline{q_{n,l-1}} & B_{l,n-1} & \overline{q_{n,l+1}} & \ldots & \overline{q_{nn}} - \overline{\lambda_2} \end{bmatrix},$$

приводит д. с. (13) к д. с. вида

$$Z' = \pi(C + C_1)Z + S_2,$$

где $C = \|c_{sl}\|$, $s, l = \overline{1,n}$, $c_{11} \equiv \lambda_1$, $c_{1k} \equiv 0$, $k = \overline{2,n}$, $c_{22} \equiv \lambda_2$, $c_{2s} \equiv 0$, $s =$ $= \overline{3,n}$, $\pi\|C_1\| = O(|A|^{-1}|B|^{-1}\|P'\|)$, $t \uparrow \omega$, S_2 — вектор нелинейностей.

В результате последовательного применения преобразований типа (12), (15) к д. с. (10) ее можно привести к д. с. вида (1), матрица коэффициентов линейной части которой состоит из одного блока нижнетреугольного вида, если условия типа (11), (14) выполняются.

1. *Perron O.* Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Z. – 1930. – **32**. – S. 703–728.
2. *Костин А. В.* Устойчивость и асимптотика почти треугольных систем: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1962. – 126 с.
3. *Витриченко И. Е.* К устойчивости в критическом случае одного нулевого и пары чисто мнимых корней одного неавтономного квазилинейного уравнения n-го порядка // Диф. уравнения. – 1990. – **26**, № 12. – С. 2027–2046.
4. *Раппопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. – К.: Изд-во АН УССР, 1954. – 290 с.
5. *Чаплыгин С. А.* Изб. труды. – М.: Наука, 1976. – 495 с.
6. *Витриченко И. Е., Никоненко В. В.* О сведении к почти блок-треугольному диагональному виду линейной неавтономной системы в случае кратного нулевого собственного значения предельной матрицы коэффициентов // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 1994. – **110**. – P. 59–65.
7. *Персидский К. П.* О характеристических числах дифференциальных уравнений // Изв. АН КазССР. Сер. математики и механики. – 1947. – № 12, вып. 1. – С. 5–47.
8. *Костін О. В.* Асимптотичні формули для розв'язків лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь // Допов. АН УРСР. – 1962. – № 10. – С. 1293–1297.

Получено 29.07.92