1. *Запорожец Г. И.* Исследование однородного дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной // Диф. уравнения.— 1965.— **1**, № 5.— С. 567—581.
2. *Ricceri B.* Solutions lipschitziennez différentielles sous forme implicite // C. r. Acad. Sci. Sér. 1.— 1982.— **295**, N 3.— P. 245—248.
3. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Изв. вузов. Математика.— 1971.— № 9.— С. 79—84.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.— 472 с.

Одес. инж.-строит. ин-т

Получено 08.05.85,
после доработки — 06.11.85

УДК 517.512

К. М. Слепенчук

Теорема тауберова типа на случай суммирования двойных рядов методом Бореля

Если

$$\varphi(x, y) = e^{-x}e^{-y} \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k!l!} S_{kl} \to S, \quad x, y \to \infty, \tag{1}$$

то говорят, что последовательность $\{S_{kl}\}$ B-суммируема к S.

В настоящей статье устанавливается одна теорема тауберова типа для B-метода суммирования двойных рядов.

Введем обозначения: $\Delta\alpha_{kl} = \alpha_{kl} - \alpha_{k-1\,l} - \alpha_{k\,l-1} + \alpha_{k-1\,l-1}$, $\bar{\Delta}_k\alpha_{kl} = \alpha_{k+1\,l} - \alpha_{kl}$, $\bar{\Delta}_l\alpha_{kl} = \alpha_{kl} - \alpha_{k\,l+1}$, $\Delta_k\alpha_{kl} = \alpha_{kl} - \alpha_{k-1\,l}$, $\Delta_l\alpha_{kl} = \alpha_{kl} - \alpha_{k\,l-1}$.

Теорема. *Если ограниченная последовательность $\{S_{kl}\}$ B-суммируема к S, то она сходится к S при выполнении условий* $\tau_{mn}^{(1)} = m \sum_{l=1}^{n} u_{ml} = O(1)$, $\tau_{mn}^{(2)} = n \sum_{k=1}^{m} u_{kn} = O(1)$, *где* $u_{kl} = \Delta S_{kl}$, $S_{00} = S_{10} = S_{01} = 0$.

Доказательство. Если справедливо (1), то оно справедливо и при $x = m$, $y = n$, т. е. $A_{mn} = e^{-m}e^{-n} \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{m^k n^l}{k!l!} S_{kl} \to S$, $m, n \to \infty$.

Положим $a_{mk}^{(1)} = e^{-m}m^k/k!$, $a_{nl}^{(2)} = e^{-n}n^l/l!$. Заметим, что матрицы $\| a_{mk}^{(1)} \|$ и $\| a_{nl}^{(2)} \|$ являются T-матрицами.

Рассмотрим тождество

$$A_{mn} - S_{mn} = \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}^{(2)} S_{ml} - S_{mn} \right) + \sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}^{(2)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}^{(1)} S_{kl} - S_{ml} \right) =$$

$$= \sigma_{mn}^{(1)} + \sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}^{(2)} \sigma_{ml}^{(2)} = \sigma_{mn}^{(1)} + \sigma_{mn}^{(3)}. \tag{2}$$

Заметим, что $S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \tau_{kn}^{(1)}/k$, $S_{mn} = \sum_{l=1}^{n} \tau_{ml}^{(2)}/l$. Если положить $R_{nl}^{(2)} = \sum_{i=l}^{\infty} a_{ni}^{(2)} \sum_{\iota=l}^{i} 1/\sqrt{\iota}$, $\delta_{nl}^{(2)} = \sum_{i=l}^{\infty} a_{ni}^{(2)}$, то в силу преобразования Абеля

$$\sum_{l=1}^{N+1} R_{nl}^{(2)} \Delta_l (\tau_{ml}^{(2)}/\sqrt{l}) = \sum_{l=1}^{N} \delta_{nl}^{(2)}/\sqrt{l}\, t_{ml}^{(2)} \sqrt{l} + R_{nN+1}^{(2)} \frac{\tau_{m\,N+1}^{(2)}}{\sqrt{N+1}},$$

$$\sum_{l=1}^{N} \delta_{nl}^{(2)}/\sqrt{l}\, \tau_{ml}^{(2)}/\sqrt{l} = \sum_{l=1}^{N-1} a_{nl}^{(2)} \sum_{i=1}^{l} \tau_{mi}^{(2)}/i + \delta_{nN}^{(2)} \sum_{l=1}^{N} \tau_{ml}^{(2)}/l.$$

В таком случае

$$\sigma_{mn}^{(1)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{l=1}^{N-1} a_{nl}^{(2)} \sum_{i=1}^{l} \tau_{mi}^{(2)}/i - \sum_{l=1}^{n} 1/\sqrt{l} \sum_{i=1}^{l} \Delta_i (\tau_{mi}^{(2)}/\sqrt{i}) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \Big[\sum_{l=1}^{N+1} R_{nl}^{(2)} \Delta_l (\tau_{ml}^{(2)}/\sqrt{l}) - R_{n\,N+1}^{(2)} \tau_{m\,N+1}^{(2)}/\sqrt{N+1} - \delta_{nN}^{(2)} \sum_{l=1}^{N} \tau_{ml}^{(2)}/l \Big] -$$

$$- \sum_{l=1}^{n} \Big(\sum_{i=l}^{n} 1/\sqrt{i} \Big) \Delta_l (\tau_{ml}^{(2)}/\sqrt{l}). \qquad (3)$$

