пространства $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$, $N: \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ — c-непрерывный оператор, для которого $l = \overline{\lim}_{r \to +\infty} \sup_{\|x\|_{\mathfrak{M}} \leqslant r} \| Nx \|_{\mathfrak{M}} (\| x \|_{\mathfrak{M}} + 1)^{-1} < \infty$, и $f \in \mathfrak{M}$.

Теорема 2. *Пусть*: 1) $R(A)$ *замкнуто*; 2) Ker A *обладает замкнутым дополнительным подпространством*; 3) $R(N) \subset R(A)$; 4) l — *достаточно малое число. Тогда* $R(A + N) = R(A)$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 2. Необходимые и достаточные условия выполнения первого условия теорем 1 и 2 можно найти, например, в [7].

1. *Слюсарчук В. Е.* Об ограниченных решениях нелинейных почти периодических дискретных систем // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1979.— № 7.— С. 520 — 522.
2. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные решения нелинейных эллиптических уравнений // Успехи мат. наук.— 1980.— **35**, № 1.— С. 215—216.
3. *Слюсарчук В. Е.* Нелокальные теоремы об ограниченных решениях функционально-дифференциальных уравнений с нелипшицевыми нелинейностями // Исследование дифференциальных, разностных и дифференциально-разностных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1980.— С. 121—130.
4. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные решения импульсных систем // Диф. уравнения.— 1983.— **19**, № 4.— С. 588—596.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1968.— 496 с.
6. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу.— М. : Мир, 1977.— 232 с.
7. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1971.— 104 с.

Укр. ин-т инженеров вод. хоз-ва, Ровно

Получено 18.06.85

УДК 517.9

В. П. Шпакович, В. И. Мунтян

Метод усреднения для дифференциальных уравнений с максимумами

В настоящей работе исследуется вопрос применимости асимптотического метода усреднения Крылова — Боголюбова — Митропольского [1, 2] для исследования систем дифференциальных уравнений с максимумами. Развитие теории функционально-дифференциальных уравнений с максимумами связано с их применением в различных задачах автоматического управления [3, 4].

В работах [5, 6] показано, что обобщение и распространение первой основной теоремы Н. Н. Боголюбова на более широкий класс уравнений существенно связано с классическими теоремами анализа о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра. Указанный подход используется нами для обоснования применения метода усреднения на конечном временном интервале к исследованию дифференциальных уравнений с максимумами.

Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(t, x(t), \max\{x(s) : s \in [t-h, t]\}, \lambda), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$x(t, \lambda) = \varphi(t, \lambda), \ -h \leqslant t \leqslant 0, \tag{1}$$

где $x \in D \subset R^n$, $\lambda \in \Lambda$, D — ограниченная область, а Λ — множество значений параметра λ, для которого λ_0 — предельная точка.

Будем говорить, что функция $X(t, x, y, \lambda)$ интегрально непрерывна по параметру λ в точке λ_0, если при всех $t \in [0, T]$

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_0^t X(\tau, x, y, \lambda)\, d\tau = \int_0^t X(\tau, x, y, \lambda_0)\, d\tau. \tag{2}$$

Лемма 1. *Пусть имеет место условие* (2) *и* $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$ — *кусочно-постоянные функции, определенные на* $[0, T]$, $\tilde{x}(t) = a_i \in D$, $\tilde{y}(t) = b_i \in D$ *при* $\tau_{i-1} \leqslant t < \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = T$. *Тогда*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_0^t X(\tau, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \lambda)\, d\tau = \int_0^t X(\tau, \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \lambda_0)\, d\tau.$$

Доказательство леммы 1 легко следует из (2).

Лемма 2. *Пусть функция* $X(t, x, y, \lambda)$ *непрерывна по* x, y *равномерно относительно всех переменных* t, x, y, λ *и семейство функций* $x(t, \lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, *удовлетворяет условию*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \max_{t \in [-h, T]} |x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)| = 0.$$

Тогда

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_0^t X(\tau, x(\tau, \lambda), \max_{s \in [\tau - h, \tau]} x(s, \lambda), \lambda)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t X(\tau, x(\tau, \lambda_0), \max_{s \in [\tau - h, \tau]} x(s, \lambda_0), \lambda_0)\, d\tau \tag{3}$$

равномерно относительно $t \in [0, T]$.

Доказательство. В силу условий леммы для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $|x_1 - x_2| < \delta\ (y_1(t) - y_2(t)| = |\max_{s \in [t-h, t]} x_1(s) - \max_{s \in [t-h, t]} x_2(s)| \leqslant \max_{s \in [t-h, t]} |x_1(s) - x_2(s)| < \delta)$

$$|X(t, x_1, y_1, \lambda) - X(t, x_2, y_2, \lambda)| < \varepsilon (6T)^{-1}.$$

Пусть $\tilde{x}(t)$ — кусочно-постоянная функция, такая, что $\sup_{t \in [-h, T]} |\tilde{x}(t) - x(t, \lambda_0)| < \delta/2$. Обозначим через $V(\lambda_0)$ такую окрестность точки λ_0, что при всех $\lambda \in V(\lambda_0)$

$$\sup_{t \in [-h, T]} |x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)| < \delta/2, \quad \Bigl| \int_0^t X(\tau, \tilde{x}(\tau), \max_{s \in [\tau - h, \tau]} \tilde{x}(s), \lambda)\, d\tau -$$

$$- \int_0^t X(\tau, \tilde{x}(\tau), \max_{s \in [\tau - h, \tau]} \tilde{x}(s), \lambda_0)\, d\tau \Bigr| < \varepsilon/6. \tag{4}$$

