УДК 517.9/93

В. П. Яковец

Об асимптотической сходимости формальных решений линейных систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами вида

$$dx/dt = A(\tau, \varepsilon)\, x, \tag{1}$$

где $\tau = \varepsilon t \in [0; a]$, ε — малый действительный параметр, $A(\tau, \varepsilon)$ — $(n \times n)$-матрица, допускающая разложение

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\tau)\, \varepsilon^k. \tag{2}$$

Будем предполагать, что:

1) матрицы $A_k(\tau)$, $k = 0, 1, \ldots$, бесконечно дифференцируемы на отрезке $[0; a]$;

2) характеристическое уравнение

$$\det \| A_0(\tau) - \omega E \| = 0 \tag{3}$$

имеет n-кратный корень $\lambda_0(\tau)$, которому соответствует одно корневое подпространство размерности n;

3) матрица $A_1(\tau)$ удовлетворяет условию

$$(K\varphi, \psi) = (A_1\varphi, \psi) - \left(\frac{d\varphi}{d\tau}, \psi\right) \neq 0 \quad \forall \tau \in [0; a], \tag{4}$$

где $\varphi(\tau)$ — собственный вектор матрицы $A_0(\tau)$, соответствующий собственному значению $\lambda_0(\tau)$, а $\psi(\tau)$ — элемент нуль-пространства матрицы $(A_0 - \lambda_0 E)^*$, сопряженной матрице $(A_0 - \lambda_0 E)$.

Как показано в работах [1, 2], при данных предположениях система (1) имеет на отрезке $[0; a]$ n различных формальных решений вида

$$x(t, \varepsilon) = u(\tau, \mu)\, y(t, \varepsilon), \quad dy/dt = \lambda(\tau, \mu)\, y, \tag{5}$$

где n-мерная вектор-функция $u(\tau, \mu)$ и функция $\lambda(\tau, \mu)$ представляются формальными разложениями

$$u(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\tau)\, \mu^k, \quad \lambda(\tau, \mu) = \lambda_0(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\tau)\, \mu^k \tag{6}$$

по степеням параметра $\mu = \sqrt[n]{\varepsilon}$. В этих же работах доказано, что данные формальные решения асимптотически сходятся в смысле [3] к соответствующим точным решениям системы (1), если выполняются следующие условия:

1. $\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k(\tau)\, \mu^k\right) \leqslant 0 \quad \forall \tau \in [0; a]$.

2. Собственные значения матрицы $\frac{1}{2}\,[A_0(\tau) + A_0^*(\tau)]$ неположительны.

В настоящей работе предлагается иной подход, отличный от [1, 2], позволивший доказать асимптотическую сходимость формальных решений (5) при более слабых ограничениях, чем 1, 2.

Прежде всего изложим метод определения коэффициентов формальных разложений (6), отличный от предложенного в [1, 2], основывающийся на использовании обобщенно обратной матрицы [4].

Подставив (5), (6) и (2) в систему (1) и приравняв в полученном тождестве коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$(A_0 - \lambda_0 E) u_k = b_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

где

$$b_0 = 0, \quad b_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_{k-i} + f_{k-n}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

$$f_{k-n} = u'_{k-n} - \sum_{i=1}^{[k/n]} A_i u_{k-ni}, \quad k = n, \quad n+1, \ldots \tag{9}$$

(здесь и в дальнейшем штрихом обозначено дифференцирование по τ, $[z]$ — целая часть числа z).

