Докажем сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$. Положим $x_k = \frac{h_k}{2p_k + h_k}$, тогда $f(k) = \frac{1}{2x_k} h_k \left(\ln \frac{1+x_k}{1-x_k} - 2x_k\right)$. Учитывая значение x_k и разлагая функцию $\ln \frac{1+x_k}{1-x_k}$ в степенной ряд, получаем

$$f(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m+1} h_k^{2m+1} (2p_k + h_k)^{-2m} < \frac{h_k}{3} \sum_{m=1}^{\infty} (h_k (2p_k + h_k)^{-1})^{2m} =$$

$$= \frac{1}{12} h_k^2 \left(\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_{k+1}}\right), \tag{5}$$

так как последний ряд — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{h_k}{2p_k + h_k} < 1$. Следовательно, ряд сходится. Обозначая его сумму через A, имеем $A = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leqslant \frac{1}{12} h^2 \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}\right)$, где $p_0 = \lim_{n \to +\infty} p_n$. Отсюда $A = \frac{h^2}{12p_1} \theta$, где $0 < \theta < 1$. Таким образом, формулу (4) можно представить в виде (1), где $\vartheta_n = \sum_{k=n}^{\infty} f(k)$. Но на основании (5) легко получить $\sum_{k=n}^{\infty} f(k) \leqslant \frac{1}{12} h^2 \left(\frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_0}\right)$, так что $\vartheta_n = \frac{h^2 \theta_n}{12 p_n}$, где $0 < \theta_n < 1$. Теорема доказана.

Примечание. Если положить $p_1 = h_k = 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, то из (1) получаем $n! = Cn^{n+1/2} \exp(-n + \theta_n / 12n)$, $0 < \theta_n < 1$, где $C = \exp \times \times \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\right)$, $f(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m+1} (2k+1)^{-2m}$, $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \frac{1}{12} \theta$, $0 < \theta < 1$. Интерес представляют также случай $h_k = h$, $k = 1, 2, 3 \ldots$, и др.

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального исчисления: В 2-х т.— М. : Физматгиз, 1962.— Т. 2.— 373 с.

Киев. политехн. ин-т Получено 30.01.86

УДК 517.977

Г. А. Курина

Достаточные условия оптимальности управления для линейных периодических систем, не разрешенных относительно производной

Линейные системы, не разрешенные относительно производной, встречаются в экономике, в теории электрических цепей, а также при изучении сингулярно возмущенных задач.

1. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T (f^0(x(t), t) + h^0(u(t), t))\, dt, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in \Omega \subset R^m, \tag{1}$$

на траекториях системы

$$\frac{d}{dt}(Dx(t)) = A(t)x(t) + h(u(t), t), \quad x(0) = x(T). \tag{2}$$

Допустимые управления $u(t)$ являются ограниченными измеримыми периодическими функциями фиксированного периода T, которым соответствуют T-периодические решения системы (2). Матрица D постоянная, функции f^0, $\partial f^0/\partial x$, h^0, A, h являются непрерывными функциями своих аргументов и T-периодическими по t, $f^0(x, t)$ является выпуклой по x функцией для любого $t \in [0, T]$.

Теорема 1. *Если допустимое управление $u^*(t)$ и соответствующая траектория $x^*(t)$ для почти всех t удовлетворяют принципу максимума*

$$-h^0(u^*(t), t) + \psi'(t)h(u^*(t), t) = \max_{u \in \Omega}(-h^0(u, t) + \psi'(t)h(u, t)),$$

$$\frac{d}{dt}(D'\psi(t)) = \frac{\partial f^0}{\partial x}(x^*(t), t) - A'(t)\psi(t), \quad \psi(0) = \psi(T),$$

то $u^*(t)$ является оптимальным управлением в задаче (1), (2). (*Здесь штрих обозначает транспонирование.*)

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы в непериодическом случае [1].

2. Рассмотрим классическую задачу минимизации функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (x'(t)W(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t))\,dt \tag{3}$$

на траекториях системы

$$\frac{d}{dt}(Dx(t)) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad x(0) = x(T). \tag{4}$$

Матрицы $W(t)$, $R(t)$ являются симметрическими, причем $W(t) \geqslant 0$, а $R(t) > 0$ $\forall t \in [0, T]$.

