УДК 517.9

Ф. А. Асроров, асп.,
Н. А. Перестюк, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ФУНКЦИЯ ГРИНА – САМОЙЛЕНКО И СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЙ*

An integral invariant set is constructed for systems of differential equations by using the Green – Samoilenko function. Asymptotic stability of this set is considered.

Для систем диференціальних рівнянь побудована інтегральна інваріантна множина з використанням функції Гріна – Самойленка. Досліджується питання асимптотичної стійкості цієї множини.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t, \varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(t, \varphi)x + f(t, \varphi), \tag{1}$$

в которой $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in R^n$, $a(t, \varphi)$, $f(t, \varphi)$ и $P(t, \varphi)$ — непрерывные по t и удовлетворяющие условию Липшица по φ соответственно векторные и матричная функции, 2π-периодические по φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, ограниченные при $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $\mathcal{T}_m$ — m-мерный тор.

Следуя [1, 2], введем понятие функции Грина – Самойленко задачи об интегральных множествах дифференциальных систем и укажем достаточные условия существования интегральных множеств; тем самым распространим результат § 4, гл. 3 [1] на случай неавтономных расширений дифференциальных уравнений.

В силу компактности фазового пространства системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t, \varphi) \tag{2}$$

и сделанных предположений относительно функции $a(t, \varphi)$ каждое решение $\varphi_t(\tau, \varphi)$, $\varphi_\tau(\tau, \varphi) = \varphi$, при любых $\tau \in R$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$ существует и продолжимо на всю ось R.

Рассмотрим линейную систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t, \varphi_t(\tau, \varphi))x \tag{3}$$

и обозначим через $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ матрицант этой системы. В силу непрерывной зависимости $\varphi_t(\tau, \varphi)$ от параметров $\tau \in R$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$ матрицант $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ от этих параметров зависит непрерывным образом.

Покажем, что

$$\Omega_s^t(\tau, \varphi_\tau(\sigma, \varphi)) = \Omega_s^t(\sigma, \varphi) \tag{4}$$

при любых t, s, τ, $\sigma \in R$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Для этого в тождестве

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$$\frac{d}{dt}\,\Omega_s^t(\tau,\varphi) = P\big(t,\varphi_t(\tau,\varphi)\big)\,\Omega_s^t(\tau,\varphi)$$

заменим φ на $\varphi_\tau(\sigma,\varphi)$ и, учитывая свойство решений уравнений (2), выражающееся соотношением

$$\varphi_t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi)) = \varphi_t(\sigma,\varphi),$$

получим

$$\frac{d}{dt}\,\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi)) = P\big(t,\varphi_t(\sigma,\varphi)\big)\,\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi)).$$

Последнее тождество означает, что $\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))$ является фундаментальной матрицей системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P\big(t,\varphi_t(\sigma,\varphi)\big)x,$$

принимающей при $t=s$ значение E. Но это свойство имеет матрица $\Omega_s^t(\sigma,\varphi)$. Это возможно лишь при совпадении матриц $\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))$ и $\Omega_s^t(\sigma,\varphi)$, что и доказывает справедливость равенства (4).

Пусть $C(t,\varphi)$ — непрерывная при $t\in R$, $\varphi\in\mathfrak{T}_m$, 2π-периодическая по φ_ν, $\nu=\overline{1,m}$, матричная функция. Положим

$$G(t,s,\varphi) = \begin{cases} \Omega_s^t(t,\varphi)C(s,\varphi_s(t,\varphi)), & s\le t;\\ -\Omega_s^t(t,\varphi)[E-C(s,\varphi_s(t,\varphi))], & s>t, \end{cases} \tag{5}$$

где $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ — матрицант системы уравнений (3), и назовем $G(t,s,\varphi)$ функцией Грина – Самойленко системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi),\quad \frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x, \tag{6}$$

