УДК 514.17

В. Л. Дольников

Замечание об отделимости множеств гиперплоскостью

Рассмотрим в векторном пространстве L над полем действительных чисел два непустых множества A и B. В настоящей статье рассматривается следующий вопрос: при каких условиях существует гиперплоскость такая, что A и B находятся в разных открытых полупространствах, определяемых этой гиперплоскостью? Если такая гиперплоскость существует, будем говорить, что A и B отделяются гиперплоскостью. Этот вопрос имеет важное значение в различных областях математики, например, в теории распознавания образов [1] и в теории приближения функций [2]. Легко видеть, что необходимым условием отделимости множеств A и B является пустота пересечения их выпуклых оболочек $\operatorname{con} A$ и $\operatorname{con} B$. Очевидно, что если множества лежат в метрическом векторном пространстве и расстояние между ними велико по сравнению с их диаметрами, то их можно отделить гиперплоскостью. Какое должно быть соотношение между диаметрами множеств A и B и расстоянием между ними, чтобы их можно было отделить гиперплоскостью? Сформулируем и докажем сначала лемму. Пусть в векторном пространстве L задана билинейная форма $g(x, y)$. Обозначим $d^2(x, y) = g(x-y, x-y)$ и положим $d^2(A, B) = \inf\limits_{x\in A,\, y\in B} d^2(x, y)$, а $d^2(A) = \sup\limits_{x, y\in A, x\neq y} d^2(x, y)$. Через $|V|$ будем обозначать число элементов множества V.

Лемма. *Если в L даны два множества V_1 и V_2 такие, что $\operatorname{con} V_1 \cap \operatorname{con} V_2 \neq \varnothing$, $|V_1| = k$ и $|V_2| = l$, то* $d^2(V_1, V_2) \leqslant \frac{k-1}{2k} d^2(V_1) + \frac{l-1}{2l} d^2(V_2)$.

Доказательство. Обозначим $d^2(V_1, V_2) = d^2$, $d^2(V_1) = d_1^2$ и $d^2(V_2) = d_2^2$. Можно считать, что $0 \in \operatorname{con} V_1 \cap \operatorname{con} V_2$. Пусть $V_1 = \{x_1, \ldots, x_k\}$ и $V_2 = \{y_1, \ldots, y_l\}$. Тогда существуют такие числа $a_i \geqslant 0$ и $\beta_j \geqslant 0$, что выполняются равенства $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_j = 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \sum\limits_{j=1}^{l} \beta_j y_j = 1$. Далее имеем

$$d_1^2(1-\alpha_i) = \sum_{m\neq i} \alpha_m d_1^2 \geqslant \sum_{m\neq i} a_m g(x_i - x_m, x_i - x_m) = \sum_{m=1}^{k} \alpha_m g(x_i - x_m, x_i - x_m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \alpha_m g(x_i - y_j + y_j - x_m, x_i - y_j + y_j - x_m) = g(x_i - y_j, x_i - y_j) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{k} \alpha_m g(y_j - x_m, y_j - x_m) + \sum_{m=1}^{k} \alpha_m (g(x_i - y_j, y_j - x_m) +$$

$$+ (g(y_j - x_m, x_i - y_j)) \geqslant g(x_i - y_j, x_i - y_j) + d^2 + g(x_i - y_j, y_j) +$$
$$+ g(y_j, x_i - y_j).$$

Аналогично получаем

$$d_2^2(1-\beta_j) \geqslant g(y_j - x_i, y_j - x_i) + d^2 + g(y_j - x_i, x_i) + g(x_i, y_j - x_i).$$

Складывая эти два неравенства, имеем $(1-\alpha_i) d_1^2 + (1-\beta_j) d_2^2 \geqslant 2d^2$. Суммируя левую и правую часть полученного неравенства по i и j, получаем неравенство $l(k-1) d_1^2 + k(l-1) d_2^2 \geqslant 2kld^2$, или $d^2 \leqslant \frac{k-1}{2k} d_1^2 + \frac{l-1}{2l} d_2^2$. Лемма полностью доказана.

Сформулируем основные результаты статьи.