Используя теорему 1, приходим к исследованию линейной периодической гамильтоновой системы, не разрешенной относительно производной, вида

$$\frac{d}{dt}(Dx(t)) = A(t)x(t) + S(t)\psi(t) + f(t), \quad x(0) = x(T),$$

$$\frac{d}{dt}(D'\psi(t)) = W(t)x(t) - A'(t)\psi(t), \quad \psi(0) = \psi(T),$$

где $S(t) = B(t)R^{-1}(t)B'(t)$.

При условии обратимости при всех $t \in [0, T]$ матрицы

$$\begin{pmatrix} QA(t)P & QS(t)Q \\ PW(t)P & -PA'(t)Q \end{pmatrix},$$

где P — ортогональный проектор пространства R^n на $\operatorname{Ker} D$, Q — на $\operatorname{Ker} D'$, предыдущая система приводится к линейной периодической гамильтоновой системе меньшей размерности (если матрица D вырождена), разрешенной относительно производной, правая часть которой имеет вид правой части предыдущей системы. Исследование разрешимости периодической задачи для полученной системы основано на следующей легко доказываемой лемме.

Лемма. *Если однозначно разрешима задача $dy(t)/dt = F(t)y(t)$, $y(0) = y(T)$, то однозначно разрешима и задача*

$$dy(t)/dt = F(t)y(t) + M(t)z(t), \quad y(0) = y(T),$$

$$dz(t)/dt = N(t)y(t) - F'(t)z(t), \quad z(0) = z(T),$$

где $M(t)$, $N(t)$ — симметрические неотрицательно определенные матрицы.

3. Теорема 2. *Если матрица $K(t)$ — решение задачи*

$$\frac{d}{dt}(D'K(t)) = -K'(t)A(t) - A'(t)K(t) + K'(t)S(t)K(t) - W(t),$$

$$D'K(t) = K'(t)D, \quad K(0) = K(T), \tag{5}$$

$\varphi(t)$ — решение задачи

$$\frac{d}{dt}(D'\varphi(t)) = -(A'(t) - K'(t)S(t))\varphi(t) - K'(t)f(t), \quad \varphi(0) = \varphi(T), \tag{6}$$

а $x^*(t)$ — решение задачи (4) *при управлении, задаваемом формулой $u^*(t) = -R^{-1}(t)B'(t)(K(t)x^*(t) + \varphi(t))$, то $u^*(t)$ является оптимальным управлением задачи* (3), (4). *При этом минимальное значение функционала* (3) *равно*

$$J(u^*) = \frac{1}{2}\int_0^T \varphi'(t)(2f(t) - S(t)\varphi(t))\,dt. \tag{7}$$

В непериодическом случае подобная теорема доказана в работе [2].

Для доказательства теоремы найдем производную от функции $x'(t) \times \times D'\left(\varphi(t) + \frac{1}{2}K(t)x(t)\right)$ с учетом выражений (4) — (6). После преобразований имеем

$$\frac{d}{dt}\left(x'(t)D'\left(\varphi(t) + \frac{1}{2}K(t)x(t)\right)\right) = -\frac{1}{2}(x'(t)W(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)) +$$

$$+\frac{1}{2}(u(t) + R^{-1}(t)B'(t)(K(t)x(t) + \varphi(t)))'R(t)(u(t) +$$

$$+R^{-1}(t)B'(t)(K(t)x(t) + \varphi(t))) + \frac{1}{2}\varphi'(t)(2f(t) - S(t)\varphi(t)).$$

Интегрируя последнее равенство по промежутку $[0, T]$, в силу (3) получаем

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (u(t) + R^{-1}(t)B'(t)(K(t)x(t) + \varphi(t)))'R(t)(u(t) +$$

$$+R^{-1}(t)B'(t)(K(t)x(t) + \varphi(t)))\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T \varphi'(t)(2f(t) - S(t)\varphi(t))\,dt.$$

Из положительной определенности матрицы $R(t)$ следует, что минимум функционала $J(u)$ достигается при $u(s) = u^*(s)$ и вычисляется по формуле (7).

Преимуществом полученных уравнений является то, что для записи соотношений, определяющих решение задачи, не нужно приводить уравнения состояния исходной системы к виду, разрешенному относительно производной. Кроме этого, вид соотношений в теоремах 1, 2 одинаков как для вырожденной матрицы D, так и для невырожденной, что очень удобно для исследования сингулярно возмущенных задач.