если

$$\int_{-\infty}^{\infty}\big\|G(t,s,\varphi)\big\|\,ds \le k < \infty \tag{7}$$

при всех $t\in R$, $\varphi\in\mathfrak{T}_m$. Укажем простейшие свойства функции Грина – Самойленко (5). Из определения этой функции следует, что $G(t,s,\varphi)$ непрерывна при всех $t,s\in R$, $t\ne s$, $\varphi\in\mathfrak{T}_m$, 2π-периодическая, причем

$$G(s+0,s,\varphi) - G(s-0,s,\varphi) = E;$$

$$G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) = \begin{cases} \Omega_s^t(t,\varphi)C\big(s,\varphi_s(\tau,\varphi)\big), & s\le t;\\ -\Omega_s^t(t,\varphi)\big[E-C\big(s,\varphi_s(\tau,\varphi)\big)\big], & s>t. \end{cases} \tag{8}$$

При $s=\tau$ имеем

$$G(t,\tau,\varphi_t(\tau,\varphi)) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(t,\varphi)C(\tau,\varphi), & \tau\le t;\\ -\Omega_\tau^t(t,\varphi)\big[E-C(\tau,\varphi)\big], & \tau>t. \end{cases}$$

Видим, что матрица $G(t,\tau,\varphi_t(\tau,\varphi))$ состоит из решений однородной системы (3), рассматриваемых соответственно при $t \geq \tau$ и $t < \tau$.

Пусть $f(t, \varphi)$ — непрерывная и ограниченная при всех $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, 2π-периодическая по φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, функция. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, s, \varphi) f(s, \varphi_s(t, \varphi)) ds. \tag{9}$$

Согласно (7) имеем

$$\left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, s, \varphi) f(s, \varphi_s(t, \varphi)) ds \right\| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \| G(t, s, \varphi) \| ds \sup_{t \in R} \max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \| f(t, \varphi) \|.$$

Положим

$$u(t, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, s, \varphi) f(s, \varphi_s(t, \varphi)) ds. \tag{10}$$

Аналогично [1] убеждаемся, что $u(t, \varphi)$ — непрерывная по $t \in R$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$ функция, 2π-периодическая по φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$.

Убедимся, что множество $x = u(t, \varphi)$, $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, является интегральным множеством системы уравнений (1). Для этого рассмотрим функцию $x_t(\tau, \varphi) = u(t, \varphi_t(\tau, \varphi))$, где $\varphi_t(\tau, \varphi)$, $\varphi_\tau(\tau, \varphi) = \varphi$ — решение первого из уравнений (1).

Согласно представлению (10) и равенству (8) имеем

$$x_t(\tau, \varphi) = u(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, s, \varphi_t(\tau, \varphi)) f\big(s, \varphi_s(t, \varphi_t(\tau, \varphi))\big) ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega_s^t(\tau, \varphi) C\big(s, \varphi_s(\tau, \varphi)\big) f\big(s, \varphi_s(\tau, \varphi)\big) ds +$$

$$+ \int\limits_{t}^{\infty} \Omega_s^t(\tau, \varphi) \Big[C\big(s, \varphi_s(\tau, \varphi)\big) - E \Big] f\big(s, \varphi_s(\tau, \varphi)\big) ds.$$

Дифференцируя последнее соотношение по t, находим

$$\frac{dx_t(\tau, \varphi)}{dt} = \frac{d}{dt} u(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) = P(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega_s^t(\tau, \varphi) \times$$

$$\times C(s, \varphi_s(\tau, \varphi)) f(s, \varphi_s(\tau, \varphi)) ds + C(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) f(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) +$$

$$+ P(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) \int\limits_{t}^{\infty} \Omega_s^t(\tau, \varphi) \Big[C\big(s, \varphi_s(\tau, \varphi)\big) - E \Big] f\big(s, \varphi_s(\tau, \varphi)\big) ds -$$

$$- [C(t, \varphi_t(\tau, \varphi))_r - E] f(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) = P(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) u(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) +$$

$$+ f(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) = P(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) x_t(\tau, \varphi) + f(t, \varphi_t(\tau, \varphi))$$

