УДК 519.21

Н. В. Москальцова, асп.,
В. М. Шуренков, д-р физ.-мат. наук (Киев. автомоб.-дор. ин-т)

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ЭРГОДИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

The central limit theorem is proved for stoshastically additive functionals of ergodic Markov chains.

Доведено центральну граничну теорему для стохастично адитивних функціоналів від ергодичних ланцюгів Маркова.

Пусть X_n, $n = 0, 1, \ldots$, — однородная цепь Маркова в некотором измеримом фазовом пространстве $(E, \mathcal{A})$ со счетно-порожденной σ-алгеброй $\mathcal{A}$. Потребуем также, чтобы цепь X_n была эргодична в смысле [1]. Обозначим через π стационарную вероятностную меру цепи, а через $Q^n(x, A)$ — вероятность перехода за n шагов. Тогда по определению эргодичности [1]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(x, A) = \pi(A)$$

для всех $x \in E$, $A \in \mathcal{A}$. Обозначим через $\mathcal{B}$ борелевскую σ-алгебру на вещественной прямой R.

Рассмотрим стохастически аддитивный функционал S_n от цепи X_n, т. е. такую последовательность случайных величин S_n, $n = 0, 1, \ldots$, что пара (X_n, S_n) образует однородную цепь Маркова в фазовом пространстве $(E \times R, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$, причем условное распределение пары (X_n, S_n) при условии $X_0 = x$, $S_0 = a$ совпадает с условным распределением пары $(X_n, a + S_n)$ при условии $X_0 = x$, $S_0 = 0$ для всех $x \in E$, $a \in R$. Как указано в [1] (и это нетрудно доказать), для любого такого стохастически аддитивного функционала S_n можно подобрать последовательность независимых одинаково распределенных случайных функций $\xi_k(x, y) = \xi_k(x, y, \omega)$, $k = 1, 2, \ldots$, измеримым образом зависящих от совокупности переменных $x \in E$, $y \in E$, $\omega \in \Omega$ и таких, что распределение последовательности (X_n, S_n), $n = 0, 1, \ldots$, совпадает с распределением последовательности $\left(X_n, S_0 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k\left(X_{k-1}, X_k\right)\right)$, $n = 0, 1, \ldots$. Здесь, как обычно, $\sum_{k=1}^{0} = 0$, и S_0 не зависит ни от цепи X_n, ни от $\xi_k(x, y)$. Это позволяет не ограничивая общности считать (мы так и поступим), что

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k\left(X_{k-1}, X_k\right).$$

Кроме того, будем предполагать, что

$$\mathbb{P}_\pi \xi_1(X_0, X_1) = 0, \tag{1}$$

$$\mathbb{P}_\pi \xi_1^2(X_0, X_1) < \infty, \tag{2}$$

где $\mathbb{P}_\pi = \int_E \pi(dx)\, \mathbb{P}_x$, а $\mathbb{P}_x$ — символ условного среднего при условии, что $X_0 = x$, $S_0 = a$.

В дальнейшем нам понадобится ЦПТ из [1, с. 252]. Приведем формулировку этой теоремы в эквивалентной, более удобной для нас форме.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1), (2). *Тогда, если найдется последовательность* $t_n \uparrow 1$ *и* π*-положительное множество* $D \in \mathcal{A}$ *такие, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(1-t_n)^2 \sum_{k\geq 1} t_n^k \int_D \pi(dx)\,\mathbb{P}_x S_k^2 < \infty, \tag{3}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(1-t_n)\left|\sum_{k\geq 1} t_n^k \int_A \pi(dx)\,\mathbb{P}_x S_k\right| < \infty \tag{4}$$

для всех $A \subset \mathcal{A}D$, *то стохастически аддитивный функционал* $S_n/\sqrt{n}$ *имеет в пределе при* $n\to\infty$ *симметричное нормальное распределение, дисперсия которого равна нулю тогда и только тогда, когда* $\xi_1(X_0, X_1) = u(X_1) - u(X_0)$ $\mathbb{P}_\pi$*-п. н. с некоторой* $\mathcal{A}$*-измеримой функцией* $u(x)$, $x \in E$.