Так как $\delta_{nN}^{(2)} \to 0$, $N \to \infty$, $R_{n\,N+1}^{(2)} \to 0$, $N \to \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, и $S_{mn} = O(1)$, то из (3) имеем $\sigma_{mn}^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} A_{nl}^{(2)} \Delta_l (\tau_{ml}^{(2)}/\sqrt{l})$, где

$$A_{nl}^{(2)} = \begin{cases} \sum_{\iota=l}^{\infty} a_{mi}^{(2)} \sum_{\iota=l}^{i} 1/\sqrt{\iota} - \sum_{\iota=l}^{n} 1/\sqrt{\iota}, & 1 \leqslant l \leqslant n, \\ \sum_{i=l}^{\infty} a_{ni}^{(2)} \sum_{\iota=l}^{i} 1/\sqrt{\iota}, & l > n. \end{cases}$$

Далее,

$$\sum_{l=1}^{N} A_{nl}^{(2)} \Delta_l (\tau_{ml}^{(2)}/\sqrt{l}) = \sum_{l=1}^{N-1} \overline{\Delta} A_{nl}^{(2)} \tau_{ml}^{(2)}/\sqrt{l} + \frac{\tau_{mN}^{(2)}}{\sqrt{N}} A_{nN}^{(2)}. \qquad (4)$$

Покажем, что матрица $\| \overline{\Delta}_l A_{nl}^{(2)} \|$ является регулярной на классе нуль-последовательностей. В самом деле,

$$\sum_{l=1}^{\infty} | \overline{\Delta}_l A_{nl}^{(2)} | = \sum_{l=1}^{n} | \overline{\Delta}_l A_{nl}^{(2)} | + \sum_{l=n+1}^{\infty} | \overline{\Delta}_l A_{nl}^{(2)} | = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2.$$

При $l > n$

$$\mathcal{J}_2 = \sum_{l=n+1}^{\infty} 1/\sqrt{l} \sum_{i=l}^{\infty} n^i/e^n i! = O(1),$$

если воспользоваться известной оценкой [1]. Если $l \leqslant n$, то

$$\mathcal{J}_1 = \sum_{l=1}^{n} \Big| 1/\sqrt{l} \sum_{i=l}^{\infty} n^i/e^n i! - 1/\sqrt{l} \Big| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} e^{-n} \frac{n^i (n-i)}{i! \sqrt{i+1}} = O(1).$$

Таким образом, $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = O(1)$. Далее, для каждого фиксированного l

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\Delta}_l A_{nl}^{(2)} = 1/\sqrt{l} \Big(\sum_{i=l}^{\infty} a_{ni}^{(2)} - 1 \Big) = \lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{l} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}^{(2)} - 1 - \sum_{i=1} a_{ni}^{(2)} \Big) = 0.$$

В таком случае $A_{nN}^{(2)} = O_n(1)$, а следовательно, из (4) будем иметь $\sigma_{mn}^{(1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \overline{\Delta}_l A_{nl}^{(2)} \tau_{ml}^{(2)}/\sqrt{l}$.

Так как матрица $\| \Delta_l A_{nl}^{(2)} \|$ регулярна на классе нуль-последовательностей, то $\sigma_{mn}^{(1)} = o(1)$, $m, n \to \infty$.

Если положить $R_{mk}^{(1)} = \sum_{i=k}^{\infty} a_{mi}^{(1)} \sum_{\iota=k}^{i} 1/\sqrt{\iota}$, $\delta_{mk}^{(1)} = \sum_{i=k}^{\infty} a_{mi}^{(1)}$, то

$$\sum_{k=1}^{N+1} R_{mk}^{(1)} \Delta_k (\tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k}) = \sum_{k=1}^{N} \delta_{mk}^{(1)}/\sqrt{k}\, \tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k} + R_{mN+1}^{(1)} \sum_{k=1}^{N} \frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\sqrt{k}},$$

$$\sum_{k=1}^{N} \delta_{mk}^{(1)} \tau_{kl}^{(1)}/k = \sum_{k=1}^{N-1} a_{mk}^{(1)} \sum_{i=1}^{k} \tau_{il}^{(1)}/i + \delta_{mN} \sum_{i=1}^{N} \tau_{il}^{(1)}/i,$$

откуда

$$\sigma_{ml}^{(2)} = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N-1} a_{mk}^{(1)} \sum_{i=1}^{k} \tau_{il}^{(1)}/i - \sum_{k=1}^{m} \tau_{kl}^{(1)}/k =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N+1} R_{mk}^{(2)} \Delta_k \frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{m} 1/\sqrt{k} \sum_{i=1}^{k} \Delta_i (\tau_{il}^{(1)}/\sqrt{i}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk}^{(1)} \Delta_k (\tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k}),$$