Такой выбор $V(\lambda_0)$ возможен в силу леммы 1 и условий леммы 2. Для значений $\lambda \in V(\lambda_0)$ в силу выбора δ справедливы следующие неравенства:

$$\int_0^t |X(\tau, x(\tau, \lambda), \max_{s \in [\tau - h, \tau]} x(s, \lambda), \lambda) - X(\tau, x(\tau, \lambda_0), \max_{s \in [\tau - h, \tau]} x(s, \lambda), \lambda)|\, d\tau < \varepsilon/6,$$

$$\int_0^t |X(\tau, x(\tau, \lambda_0), \max_{s \in [\tau - h, \tau]} x(s, \lambda), \lambda) - X(\tau, \tilde{x}(\tau), \max_{s \in [\tau - h, \tau]} x(s, \lambda), \lambda)|\, d\tau < \varepsilon/6,$$

$$\int_0^t |X(\tau, \tilde{x}(\tau), \max_{s \in [\tau - h, \tau]} \tilde{x}(s), \lambda_0) - X(\tau, x(\tau, \lambda_0), \max_{s \in [\tau - h, \tau]} \tilde{x}(s), \lambda_0)|\, d\tau < \varepsilon/6, \tag{5}$$

$$\int_0^t |X(\tau, x(\tau, \lambda_0), \max_{s \in [\tau - h, \tau]} \tilde{x}(s), \lambda_0) - X(\tau, x(\tau, \lambda_0), \max_{s \in [\tau - h, \tau]} x(s, \lambda_0), \lambda_0)|\, d\tau < \varepsilon/6.$$

Так как при $\lambda \in V(\lambda_0)$

$$|\max_{s \in [\tau - h, \tau]} x(s, \lambda) - \max_{s \in [\tau - h, \tau]} \tilde{x}(s)| \leqslant |\max_{s \in [\tau - h, \tau]} x(s, \lambda) - \max_{s \in [\tau - h, \tau]} x(s, \lambda_0)| +$$

$$+ \left| \max_{s\in[\tau-h,\tau]} x(s, \lambda_0) - \max_{s\in[\tau-h,\tau]} \tilde{x}(s) \right| \leqslant \max_{s\in[\tau-h,\tau]} |x(s, \lambda) - x(s, \lambda_0)| +$$

$$+ \max_{s\in[\tau-h,\tau]} |x(s, \lambda_0) - \tilde{x}(s)| < \delta,$$

то

$$\int_0^t |X(\tau, \tilde{x}(\tau), \max_{s\in[\tau-h,\tau]} x(s, \lambda), \lambda) - X(\tau, \tilde{x}(\tau), \max_{s\in[\tau-h,\tau]} \tilde{x}(s), \lambda)| \, d\tau < \varepsilon/6 \qquad (6)$$

Из неравенств (4) — (6) очевидным образом вытекает оценка

$$\left| \int_0^t [X(\tau, x(\tau, \lambda), \max_{s\in[\tau-h,\tau]} x(s, \lambda), \lambda) - X(\tau, x(\tau, \lambda_0), \max_{s\in[\tau-h,\tau]} x(s, \lambda_0), \lambda_0)] \, d\tau \right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Пусть для уравнения* (1) *выполняются условия*:

1) *функция* $X(t, x, y, \lambda)$ *равномерно ограничена и непрерывна по* x, y *равномерно относительно* t, x, y, λ;

2) *функция* $X(t, x, y, \lambda)$ *интегрально непрерывна по* λ *в точке* λ_0;

3) *уравнение* (1) *при* $\lambda = \lambda_0$ *имеет единственное решение* $x(t, \lambda_0)$, *определенное при* $0 \leqslant t \leqslant T$ *и принадлежащее области* D *вместе с некоторой* ρ-*окрестностью*;

4) *функция* $\varphi(t, \lambda)$ *непрерывна по* t, $|\varphi(t, \lambda)| \leqslant M$, $\varphi(t, \lambda) \in D$, $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \varphi(t, \lambda) = \varphi(t, \lambda_0)$ *равномерно относительно* t.

Тогда для любого $\eta > 0$ *существует такая* δ-*окрестность точки* λ_0, *что при* $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ *для всех решений* $x(t, \lambda)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющих условию* $|\varphi(0, \lambda) - \varphi(0, \lambda_0)| < \delta$, *справедливо неравенство* $|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)| < \eta$ *для* $t \in [0, T]$.