Уравнения (7) разрешимы тогда и только тогда, когда их правые части ортогональны вектору $\psi(\tau)$, т. е.

$$(b_k, \psi) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

При выполнении этого условия векторы u_k определим по формулам

$$u_0 = \varphi(\tau), \quad u_k = H(\tau) b_k(\tau), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где $H(\tau)$ — обобщенно обратная матрица к матрице $(A_0 - \lambda_0 E)$. Для определения функций $\lambda_k(\tau)$, $k = 1, 2, \ldots$, используем условие (10). Подставив последовательно (11) в (8) и проведя индукцию по k, получим

$$b_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha(i, k) H^{i-1} \varphi + \sum_{j=0}^{k-n-1} \sum_{i=1}^{k-n-j} \alpha(i, k-n-j) H^i f_j + f_{k-n}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

где через $\alpha(i, k)$ обозначена сумма всевозможных произведений сомножителей $\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \ldots, \lambda_{j_i}$, сумма индексов которых равна k. В силу свойств обобщенно обратной матрицы [5] и условия 2 $(H^{i-1}\varphi, \psi) = 0$ при $i < n$, $(H^{n-1}\varphi, \psi) \neq 0$. При этом с помощью выбора вектора ψ можно добиться, чтобы $(H^{n-1}\varphi, \psi) = 1$. Отсюда следует, что при $k < n$ условие (10) выполнено, а при $k = n$ — имеет вид $\lambda_1^n - (K\varphi, \psi) = 0$, откуда в силу условия 3 найдем n различных функций $\lambda_1(\tau)$:

$$\lambda_1^{(j)}(\tau) = \sqrt[n]{|(K\varphi, \psi)|} \exp\left(i \, \frac{\arg(K\varphi, \psi) + (2j-2)\pi}{n}\right), \quad j = \overline{1, n}. \tag{13}$$

Определив λ_1, по формуле (8) найдем b_1, а по формуле (11) — u_1. Если функции $\lambda_i(\tau)$ и векторы $u_i(\tau)$ известны при $i < s$, то, использовав условие (10) при $k = n + s$, найдем $\lambda_s(\tau)$, а затем по формулам (8), (11) определим $u_s(\tau)$. Согласно (13) таким путем будет построено n различных формальных решений системы (1).

Перейдем теперь к исследованию вопроса об асимптотической сходимости построенных формальных решений. Докажем такое вспомогательное утверждение.

Л е м м а. *Формальные решения* (5) *линейно независимы на промежутке* $[0; a]$ *при достаточно малых* μ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формальные решения (5) линейно независимы, если таковыми при достаточно больших m являются m-приближения

$$x_m^{(j)}(t, \varepsilon) = u_m^{(j)}(\tau, \mu) \, y_m^{(j)}(t, \varepsilon), \quad dy_m^{(j)}/dt = \lambda_m^{(j)}(\tau, \mu) \, y_m^{(j)}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{14}$$

где

$$u_m^{(j)}(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^{m} u_k^{(j)}(\tau) \mu^k, \quad \lambda_m^{(j)}(\tau, \mu) = \lambda_0(\tau) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(j)}(\tau) \mu^k, \quad j = \overline{1, n}, \tag{15}$$

которые получаются из (5) путем обрыва формальных разложений (6) на m-м члене. Здесь индекс j соответствует выбору функции $\lambda_1^{(j)}(\tau)$ согласно (13). Для доказательства линейной независимости указанных m-приближений необходимо показать, что матрица $X_m(t, \varepsilon)$, составленная из них как из столбцов, невырождена.

Рассмотрим сначала матрицу $X_{n-1}(t, \varepsilon) = \operatorname{col}\{x_{n-1}^{(1)}(t, \varepsilon), x_{n-1}^{(2)}(t, \varepsilon), \ldots \ldots, x_{n-1}^{(n)}(t, \varepsilon)\}$, столбцами которой являются $(n-1)$-приближения $x_{n-1}^{(j)}(t, \varepsilon)$. Учитывая (14), ее можно представить в виде $X_{n-1}(t, \varepsilon) = U_{n-1}(\tau, \mu) Y_{n-1} \times \times (t, \varepsilon)$, где $U_{n-1}(\tau, \mu) = \operatorname{col}\{u_{n-1}^{(1)}(\tau, \mu), \ldots, u_{n-1}^{(n)}(\tau, \mu)\}$, $Y_{n-1}(t, \varepsilon) = \operatorname{diag}\{y_{n-1}^{(1)}(t, \varepsilon), \ldots, y_{n-1}^{(n)}(t, \varepsilon)\}$. Диагональная матрица $Y_{n-1}(t, \varepsilon)$ невырождена в силу экспоненциального характера ее элементов. Докажем невырожденность матрицы $U_{n-1}(\tau, \mu)$. С учетом (12), (11) представим ее в виде

$$U_{n-1}(\tau, \mu) = \operatorname{col}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} \alpha^{(1)}(i, k) H^i \varphi \mu^k, \ldots, \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} \alpha^{(n)}(i, k) H^i \varphi \mu^k\right\},$$