Теорема 1. *Пусть в евклидовом векторном пространстве L^n размерности n даны два множества A и B такие, что $d(A) \leqslant d_1$ и $d(B) \leqslant d_2$. Тогда если для $x \in A$ и $y \in B$ выполняется неравенство*

$$d^2(x, y) > \max_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \left(\frac{k-1}{2k} d_1^2 + \frac{n+1-k}{2(n+2-k)} d_2^2 \right), \tag{1}$$

то существует гиперплоскость, отделяющая множества A и B, и выполняются неравенства

$$d^2(\operatorname{con} A, \operatorname{con} B) \geqslant d^2(A, B) - \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\frac{k-1}{2k} d_1^2 + \frac{n-k}{2(n+1-k)} d_2^2 \right) >$$
$$> \max_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \left(\frac{k-1}{2k} d_1^2 + \frac{n+1-k}{2(n+2-k)} d_2^2 \right) - \tag{2}$$
$$- \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\frac{k-1}{2k} d_1^2 + \frac{n-k}{2(n+1-k)} d_2^2 \right).$$

Если $d^2(A, B) \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \left(\frac{k-1}{2k} d_1^2 + \frac{n+1-k}{2(n+2-k)} d_2^2 \right)$, то существуют такие множества A и B, что $A \cap B = \varnothing$, $d(A) \leqslant d_1$ и *$d(B) \leqslant d_2$, а $\operatorname{con} A \cap \cap \operatorname{con} B \neq \varnothing$.*

Доказательство. Из теоремы Каратеодори (см. [3]) следует, что множества A и B можно считать замкнутыми. Предположим противное, что множества A и B нельзя отделить гиперплоскостью. Тогда, по теореме Кирхбергера [3], найдется такое множество $V \subseteq L^n$, что $\operatorname{con}(V \cap A) \cap \cap \operatorname{con}(V \cap B) \neq \varnothing$ и $|V| \leqslant n + 2$. Положим $|V \cap A| = k$, $|V \cap B| = l$. По доказанной лемме имеем $d^2(A, B) \leqslant d^2(V \cap A, V \cap B) \leqslant \frac{k-1}{2k} d^2(A) + \frac{l-1}{2l} d^2(B) \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \left(\frac{k-1}{2k} d_1^2 + \frac{n+1-k}{2(n+2-k)} d_2^2 \right)$.

Полученное противоречие показывает, что множества A и B можно отделить гиперплоскостью. Докажем теперь неравенство (2). Так как множества A и B замкнутые, то множества $\operatorname{con} A$ и $\operatorname{con} B$ тоже замкнутые и по доказанному выше $d(\operatorname{con} A, \operatorname{con} B) > 0$. Пусть $x \in A$ и $y \in B$ такие, что $d(x, y) = d(\operatorname{con} A, \operatorname{con} B)$. Возьмем гиперплоскости P_1 и P_2, проходящие через x и y соответственно и перпендикулярные к $x - y$. Легко видеть, что гиперплоскости являются опорными к множествам $\operatorname{con} A$ и $\operatorname{con} B$. Обозначим $A_1 = A \cap P_1$, $A_2 = B \cap P_2 + x - y$. Тогда множества A_1 и A_2 лежат в P_1, $\operatorname{con} A_1 \cap \operatorname{con} A_2 \neq \varnothing$ и следовательно, по теореме Кирхбергера, существуют множества $V_1 \subseteq A_1$ и $V_2 \subseteq A_2$ такие, что $|V_1| = k$, $|V_2| = l$ и $k + l \leqslant n + 1$, а $\operatorname{con} V_1 \cap \operatorname{con} V_2 \neq \varnothing$. Из леммы следует, что существуют $x_1 \in V_1$, $y_1 \in V_2$ и $d^2(x_1, y_1) \leqslant \frac{k-1}{2k} d^2(V_1) + \frac{l-1}{2l} d^2(V_2) \leqslant \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\frac{k-1}{2k} d_1^2 + \frac{n-k}{2(n-k+1)} d_2^2 \right)$, а следовательно, $d^2(\operatorname{con} A, \operatorname{con} B) = d^2(x, y) \geqslant d^2(A, B) - \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\frac{k-1}{2k} d_1^2 + \frac{n-k}{2(n-k+1)} d_2^2 \right) > \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \left(\frac{k-1}{2k} d_1^2 + \frac{n+1-k}{2(n+2-k)} d_2^2 \right) - \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\frac{k-1}{2k} d_1^2 + \frac{n-k}{2(n-k+1)} d_2^2 \right)$. Приведем пример множеств A и B таких, что $d(A) \leqslant d_1$, $d(B) \leqslant d_2$, $\operatorname{con} A \cap \operatorname{con} B \neq \varnothing$, а $d^2(A, B) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \left(\frac{k-1}{2k} d_1^2 + \frac{n-k+1}{2(n-k+2)} d_2^2 \right)$. Пусть $1 \leqslant k \leqslant n + 1$ — натуральное число, при котором достигается максимум в правой части неравенства (1) с данными числами d_1 и d_2. Тогда можно считать, что $d_1 \leqslant d_2$. Рассмотрим в L^n два ортогональных подпространства L_1 и L_2 размерности

