УДК 519.21

Я. И. Елейко

Предельные распределения временных средних для процессов с марковским вмешательством случая

Рассмотрим полумарковский процесс x_t с конечным числом состояний $\{0, 1, \ldots, m\}$. Обозначим $\tau = \inf\{t > 0 : x_t \neq x_0\}$, $F_{ij}(t) = P_i(\tau \leqslant t,\ x_\tau = j\}$, $F_i(t) = \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(t) = P_i\{\tau \leqslant t\}$, $\varphi_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF_i(t)$, где P_i — условная вероятность при условии $x_0 = i$. Матрица $\| p_{ij} \|_{i,j=1,\ldots,m}$ с $p_{ij} = P_i\{x_\tau = j\}$ вложенной цепи Маркова неразложима и, следовательно, для нее существует единственное стационарное распределение p_j.

Пусть $g(x, y)$ — измеримая функция двух аргументов, принимающая значения в $[0, \infty)$. Тогда нетрудно видеть, что $g(x_t, t)$ — процесс с марковским вмешательством случая τ.

Теорема. *Если найдутся $\alpha \in [0, 1)$ и медленно меняющаяся в нуле функция $L(s)$, такие, что*

$$\frac{1 - \varphi_i(s)}{s^\alpha L(s)} \underset{s \to 0}{\to} a_i, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i p_i > 0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(g(j, u))\, du \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} b_j, \tag{3}$$

где f — ограниченная положительная измеримая функция на $[0, \infty)$, то

$$\lim_{t \to \infty} P_i \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t f(g(x_u, u))\, du < x \right\} = G(x),$$

где

$$\int \frac{1}{\lambda + x}\, dG(x) = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i p_i (b_i + \lambda)^{\alpha - 1}}{\sum_{i=1}^{m} a_i p_i (b_i + \lambda)^{\alpha}}.$$

Замечание. Если положить $g(i, u) = i$, то получим предельную теорему из статьи [1].

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, сформулируем лемму, являющуюся следствием теоремы 5.1 [2, с. 78].

Лемма. *Пусть $\{A_n\}$ — последовательность матриц с неотрицательными элементами, монотонно сходящаяся к A; матрица A неразложима и ее перронов корень равен единице; v и u — левый и правый собственные векторы матрицы A, соответствующие ее перронову корню и $(v, u) = 1$. Тогда $c_n (E - A_n)^{-1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \| u_i v_j \|_{i,j=1,\ldots,m}$, где $c_n = 1 - (v, A_n u)$.*

Доказательство теоремы. Пусть

$$\zeta(t) = \int_0^t f(g(x_u, u))\, du, \quad \varphi_i^s(t) = M_i [e^{-s\zeta(t)}],$$

где M_i — условное математическое ожидание при условии $x_0 = i$. Для $\varphi_i^s(t)$ формула полной вероятности по моменту выхода из начального состояния x_0 такова:

$$\varphi_i^s(t) = M_i[e^{-s\zeta(t)}, \tau > t] + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t M_i[e^{-s\zeta(u)}, \tau \in du, x_\tau = j]\, \varphi_j^s(t-u) =$$

$$= [1 - F_i(t)]\, e^{-s\int_0^t f(g(i,u))du} + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t e^{-s\int_0^u f(g(i,z))dz} F_{ij}(du)\, \varphi_j^s(t-u). \qquad (4)$$

Решение уравнения многомерного восстановления (4) имеет вид (см., например, [2, с. 40; 3, с. 297])

$$\varphi_i^s(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^{m} U_{ij}^s(dx)\, h_j^s(t-x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{m} U_{ij}^s(tdx)\, h_j^s(t(1-x)), \qquad (5)$$

где $U_{ij}^s[0, x) = U_{ij}^s(x)$ — элементы матрицы восстановления [3, с. 297], соответствующей уравнению многомерного восстановления, $h^s(y) = (h_j^s(y), j = 1, \ldots, m)$ — вектор, координаты которого в нашем случае равны

$$h_j^s(y) = [1 - F_j(y)]\, e^{-s\int_0^y f(g(j,u))du}. \qquad (6)$$

Решение уравнения будем искать при условии, что параметр s в (5) равен s/t. Как видно из (5), асимптотическое поведение $\varphi_i^{s/t}(t)$ уравнения (4) при $t \to \infty$ определяется свойствами матричной меры $U^{s/t}(tx) = \| U_{ij}^{s/t}(tx) \|_{i,j=1,\ldots,m}$ и $h^{s/t}(tx)$ при $t \to \infty$.