где $\alpha^{(j)}(i, k)$ — введенные выше выражения, содержащие те функции $\lambda_s^{(j)}(\tau)$, $s = 1, 2, \ldots$, которые соответствуют функции $\lambda_1^{(j)}(\tau)$ согласно (13). Используя далее свойства определителей и отделяя в $\det U_{n-1}(\tau, \mu)$ возмущающие члены более высокого порядка малости, имеем

$$\det U_{n-1}(\tau, \mu) = \mu^{n(n-1)/2} \sum_{i_s=\overline{1,n}} \det \operatorname{col}\{\alpha^{(i_1)}(0, 0)\varphi, \ldots, \alpha^{(i_n)}(n-1, n-1) H^{n-1}\varphi\} +$$

$$+ O(\mu^{n(n-1)/2+1}) = \pm \mu^{n(n-1)/2} \det T(\tau) \sum_{i_s=\overline{1,n}} \det \operatorname{col}\{\alpha^{(i_1)}(0, 0) e_1, \ldots$$

$$\ldots, \alpha^{(i_n)}(n-1, n-1) e_n\} + O(\mu^{n(n-1)/2+1}),$$

где $\alpha^{(i_j)}(0, 0) = 1$, по определению, $T(\tau)$ — преобразующая матрица для матрицы $A_0(\tau)$, состоящая из жордановой цепочки векторов $\varphi, H\varphi, \ldots, H^{n-1}\varphi$ матрицы $A_0(\tau)$, e_i — n-мерные векторы, все элементы которых равны нулю, кроме i-го, равного единице. Суммирование здесь ведется по всевозможным размещениям векторов $\alpha^{(i_1)}(0, 0) e_1, \alpha^{(i_2)}(1, 1) e_2, \ldots, \alpha^{(i_n)}, (n-1, n-1) e_n$, номера i_s которых соответствуют порядку их размещения.

Отсюда, учитывая, что $\alpha^{(j)}(s, s) = [\lambda_1^{(j)}]^s$, получаем

$$\det U_{n-1}(\tau, \mu) = \pm \mu^{n(n-1)/2} \det T(\tau) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^{(1)} & \lambda_1^{(2)} & \ldots & \lambda_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [\lambda_1^{(1)}]^{n-1} & [\lambda_1^{(2)}]^{n-1} & \ldots & [\lambda_1^{(n)}]^{n-1} \end{vmatrix} +$$

$$+ O(\mu^{n(n-1)/2+1}) = \pm \mu^{n(n-1)/2} \det T(\tau) \prod_{\substack{i,j=1,\\ i>j}}^{n} (\lambda_1^{(i)} - \lambda_1^{(j)}) + O(\mu^{n(n-1)/2+1}). \quad (16)$$

Так как $\det T(\tau) \neq 0\ \forall \tau \in [0; a]$, а в силу условия (4) $\lambda_1^{(i)} \neq \lambda_1^{(j)}$ при $i \neq j$, то на основании (16) заключаем, что матрица $U_{n-1}(\tau, \mu)$ невырождена на данном промежутке $[0; a]$ при достаточно малых μ, отличных от нуля. Следовательно, невырожденной является и матрица $X_{n-1}(t, \varepsilon)$.