$k-1$ и $n-k+1$ соответственно. В L_1 возьмем множество $A=\{x_1,\ldots$ $\ldots,x_k\}$ вершин правильного симплекса с центром в 0, а в L_2 — множество $B=\{y_1,\ldots,y_{n-k+2}\}$ вершин правильного симплекса с центром в 0; ребра симплексов равны при $k\geqslant 2$ d_1 и d_2, а при $k=1$ 0 и d_2. Тогда очевидно, что $\operatorname{con} A\cap \operatorname{con} B\neq\varnothing$ и $g(x_i,x_i)=\dfrac{k-1}{2k}d_1^2$, $g(y_j,y_j)=$ $=\dfrac{n+1-k}{2(n+2-k)}d_2^2$, следовательно, $g(x_i-y_j,x_i-y_j)=g(x_i,x_i)+g(y_j,y_j)=$ $=\dfrac{k-1}{2k}d_1^2+\dfrac{n+1-k}{2(n+2-k)}d_2^2$ и $d^2(A,B)=\dfrac{k-1}{2k}d_1^2+\dfrac{n+1-k}{2(n+2-k)}d_2^2$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в евклидовом векторном пространстве L даны два множества A и B такие, что $d(A)\leqslant d_1$ и $d(B)\leqslant d_2$. Тогда если для любых $x\in A$ и $y\in B$ выполняется неравенство*

$$d^2(x,y)>\frac{1}{2}d_1^2+\frac{1}{2}d_2^2, \tag{3}$$

то

$$d^2(\operatorname{con} A,\operatorname{con} B)\geqslant d^2(A,B)-\frac{1}{2}(d^2(A)+d^2(B)) \tag{4}$$

и существует гиперплоскость, отделяющая множества A и B. Если

$$d^2(A,B)\geqslant\frac{1}{2}(d^2(A)+d^2(B)), \tag{5}$$

то $\operatorname{con} A\cap\operatorname{con} B=\varnothing$. Если L — бесконечномерное евклидово пространство, то существуют такие множества A и B в L, что $\overline{\operatorname{con}} A\cap\overline{\operatorname{con}} B\neq\varnothing$ и $d^2(A,B)=\dfrac{1}{2}(d^2(A)+d^2(B))>0$.

Доказательство. Докажем сначала неравенство (4). Возьмем точки $x\in\operatorname{con} A$ и $y\in\operatorname{con} B$, тогда существуют конечные множества $V_1\subseteq A$ и $V_2\subseteq B$ такие, что $x\in\operatorname{con} V_1$ и $y\in\operatorname{con} V_2$. Тогда множества V_1 и V_2 содержатся в подпространстве размерности $\leqslant|V_1|+|V_2|-1=N$. Из теоремы 1 имеем $d^2(\operatorname{con} V_1,\operatorname{con} V_2)\geqslant d^2(V_1,V_2)-\max\limits_{1\leqslant k\leqslant N+1}\Big(\dfrac{k-1}{2k}d^2(V_1)+$ $+\dfrac{N-k+1}{2(N-k+2)}d^2(V_2)\Big)>d^2(V_1,V_2)-\dfrac{1}{2}(d^2(V_1)+d^2(V_2))\geqslant d^2(A,B)-$ $-\dfrac{1}{2}(d^2(A)+d^2(B))=c^2$. Следовательно, получаем $d^2(\operatorname{con} A,\operatorname{con} B)\geqslant c^2$.

Рассмотрим множества $A'=\operatorname{con} A+\dfrac{c}{2}R$ и $B'=\operatorname{con} B+\dfrac{c}{2}R$, где R — открытый единичный шар с центром в 0. Множества A' и B' выпуклые, попарно не пересекаются, имеют внутренние точки и поэтому, по теореме Хана — Банаха [4], их можно отделить гиперплоскостью.

Пусть теперь выполняется неравенство (4). Докажем, что $\operatorname{con} A\cap$ $\cap\operatorname{con} B=\varnothing$. Предположим противное, тогда существуют такие конечные множества, что $V_1\subseteq A$, $V_2\subseteq B$, $|V_1|=k$, $|V_2|=l$ и $\operatorname{con} V_1\cap\operatorname{con} V_2\neq\varnothing$. Тогда, по лемме, имеем неравенства $d^2(A,B)\leqslant d^2(V_1,V_2)\leqslant\dfrac{l-1}{2l}d^2(V_1)+$ $+\dfrac{k-1}{2k}d^2(V_2)<\dfrac{1}{2}(d^2(V_1)+d^2(V_2))\leqslant\dfrac{1}{2}(d^2(A)+d^2(B))$ и мы получили противоречие.