Доказательство. Решения $x(t, \lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, уравнения (1) удовлетворяют уравнению

$$x(t, \lambda) = \varphi(0, \lambda) + \int_0^t X(\tau, x(\tau, \lambda), \max_{s\in[\tau-h,\tau]} x(s, \lambda), \lambda) \, d\tau,$$

$$x(t, \lambda) = \varphi(t, \lambda) \text{ при } t \in [-h, 0].$$

Эти решения образуют равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство функций, так как $|X(t, x, y, \lambda)| \leqslant K$, $|\varphi(t, \lambda)| \leqslant M$. По теореме Асколи — Арцела это семейство функций является компактным в смысле равномерной сходимости. Для доказательства теоремы покажем, что любая последовательность решений $x(t, \lambda_n)$ уравнения (1) имеет пределом функцию $x(t, \lambda_0)$ при $\lambda_n \to \lambda_0$. Пусть $x(t, \lambda_n)$ равномерно сходится на $[0, T]$ к некоторой непрерывной функции $y(t)$, причем $y(t) \in D$ при $t \in [0, T]$.

В силу соотношения (3) получаем

$$y(t) = \varphi(0, \lambda_0) + \int_0^t X(\tau, x(\tau, \lambda_0), \max_{s\in[\tau-h,\tau]} x(s, \lambda_0), \lambda_0) \, d\tau,$$

$$y(t) = \varphi(t, \lambda_0) \text{ при } t \in [-h, 0].$$

Следовательно, функция $y(t)$ является решением уравнения (1) при $\lambda = \lambda_0$. Из единственности решения $x(t, \lambda_0)$ следует, что $y(t) = x(t, \lambda_0)$ при $t \in [0, T]$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь уравнение

$$dx(t)/dt = \varepsilon X(t, x(t), \max_{s\in[t-h,t]} x(s)), \quad x(t) = \varphi(t, \varepsilon), \quad t \in [-h, 0] \qquad (7)$$

Введя в уравнении (7) замену независимого переменного по формуле $\varepsilon t = t_1$ и обозначив $X(t_1/\varepsilon, x(t_1/\varepsilon), \max\limits_{s\in[t_1\varepsilon^{-1}-h, t_1\varepsilon^{-1}]} x(s))$ через $X_1(t_1, x(t_1),$

$\max\limits_{s\in[t_1-h,t_1]} x(s), \varepsilon)$, получим уравнение

$$dx(t_1)/dt_1 = X_1(t_1, x(t_1), \max_{s\in[t_1-h,t_1]} x(s)), \quad x(t_1) = \varphi(t_1, \varepsilon), \quad t_1 \in [-h, 0].$$

Предположим, что для $x \in D$, $y \in D$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T X(t, x, y)\, dt = X_0(x, y) \tag{8}$$

равномерно относительно x, y.

Покажем, что из (8) следует условие (3). Для этого положим в равенстве (8) $T = t_1\varepsilon^{-1}$, $t_1 \leqslant T$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon t_1^{-1} \int_0^{t_1\varepsilon^{-1}} X(t, x, y)\, dt = X_0(x, y).$$

Вводя замену переменной интегрирования $t = t\varepsilon^{-1}$ и умножая обе части полученного равенства на t_1, получаем соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{t_1} X(\tau\varepsilon^{-1}, x, y)\, d\tau = t_1 X_0(x, y) = \int_0^{t_1} X_0(x, y)\, d\tau,$$

которое аналогично соотношению (3).

Таким образом, из теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*:

1) *функция* $X(t, x, y)$ *определена в области* $\{(t, x, y) : t \in [0, T],\ x \in D,\ y \in D\}$, $D \subset R^n$, *и в этой области равномерно ограничена и непрерывна по* x, y *равномерно относительно* t, x, y;

2) *выполнено условие* (8);

3) *уравнение* $d\zeta(t)/dt = \varepsilon X_0(\zeta(t), \zeta(t))$ *имеет единственное решение* $\zeta = \zeta(t)$, *удовлетворяющее начальному условию* $\zeta(0) = \zeta_0$, *определенное для* $t \in [-h, +\infty)$ *и лежащее в области* D *вместе с некоторой своей* ρ*-окрестностью.*

Тогда для каждого $\eta > 0$ *существует такое* ε_0, *что при* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *решение* $x(t, \varepsilon)$ *уравнения* (7), *удовлетворяющее условию* $\varphi(t, \varepsilon) = \zeta(\varepsilon t)$ *при* $t \in [-h, 0]$, *существует на интервале* $[0, T\varepsilon^{-1}]$ *и удовлетворяет на этом интервале неравенству* $|x(t, \varepsilon) - \zeta(\varepsilon t)| < \eta$.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.
3. *Попов Е. П.* Автоматическое регулирование и управление.— М. : Физматгиз, 1962.— 388 с.
4. *Рябов Ю. А., Магомедов А. Р.* Дифференциальные уравнения с максимумами.— Баку, 1983.— 32 с.— (Препринт / АН АзССР. Ин-т физики; № 75).
5. *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова // Укр. мат. журн.— 1952.— 4, № 2.— С. 215—219.
6. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике// Успехи мат. наук.— 1955.— 10, вып. 3.— С. 147—152.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получена 31.01.86