Так как определитель матрицы $X_m(t, \varepsilon) = U_m(\tau, \mu) Y_m(t, \varepsilon)$ при любых $m > n-1$ отличается от определителя матрицы $X_{n-1}(t, \varepsilon)$ лишь добавлением возмущающих членов более высокого порядка малости, то матрица $X_m(t, \varepsilon)$ будет также невырождена при достаточно малых μ, причем для определителя матрицы $U_m(\tau, \mu)$, составленной из вектор-столбцов (15), также справедливо представление (16). Следовательно, m-приближения (14) линейно независимы при $m \geqslant n-1$ и достаточно малых μ. В этом смысле линейно независимы и формальные решения (5). Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что частные формальные решения (5) образуют фундаментальную систему решений и, таким образом, позволяют построить общее формальное решение системы (1).

Используя данную лемму, докажем теперь такую теорему.

Теорема. *Если выполняются условия* 1—3 *и функции*

$$\mathrm{Re}\left(\lambda_0(\tau)+\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{(j)}(\tau)\mu^k\right),\quad j=\overline{1,n}, \tag{17}$$

не меняют знак на отрезке $[0; a]$, *то для каждого формального решения* $x^{(j)}(t,\varepsilon)$, $j=\overline{1,n}$, *системы* (1) *существует такое точное решение* $\tilde{x}^{(j)}(t,\varepsilon)$, *для которого данное формальное решение является асимптотическим при* $\mu\to 0$: *для любого* $m>n-1$ *и достаточно малых* μ *выполняется неравенство*

$$\|\tilde{x}^{(j)}(t,\varepsilon)-x_m^{(j)}(t,\varepsilon)\|\leqslant c\mu^{m+2-2n}, \tag{18}$$

где c — *постоянная, не зависящая от* μ.

Доказательство. Пусть j фиксировано. Подставим m-приближение $x_m^{(j)}(t,\varepsilon)$ в систему (1). Учитывая бесконечную дифференцируемость всех коэффициентов разложений (2), (6) и соотношения (7), имеем

$$dx_m^{(j)}(t,\varepsilon)/dt=A(\tau,\varepsilon)\,x_m^{(j)}(t,\varepsilon)+O(\mu^{m+1})\,y_m^{(j)}(t,\varepsilon). \tag{19}$$

Пусть $\tilde{x}^{(j)}(t,\varepsilon)$ — точное решение системы (1). Обозначим

$$x_m^{(j)}(t,\varepsilon)-\tilde{x}^{(j)}(t,\varepsilon)=\xi^{(j)}(t,\varepsilon). \tag{20}$$

Тогда в силу (19) получаем

$$d\xi^{(j)}(t,\varepsilon)/dt=A(\tau,\varepsilon)\,\xi^{(j)}(t,\varepsilon)+O(\mu^{m+1})\,y_m^{(j)}(t,\varepsilon). \tag{21}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\xi^{(j)}(t,\varepsilon)=U_m(\tau,\mu)\,\tilde{\xi}^{(j)}(t,\varepsilon). \tag{22}$$

Подставляя (22) в (21) и вычитая из обеих частей полученного равенства $U_m(\tau,\mu)\,\Lambda_m(\tau,\mu)\,\tilde{\xi}^{(j)}(t,\varepsilon)$, где $\Lambda_m(\tau,\mu)=\mathrm{diag}\,\{\lambda_m^{(1)}(\tau,\mu),\ldots,\lambda_m^{(n)}(\tau,\mu)\}$, находим

$$U_m d\tilde{\xi}^{(j)}/dt=(AU_m-U_m\Lambda_m-dU_m/dt)\,\tilde{\xi}^{(j)}+U_m\Lambda_m\tilde{\xi}^{(j)}+O(\mu^{m+1})\,y_m^{(j)}. \tag{23}$$

В силу структуры матриц $U_m(\tau,\mu)$, $\Lambda_m(\tau,\mu)$ и соотношений (7) выражение в скобках здесь равно $O(\mu^{m+1})$. Матрица $U_m(\tau,\mu)$, как показано выше, невырождена при $m\geqslant n-1$ и достаточно малых μ. Однако обратная к ней согласно (16) имеет особенность при $\mu\to 0$. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы, нетрудно убедиться, что главная часть миноров матрицы $U_m(\tau,\mu)$ будет содержать множитель $\mu^{(n-1)(n-2)/2}$. Поэтому, исходя из (16) и учитывая бесконечную дифференцируемость элементов матрицы $U_m(\tau,\mu)$, имеем $U_m^{-1}(\tau,\mu)=\mu^{1-n}Q_m(\tau,\mu)$, где $Q_m(\tau,\mu)$ — некоторая $(n\times n)$-матрица, равномерно ограниченная при всех $\tau\in[0;a]$ и $\mu\to 0$. Тогда, умножая обе части уравнения (23) слева на матрицу $U_m^{-1}(\tau,\mu)$, приводим его к виду