При $\alpha < 1$ из (1), (3), (6) следует [4, с. 513], что при $x > 0$, $t \to \infty$ $h_i^{s/t}(tx) \sim \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} L(1/t)\, e^{-sb_i} x^{-\alpha}$. Найдем асимптотику матричной меры $U^{s/t}(tx)$. Преобразование Лапласа для $U^s(x)$ равно [2, с. 41] $\int_0^\infty e^{-\lambda u} U^s \times (du) = [E - \Phi_s(\lambda)]^{-1}$, где E — единичная матрица, а $\Phi_s(\lambda) = \| \varphi_{i,j} \times (s, \lambda) \|_{i,j=1,\ldots,m}$,

$$\varphi_{ij}(s, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda u} e^{-s\int_0^u f(g(i,z))dz} F_{ij}(du) = M_i[e^{-\left(\lambda\tau + s\int_0^\tau f(g(i,z))dz\right)}, x_\tau = j].$$

Рассмотрим последовательность матриц $\{\Phi_{s/t}(\lambda/t)\}$ при s и λ фиксированных, $t \to \infty$. Это монотонно неубывающая последовательность матриц с неотрицательными элементами, для которой $\Phi_{s/t}(\lambda/t) \to P$, $t \to \infty$, где $P = \| p_{ij} \|_{i,j=1,\ldots,m}$ — матрица переходных вероятностей вложенной цепи Маркова. Поскольку P неразложима с перроновым корнем, равным единице, левым и правым собственными векторами $p = (p_1, \ldots, p_m)$ и $1 = (1, \ldots, 1)$, то по лемме $c_t [E - \Phi_{s/t}(\lambda/t)]^{-1} \xrightarrow[t\to\infty]{} \| 1 \cdot p_j \|_{i,j=1,\ldots,m}$, где $c_t = 1 - (p, \Phi_{s/t} \times (\lambda/t) \cdot 1)$.

Рассмотрим случайную величину $\int_0^\tau f(g(i,u))\,du$. Из предположений теоремы следует $P_i\left\{\int_0^\tau f(g(i,u))\,du > t\right\} = P_i\{\tau > \overline{h}^{-1}(t)\}$, где $\overline{h}(t) = \int_0^t f(g(i, u))\,du$. Так как $\dfrac{\overline{h}^{-1}(t)}{t} = \dfrac{\overline{h}^{-1}(t)}{\overline{h}(\overline{h}^{-1}(t))} \xrightarrow[t\to\infty]{} \dfrac{1}{b_i}$, то при $t \to \infty$

$$P_i\{\tau > \overline{h}^{-1}(t)\} \sim \frac{a_i (\overline{h}^{-1}(t))^{-\alpha} L(1/\overline{h}^{-1}(t))}{\Gamma(1-\alpha)} \sim \frac{a_i b_i t^{-\alpha} L(1/t)}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Следовательно,

$$1 - M_i [e^{-\lambda/t\tau - s/t \int_0^\tau f(g(i,u))du}] \sim t^{-\alpha} (\lambda + sb_i)^\alpha L(1/t) a_i, \quad t \to \infty. \tag{7}$$

Воспользовавшись (7), найдем асимптотику c_t, $t \to \infty$:

$$c_t = 1 - (p, \Phi_{s/t}(\lambda/t) \cdot 1) = \sum_{i=1}^m p_i [1 - M_i \{e^{-\lambda/t\tau - s/t \int_0^\tau f(g(i,u))du}\}] \sim$$

$$\sim t^{-\alpha} L(1/t) \sum_{i=1}^m a_i p_i (\lambda + sb_i)^\alpha.$$

Из того, что

$$t^{-\alpha} L(1/t) \int_0^\infty e^{-\lambda u} U^{s/t}(tdu) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{\sum_{i=1}^m a_i p_i (\lambda + sb_i)^\alpha} \| 1 \cdot p_j \|_{i,j=1,\ldots,m},$$

следует

$$t^{-\alpha} L(1/t) U_{ij}(tdx) \to \mu_s(dx) p_j \tag{8}$$

в смысле слабой сходимости мер; мера $\mu_s(dx)$ определяется преобразованием Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} \mu_s(dx) = \frac{1}{\sum_{i=1}^m a_i p_i (\lambda + sb_i)^\alpha}.$$

Используя асимптотику $U^{s/t}(tdx)$ и $h^{s/t}(tx)$, имеем

$$\int_0^\infty e^{-sx} dG(x) = \lim_{t\to\infty} \varphi_i^{s/t}(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t U_{ij}^{s,t}(tdx) h_j^{s/t}(t(1-x)) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \sum_{j=1}^m e^{-sbj(1-x)} a_j p_j (1-x)^{-\alpha} \mu_s(dx). \tag{9}$$

Предел (9) существует в силу равномерной сходимости $h_j^{s/t}(t(1-x))/h_j(t)$, $t \to \infty$, на интервале $[0, 1-\varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$ и слабой сходимости меры.