Приведем пример множеств A и B в бесконечномерном евклидовом пространстве L таких, что $\overline{\operatorname{con}} A\cap\overline{\operatorname{con}} B\neq\varnothing$ и $d^2(A,B)=\dfrac{1}{2}(d^2(A)+d^2(B))>0$. Для этого рассмотрим в L два бесконечномерных взаимно ортогональных подпространства L_1 и L_2. В подпространствах L_1 и L_2 возьмем два бесконечных множества A и B попарно ортогональных векторов длины

$d_1/\sqrt{2}$ и $d_2/\sqrt{2}$ соответственно. Тогда легко видеть, что $0 \in \overline{\operatorname{con} A} \cap \overline{\operatorname{con} B}$ и для $x \in A$ и $y \in B$ будет $g(x-y, x-y) = \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2)$ и, следовательно, $d^2(A, B) = \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. При выполнении неравенства (3) расстояние между con A и con B можно сделать сколь угодно малым. В самом деле, возьмем два бесконечномерных ортогональных подпространства L_1 и L_2 и вектор x такой, что $g(x, x) = \varepsilon^2$ и ортогональный к L_1 и L_2. Возьмем в L_1 и L_2 множества A и B, построенные при доказательстве теоремы 2. Тогда $d^2(A, B + x) = \varepsilon^2 + \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2)$ и $d^2(\operatorname{con} A, \operatorname{con} B + x) = \varepsilon^2$. Последнее равенство показывает, что неравенство (4) также точное. Аналогично можно показать точность неравенства (2).

З а м е ч а н и е 2. Легко видеть, что при $d_1 = 0$ теорема 1 эквивалентна теореме Юнга об описанном шаре (см. [3]).

З а м е ч а н и е 3. Результаты заметки легко обобщаются на случай действительного векторного пространства с заданной в нем билинейной формой.

1. *Ту Дж., Гонсалес Р.* Принципы распознавания образов.— М. : Мир, 1978.— 412 с.
2. *Rivlin T. J., Shapiro H. S.* A unified approach to certain problems of approximation and minimization // J. Soc. Ind. Appl. Math.— 1961.— **4**.— P. 670—699.
3. *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли и ее применения.— М : Мир, 1968.— 160 с.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1972.— 496 с.

Днепропетр. ун-т

Получено 02.08.85

УДК 517.5

С. Г. Дронов, А. А. Лигун

Двойственность для L-сплайнов

Пусть L_p, $p \in [1, \infty)$, — пространство измеримых, суммируемых с p-й степенью на $[0, 1]$ функций f с нормой $\| f \|_p = \left(\int\limits_0^1 | f(t) |^p dt \right)^{1/p}$; L_∞ — пространство измеримых, существенно ограниченных на $[0, 1]$ функций f с нормой $\| f \|_\infty = \operatorname{vrai} \sup \{ | f(t) | \mid t \in [0, 1] \}$ и $p' : 1/p + 1/p' = 1$.

Обозначим через L_p^r, $p \in [1, \infty]$, $r = 1, 2, \ldots$, множество всех функций f, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} = f)$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и $f^{(r)} \in L_p$, а через C^r, $r = 0, 1, 2, \ldots$, множество всех r раз непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций.

Пусть $\Delta_N = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1\}$ — произвольное разбиение отрезка $[0, 1]$ и $Q_N^r = \{\rho_i\}_{i=1}^{N-1}$, $1 \leqslant \rho_i \leqslant r - 1$. Положим $\Theta_N^r = (\Delta_N, Q_N^r)$. Обозначим $I_i = \{0, 1, 2, \ldots, p_i - 1\}$, $1 \leqslant p_i \leqslant r$, $i = 0, 1$, и $\mathcal{I}_i = \{0, 1, 2, \ldots, r - p_i - 2\}$, $i = 0, 1$. Наряду с набором Θ_N^r зададим набор $\Theta_L^r = (\Delta_L, Q_L^r)$, где $\Delta_L = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{L-1} < \tau_L = 1\}$ и $Q_L^r = \{\sigma_j\}_{j=1}^{L-1}$, $1 \leqslant \sigma_j \leqslant r - 1$.

Пусть $D^k = (d/dt)^k$, $a_k(t) \in C^k$, $k = \overline{0, r}$, $a_r(t) > 0$ $(\forall t)$ и $L_r(f, t) = \sum_{k=0}^r a_k(t) \times D^k f(t)$ — дифференциальный оператор. Оператор, формально сопряженный к оператору $L_r(f, t)$ обозначим через $L_r^*(f, t)$, т. е. положим $L_r^*(f, t) = \sum_{k=0}^r (-1)^k D^k [a_k(t) f(t)]$.