$$d\tilde{\xi}^{(j)}/dt=\Lambda_m(\tau,\mu)\,\tilde{\xi}^{(j)}+O(\mu^{m+2-n})\,\tilde{\xi}^{(j)}+O(\mu^{m+2-n})\,y_m^{(j)}(t,\varepsilon). \tag{24}$$

Рассмотрим матрицу

$$Y_m(t,\varepsilon)=\mathrm{diag}\left\{\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_m^{(1)}(\tau,\mu)\,d\tau\right),\ldots,\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_m^{(n)}(\tau,\mu)\,d\tau\right)\right\},$$

которая удовлетворяет уравнению

$$dY/dt=\Lambda_m(\tau,\mu)\,Y. \tag{25}$$

Так как по условию теоремы функции (17) сохраняют определенный знак на отрезке $[0; a]$, то часть из них неотрицательна, а остальные — неположительны. Пусть, например, первые r этих функций неотрицательны, а остальные — неположительны. В соответствии с этим матрицу $Y_m(t, \varepsilon)$ разобьем на две диагональные матрицы:

$$Y_m(t, \varepsilon) = Y_m^{(1)}(t, \varepsilon) + Y_m^{(2)}(t, \varepsilon).$$

Первые r диагональных элементов матрицы $Y_m^{(1)}(t, \varepsilon)$ совпадают с соответствующими элементами матрицы $Y_m(t, \varepsilon)$, а остальные равны нулю. В матрице $Y_m^{(2)}(t, \varepsilon)$ нулю равны первые r диагональных элементов, а остальные совпадают с соответствующими элементами матрицы $Y_m(t, \varepsilon)$. Обе эти матрицы удовлетворяют уравнению (25), так как этому уравнению удовлетворяет каждый из их столбцов.

Исходя из этого, решение уравнения (24) можно записать формально в виде

$$\tilde{\xi}^{(j)}(t, \varepsilon) = -\int_\tau^a K_m^{(1)}(t, t_1, \varepsilon)\, O(\mu^{m+2-2n})\, \tilde{\xi}^{(j)}(t_1, \varepsilon)\, d\tau_1 + \int_0^\tau K_m^{(2)}(t, t_1, \varepsilon) \times$$
$$\times O(\mu^{m+2-2n})\, \tilde{\xi}^{(j)}(t_1, \varepsilon)\, d\tau_1 - \int_\tau^a K_m^{(1)}(t, t_1, \varepsilon)\, O(\mu^{m+2-2n})\, y_m^{(j)}(t_1, \varepsilon)\, d\tau_1 +$$
$$+ \int_0^\tau K_m^{(2)}(t, t_1, \varepsilon)\, O(\mu^{m+2-2n})\, y_m^{(j)}(t_1, \varepsilon)\, d\tau_1, \tag{26}$$

где

$$K_m^{(i)}(t, t_1, \varepsilon) = Y_m^{(i)}(t, \varepsilon)\, Y_m^{-1}(t_1, \varepsilon), \quad i = 1, 2, \quad \tau_1 = \varepsilon t_1.$$

Если это интегральное уравнение имеет непрерывное решение, то оно будет также решением дифференциального уравнения (24). Чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать уравнение (26) по t, предположив, что $\tilde{\xi}^{(j)}(t, \varepsilon)$ — его решение.