для любого $t \in R$, $\tau \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Последнее равенство доказывает, что вдоль любого решения первого из уравнений (1) функция $u(t, \varphi_t(\tau, \varphi))$ непрерывно дифференцируема по $t \in R$ и удовлетворяет второму из уравнений (1), если в нем φ заменить на $\varphi_t(\tau, \varphi)$. Следовательно, множество $x = u(t, \varphi)$ является интегральным множеством системы уравнений (1).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в системе уравнений* (1) *функции* $u(t, \varphi)$, $f(t, \varphi)$, $P(t, \varphi)$ *непрерывны по* $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, *ограничены при всех* $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, 2π*-периодические по* φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, *а функция* $a(t, \varphi)$ *удовлетворяет условию Липшица по* φ *равномерно относительно* $t \in R$. *Пусть также для системы* (6) *существует функция Грина – Самойленко* $G(t, \tau, \varphi)$, *удовлетворяющая неравенству* (7). *Тогда система уравнений имеет интегральное множество*

$$x = u(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s, \varphi) f(s, \varphi_s(t, \varphi)) ds, \quad t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

причем

$$\sup_{t \in R} \max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|u(t, \varphi)\| \le K \sup_{t \in R} \max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \|f(t, \varphi)\|,$$

где

$$K = \sup_{t \in R} \max_{\varphi \in \mathcal{T}_m} \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t, s, \varphi)\| ds.$$

Теорема 2. *Предположим, что система уравнений* (1) *удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Пусть также матрицант системы* (6) $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|\Omega_s^t(\tau, \varphi)\| \le K e^{-\gamma(t-s)}, \quad t \ge s \in R.$$

Тогда система уравнений (6) *имеет интегральное множество*

$$x = u(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{t} G(t, s, \varphi) f(s, \varphi_s(t, \varphi)) ds, \quad t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

и это множество является асимптотически устойчивым.

Доказательство. Пусть $\varphi_t(\tau, \varphi)$ — решение системы уравнений (6) и $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ — матрицант системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) x.$$

Тогда, очевидно, существует функция Грина – Самойленко в следующем виде:

$$G(t, s, \varphi) = \begin{cases} \Omega_s^t(t, \varphi) & \text{при} \quad s < t; \\ 0 & \text{при} \quad s \ge t \end{cases} \tag{11}$$

((11) получается из (5), если в (5) положить $C(s, \varphi_s(\tau, \varphi)) \equiv E$).

В системе уравнений (6) сделаем замену: $x = u(t, \varphi) + z$. Тогда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dz}{dt} = P(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) u(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) +$$

$$+ P(t, \varphi_t(\tau, \varphi))z + f(t, \varphi_t(\tau, \varphi)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} a(t, \varphi) + \frac{dz}{dt} = P(t, \varphi_t(\tau, \varphi))u(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) +$$

$$+ P(t, \varphi_t(\tau, \varphi))z + f(t, \varphi_t(\tau, \varphi)).$$

Отсюда

$$\frac{dz}{dt} = P(t, \varphi_t(\tau, \varphi))z. \tag{12}$$

Обозначим через $z = z(t, \varphi, z_0) = \Omega_0^t(\tau, \varphi)z_0$ общее решение системы уравнений (12). Используя свойства матрицы $\Omega_0^t(\tau, \varphi)$, для этого решения получаем оценку

$$\|z(t, \varphi, z_0)\| = \|\Omega_0^t(\tau, \varphi)z_0\| = \|\Omega_\tau^t(\tau, \varphi)\Omega_0^\tau(\tau, \varphi)z_0\| =$$

$$= \|\Omega_\tau^{t-\tau+\tau}(\tau, \varphi)z(\tau, \dot{\varphi}, z_0)\| \le \|\Omega_\tau^{t-\tau}(\tau, \varphi_t(\tau, \varphi))\| \|z(\tau, \varphi, z_0)\| \le$$

$$\le Ke^{-\gamma(t-\tau)}\|z(\tau, \varphi, z_0)\|, \tag{13}$$

справедливую для всех $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Следовательно, имеем

$$\|x(t, \varphi_t(\tau, \varphi), x_0) - u(t, \varphi_t(\tau, \varphi))\| = \|z(t, \varphi, z_0)\| \le Ke^{-\gamma(t-\tau)}\|z(t, \varphi, z_0)\|.$$

А это показывает, что

$$\|x(t, \varphi_t(\tau, \varphi), x_0) - u(t, \varphi_t(\tau, \varphi))\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.

Получено 07.05.93