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть стохастически аддитивные функционалы* S_n' *и* S_n'' *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *со множествами* D' *и* D'' *соответственно, причем* $\pi(D' \cap D'') > 0$, *и с одной и той же последовательностью* $t_n \uparrow 1$. *Тогда* $S_n = S_n' + S_n''$ *тоже удовлетворяет ЦПТ с множеством* $D = D' \cap D''$.

Доказательство немедленно следует из элементарных неравенств $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ и $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Далее, обозначим

$$v(x) = \mathbb{P}_x \xi_1(X_0, X_1) = \mathbb{P}_x \xi_1(x, X_1), \tag{5}$$

$$\eta_k(x,y) = \xi_k(x,y) - v(x), \tag{6}$$

$$S_n' = \sum_{k=1}^n v(X_{k-1}),$$

$$S_n'' = \sum_{k=1}^n \eta_k(X_{k-1}, X_k), \tag{7}$$

тогда, очевидно, $S_n = S_n' + S_n''$.

Покажем, что функционал S_n'' удовлетворяет условиям теоремы 1 с $D = E$ и любой последовательностью $t_n \uparrow 1$. Для этого достаточно проверить только условие (3), ибо условие (4) тривиально следует из (5)–(7). Нетрудно подсчитать, что $\mathbb{P}_x S_n''^2 = n\,\mathbb{P}_x S_1''^2$. Отсюда тривиально следует (3) с $D = E$ для произвольной последовательности $t_n \uparrow 1$.

Напомним, что класс $\mathcal{A}$-измеримых множеств $\mathcal{E}$ называется мизерным, если он замкнут относительно конечного объединения своих множеств и содержит все $\mathcal{A}$-измеримые подмножества своих элементов, и полным, если $\exists\,\{E_m\}$: $E \subset \bigcup_m E_m$, $E_m \in \mathcal{E}$.

$\mathcal{A}$-измеримую функцию f будем называть $\mathcal{E}$-финитной, если $f = 0$ вне некоторого множества из мизерного класса $\mathcal{E}$, т. е. $\{f \neq 0\} \in \mathcal{E}$.

Неотрицательное ядро $W(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{A}$, будем называть $\mathcal{E}$-ограниченным, если $\sup_{x\in E} W(x, D) < \infty$ для всех $D \in \mathcal{E}$.

В работе [2] показано существование такого мизерного полного класса $\mathcal{E}$, что функционал S_n' удовлетворяет условиям теоремы 1 с $D = E$ и произвольной последовательностью $t_n \uparrow 1$, как только функция $v(x)$ ограничена и $\mathcal{E}$-финитна.

Из изложенного с учетом леммы следует справедливость такой теоремы.

Теорема 2. *Существует такой мизерный полный класс $\mathcal{E}$, что стохастически аддитивный функционал $S_n / \sqrt{n}$ асимптотически нормален, как только выполнены условия* (1), (2) *и функция $v(x)$ ограничена и $\mathcal{E}$-финитна.*

Замечания. **1.** Среднее значение предельного нормального распределения равно нулю, дисперсия положительна, за исключением ситуации, описанной в теореме 1.

2. Используя методы работ [1, 3], можно показать, что дисперсия предельного нормального закона равна

$$\mathbb{P}_\pi S_1^2 + 2 \int_E \int_E v^*(x) \pi(dx) V(x, dy) v(y),$$

где $v^*(x) = \mathbb{P}_\pi (S_1 \mid X_1 = x)$, а $V(x, A)$ — любое $\mathcal{E}$-ограниченное неотрицательное ядро, определяемое из соотношения

$$\lim_{t \uparrow 1} \sum_{n \geq 1} t^n \int_E Q^n(x, dy) f(y) = \int_E V(x, dy) f(y)$$

для всех ограниченных $\mathcal{E}$-финитных функций f с $\int_E \pi(dx) f(x) = 0$.

1. *Шуренков В. М.* Эргодические процессы Маркова. – М.: Наука, 1989. – 336 с.
2. *Москальцова Н. В., Шуренков В. М.* Центральная предельная теорема для специальных классов функций от эргодических цепей // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 8. – С. 1092 – 1094.
3. *Москальцова Н. В., Шуренков В. М.* Центральная предельная теорема для центрированных частот счетной эргодической цепи Маркова // Там же. – 1993. – **45**, № 12. – С. 1713 – 1715.

Получено 01.04.93