Так как

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y} s^\alpha \mu(1/sdy) = \frac{1}{\sum_{i=1}^m a_i p_i (\lambda + sb_i)^\alpha},$$

то $s^\alpha \mu_s(1/sdy) = \mu_1(dy)$. Следовательно,

$$\int \frac{1}{\lambda + x} dG(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \int e^{-sx} dG(x) ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \times$$

$$\times \int_0^1 \sum_{i='}^m e^{-\lambda b_i(1-x)} a_i p_i (1-x)^{-\alpha} \mu_s(dx) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-\lambda s} \int_0^s \sum_{i=1}^m e^{-sb_i(s-y)} (s -$$

$$- y)^{-\alpha} s^\alpha a_i p_i \mu(1/sdy) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^m a_i p_i \int_0^\infty e^{-sb_i} s^{-\alpha} e^{-\lambda s} ds \int_0^\infty e^{-\lambda y} \mu_1(dy) =$$

$$= \sum_{i=1}^m a_i p_i (\lambda + b_i)^{\alpha-1} / \sum_{i=1}^m a_i p_i (\lambda + b_i)^\alpha.$$

Теорема доказана.

1. *Шуренков В. М., Елейко Я. И.* Предельные распределения временных средних для полумарковского процесса с конечным числом состояний // Укр. мат. журн.— 1979.— **31**, № 5.— С. 598—603.
2. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1976.— 184 с.
3. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы.— М. : Наука, 1971.— 436 с.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М. : Мир, 1967.— 752 с.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики, Львов Получено 10.07.85

УДК 517.53

В. А. Зморович, Л. А. Гудзь

Об одном обобщении асимптотической формулы для *n*!

Как известно, $\Gamma(n+1) = n! = \sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, где $0 < \theta_n < 1$. В настоящей статье устанавливается обобщение этой классической формулы. Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть дана последовательность положительных действительных чисел* $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$, *удовлетворяющих условию* $0 < p_{k+1} - p_k = h_k \leqslant h$, $k = 1, 2, 3, \ldots, h$ — *некоторая постоянная. Тогда*

$$\prod_{k=1}^{n} p_k^{\lambda_k} = Cp_n^{p_n} \exp(-p_n + \vartheta_n), \tag{1}$$

где $\lambda_1 = \frac{1}{2}h_1$, $\lambda_n = \frac{1}{2}h_{n-1}$; $\lambda_k = \frac{h_{k-1} + h_k}{2}$, $k = 2, 3; \ldots, n-1$, $C = p_1^{-p_1}\exp(p_1 - A)$, $A = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \frac{h^2\theta}{12p_1}$, $0 < \theta_n < 1$, $f(k) = \left(p_k + \frac{1}{2}h_k\right) \times \ln\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right) - h_k$, $\vartheta_n = \sum_{k=n}^{\infty} f(k) = \frac{h^2\theta_n}{12p_n}$, $0 < \theta_n < 1$.

Доказательство. Исходим из равенства

$$\int_{p_k}^{p_{k+1}} \ln x dx = p_{k+1}\ln p_{k+1} - p_k \ln p_k - h_k.$$

Суммируя по k от $k = 1$ до $k = n-1$, получаем

$$\int_{p_1}^{p_n} \ln x dx = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} h_k \ln(p_k p_{k+1}), \tag{2}$$

где $f(k) = \left(p_k + \frac{1}{2}h_k\right)\ln\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\right) - h_k$. Из равенства (2), вычисляя интеграл, стоящий в левой части, имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} h_k \ln(p_k p_{k+1}) = p_n \ln p_n - p_n - p_1 \ln p_1 + p_1 - \sum_{k=1}^{n-1} f(k). \tag{3}$$

Потенцируя равенство (3), получаем

$$\prod_{k=1}^{n} p_k^{\lambda_k} = C_n p_n^{p_n} \exp(-p_n), \tag{4}$$

где $C_n = p_1^{-p_1}\exp(p_1 - A_n)$, $A_n = \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$.