Исходя из структуры матриц $Y_m^{(i)}(t, \varepsilon)$, $i = 1, 2$, легко убедиться, что матрицы $K_m^{(1)}(t, t_1, \varepsilon)$ и $K_m^{(2)}(t, t_1, \varepsilon)$ ограничены соответственно при $\tau \leqslant \tau_1 \leqslant a$ и при $0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau$. Тогда методом последовательных приближений можно доказать [6], что интегральное уравнение (26) при достаточно малых μ имеет непрерывное решение $\tilde{\xi}^{(j)}(t, \varepsilon)$.

Переходя в уравнении (26) к оценкам по норме, находим $\|\tilde{\xi}^{(j)}(t, \varepsilon)\| \leqslant (c_1 + c_2)\, a\mu^{m+2-2n} \|\tilde{\xi}^{(j)}(t, \varepsilon)\| + (c_3 + c_4)\, a\mu^{m+2-2n} \sup\limits_{\tau \in [0; a]} |y_m^{(j)}(t, \varepsilon)|$, где c_i — постоянные, не зависящие от ε, ограничивающие соответствующие подынтегральные выражения. Пусть μ настолько мало, что $(c_1 + c_2)\, a\mu^{m+2-2n} \leqslant 1/2$. Тогда из последнего неравенства имеем $\|\tilde{\xi}^{(j)}(t, \varepsilon)\| \leqslant c_5 \mu^{m+2-2n} \times \sup\limits_{\tau \in [0; a]} |y_m^{(j)}(t, \varepsilon)|$, где $c_5 = \frac{1}{2} a (c_3 + c_4)$. Учитывая далее соотношения (22), (20), получаем $\|x_m^{(j)}(t, \varepsilon) - \tilde{x}^{(j)}(t, \varepsilon)\| \leqslant c_5 c_6 \mu^{m+2-2n} \sup\limits_{\tau \in [0; a]} |y_m^{(j)}(t, \varepsilon)|$, где c_6 — постоянная, ограничивающая по норме матрицу $U_m(\tau, \mu)$.

В свою очередь в силу условий теоремы решение $y_m^{(j)}(t, \varepsilon)$ уравнения (14) всегда можно выбрать так, чтобы оно было ограничено на отрезке $[0; a/\varepsilon]$. А именно, если соответствующая функция (17) неположительна, то достаточно взять

$$y_m^{(j)}(t, \varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda_m^{(j)}(\tau, \mu)\, d\tau\right).$$

Если же соответствующая функция (17) неотрицательна, то в качестве решения уравнения (14) необходимо взять

$$y_m^{(j)}(t, \varepsilon) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_\tau^a \lambda_m^{(j)}(\tau, \mu)\, d\tau\right).$$

В обоих случаях, как нетрудно убедиться, $\sup\limits_{\tau\in[0;a]} |y_m^{(j)}(t, \varepsilon)| \leqslant c_7$, где c_7 — некоторая постоянная, не зависящая от ε. Тогда, обозначая $c_5c_6c_7 = c$, приходим к неравенству (18).

Аналогично можно доказать асимптотическую сходимость формальных решений системы (1) в случае, когда кратному корню характеристического уравнения (3) соответствует несколько корневых подпространств. Отметим также, что аналогичным образом доказывается асимптотический характер формальных решений, построенных в работах [5, 7, 8] для систем дифференциальных уравнений второго порядка.

1. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1966.— 252 с.
2. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— К. : Вища шк., 1971.— 226 с.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1963.— 412 с.
4. *Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений.— Киев, 1980.— 48 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.3).
5. *Сотниченко Н. А., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование некоторых систем линейных уравнений в частных производных // Укр. мат. журн.— 1983.— **35, № 2.**— С. 187—193.
6. *Коддингтон Э., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Изд-во иностр. лит., 1958.— 474 с.
7. *Сотниченко Н. А., Яковец В. П.* Асимптотическое представление решений линейных систем уравнений в частных производных с медленно меняющимися коэффициентами // Изв. вузов. Математика.— 1984.— № 6.— С. 46—53.
8. *Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование одной линейной системы в случае кратных корней характеристического уравнения // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1983.— № 12.— С. 20—23.

Нежин. пед. ин-т

Получено 13.08.85