При $D = \operatorname{diag}(I, \varepsilon I)$, I — единичная матрица, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, где матрица A_4 обратима при всех $t \in [0, T]$, в [3] с учетом результатов для непериодического случая [4] доказана эквивалентность результатов, полученных в случае понижения размерности ($\varepsilon = 0$) в постановке задачи и в случае, когда это понижение сделано в соотношениях, определяющих решение возмущенной задачи. Этот результат непосредственно следует из теоремы 2.

4. В настоящее время имеется большое число работ, посвященных линейным уравнениям, не разрешенным относительно производной. Следуя

[5], рассмотрим вопрос о разрешимости задачи (5) путем сведения ее к стандартным алгебраическому и дифференциальному, разрешенному относительно производной, периодическим матричным уравнениям Риккати, которые изучались, например, в [6]. Представим матрицу $K(t)$ в виде $K(t) = QK(t)P + QK(t)(I - P) + (I - Q)K(t)P + (I - Q)K(t)(I - P)$, где $I - P$ — ортогональный проектор пространства R^n на $\operatorname{Im} D'$, $I - Q$ — на $\operatorname{Im} D$. Из (5) получаем $(I - Q)K(t)P = 0$, а $K_1(t) = QK(t)P$ удовлетворяет стандартному алгебраическому матричному уравнению Риккати. Налагая условия (например [7], матрица $PW(t)P : \operatorname{Ker} D \to \operatorname{Ker} D$ положительно определена, а пара матриц $(QA(t)P, QB(t))$ полностью управляема), обеспечивающие существование периодического решения алгебраического уравнения Риккати такого, что операторы $K_1(t)$ и $QA(t)P - QS(t)QK_1(t)$, действующие из $\operatorname{Ker} D$ в $\operatorname{Ker} D'$, обратимы ($t \in [0, T]$), можно выразить $QK(t)(I - P)$ в виде линейной функции от $(I - Q)K(t) \times (I - P)$. При этом уравнение для $(I - Q)K(t)(I - P)$ приводится к стандартному периодическому дифференциальному уравнению Риккати, разрешенному относительно производной. Из (6) для определения $Q\varphi(t)$ получаем алгебраическое линейное уравнение, а для определения $(I - Q) \times \varphi(t)$ — дифференциальное линейное уравнение, разрешенное относительно производной, с условием периодичности. Однозначная разрешимость последнего уравнения будет следовать из устойчивости некоторой матрицы, определяемой с помощью уравнения для $(I - Q)K(t)(I - P)$.

1. *Курина Г. А.* Достаточные условия оптимальности управления для линейных систем, не разрешенных относительно производной // Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения.— Куйбышев, 1982.— С. 98—102.
2. *Курина Г. А.* Управление с обратной связью для линейных систем, не разрешенных относительно производной // Автоматика и телемеханика.— 1984.— № 6.— С. 37—41.
3. *Дмитриев М. Г., Мурадова Н. Д.* Обоснование идеализации математической модели одной задачи периодической оптимизации // Изв. АН ТССР. Сер. физ.-техн., хим. и геолог. наук.— 1980.— № 3.— С. 6—12.
4. *Haddad A. H., Kokotovic P. V.* Note on singular perturbation of linear state regulators // IEEE Trans. Automat. Contr.— 1971.— **16**, N 3.— P. 279—281.
5. *Курина Г. А.* Об операторном уравнении Риккати, не разрешенном относительно производной // IX школа по теории операторов в функциональных пространствах : Тез. докл.— Тернополь : Тернопол. пед. ин-т, 1984.— С. 68.
6. *Hewer G. A.* Periodicity, detectability and the matrix Riccati equation // SIAM J. Contr.— 1975.— **13**, N 6.— P. 1235—1251.
7. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления.— М. : Наука, 1972.— 574 с.

Воронеж. лесотехн. ин-т

Получено 25.03.85

УДК 517.5

А. К. Кушпель

Об одном семействе экстремальных подпространств

Пусть X — банахово пространство, $\mathfrak{N}$ — центрально-симметричное множество из X. n-Мерным поперечником по А. Н. Колмогорову называют величину

$$d_n(\mathfrak{N}, X) = \inf_{F_n} \sup_{y \in \mathfrak{N}} \inf_{u \in F_n} \| y - u \|_X, \tag{1}$$

где последний раз точная нижняя грань берется по всем подпространствам размерности не выше n. Линейный поперечник $\mathfrak{N}$ в X есть по определению величина

$$d_n'(\mathfrak{N}, X) = \inf_{F_n} \inf_{Ay \in F_n} \sup_{y \in \mathfrak{N}} \| y - Ay \|_X, \tag{2}$$