где

$$A_{mk} = \begin{cases} \sum_{i=k}^{\infty} a_{mi}^{(1)} \sum_{\iota=k}^{i} 1/\sqrt{\iota} - \sum_{\iota=k}^{m} 1/\sqrt{\iota}, & 1 \leqslant k \leqslant m, \\ \sum_{i=k}^{\infty} a_{mi}^{(1)} \sum_{\iota=k}^{i} 1/\sqrt{\iota}, & k > m. \end{cases}$$

Так как

$$\sum_{l=1}^{N} \delta_{nl}^{(2)} \Delta (\tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k}) = \sum_{l=1}^{N-1} a_{nl}^{(2)} \overline{\Delta}_k (\tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k}) + \delta_{nN}^{(2)} \overline{\Delta}_k \frac{\tau_{kN}^{(1)}}{\sqrt{N}},$$

то

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}^{(2)} \overline{\Delta}_k (\tau_{kl}^{(1)}/k) = \sum_{l=1}^{\infty} \delta_{nl}^{(2)} \Delta (\tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k}).$$

Следовательно, $\sigma_{mn}^{(3)} = \sum_{k,l=1}^{\infty} A_{mk}^{(1)} \delta_{nl}^{(2)} \Delta (\tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k})$.

Если применить преобразование Харди, то получим

$$\sum_{k,l=1}^{M,N} A_{mk}^{(1)} \delta_{nl}^{(2)} \Delta (\tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k}) = \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{l=1}^{N-1} \overline{\Delta}_k A_{mk}^{(1)} a_{nl} \tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k} + \sum_{k=1}^{M-1} \overline{\Delta}_k A_{nk}^{(1)} \delta_{nN}^{(2)} \tau_{kN}^{(1)}/\sqrt{k} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{N-1} A_{nM} \overline{\Delta}_l \delta_{nl}^{(2)} \tau_{Ml}^{(1)}/\sqrt{M} + A_{mM}^{(1)} \tau_{kN}^{(1)}/\sqrt{k}\, \delta_{nm}^{(2)},$$

откуда $\sigma_{mn}^{(3)} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \Delta_k A_{mk}^{(1)} a_{nl}^{(2)} \tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k}$.

Так как матрица $\| \Delta_k A_{mk}^{(1)} a_{nl}^{(2)} \|$ регулярна на классе ограниченных нуль-последовательностей, то $\sigma_{mn}^{(3)} = o(1)$, $m, n \to \infty$. А тогда, как показывает (2), $S_{mn} \to S$, $m, n \to \infty$.

Доказанная теорема является аналогом известной теоремы тауберова типа для B-метода в одномерном случае, в которой тауберово условие имеет вид $nu_n = O(1)$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.

1. *Lorentz J. J.* Tauberians theorems for absolute summability // Arch. Math. — 1954. — 5. — P. 469—475.

Днепропетр. ун-т Получено 17.10.85

Так как матрица $\| \Delta_l A_{nl}^{(2)} \|$ регулярна на классе нуль-последовательностей, то $\sigma_{mn}^{(1)} = o(1)$, $m, n \to \infty$.

Если положить $R_{mk}^{(1)} = \sum_{i=k}^{\infty} a_{mi}^{(1)} \sum_{\iota=k}^{i} 1/\sqrt{\iota}$, $\delta_{mk}^{(1)} = \sum_{i=k}^{\infty} a_{mi}^{(1)}$, то

$$\sum_{k=1}^{N+1} R_{mk}^{(1)} \Delta_k (\tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k}) = \sum_{k=1}^{N} \delta_{mk}^{(1)}/\sqrt{k}\, \tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k} + R_{mN+1}^{(1)} \sum_{k=1}^{N} \frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\sqrt{k}},$$

$$\sum_{k=1}^{N} \delta_{mk}^{(1)} \tau_{kl}^{(1)}/k = \sum_{k=1}^{N-1} a_{mk}^{(1)} \sum_{i=1}^{k} \tau_{il}^{(1)}/i + \delta_{mN} \sum_{i=1}^{N} \tau_{il}^{(1)}/i,$$

откуда

$$\sigma_{ml}^{(2)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N-1} a_{mk}^{(1)} \sum_{i=1}^{k} \tau_{il}^{(1)}/i - \sum_{k=1}^{m} \tau_{kl}^{(1)}/k =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N+1} R_{mk}^{(2)} \Delta_k \frac{\tau_{kl}^{(1)}}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{m} 1/\sqrt{k} \sum_{i=1}^{k} \Delta_i (\tau_{il}^{(1)}/\sqrt{i}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{mk}^{(1)} \Delta_k (\tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k}),$$

где

$$A_{mk} = \begin{cases} \sum_{i=k}^{\infty} a_{mi}^{(1)} \sum_{\iota=k}^{i} 1/\sqrt{\iota} - \sum_{\iota=k}^{m} 1/\sqrt{\iota}, & 1 \leqslant k \leqslant m, \\ \sum_{i=k}^{\infty} a_{mi}^{(1)} \sum_{\iota=k}^{i} 1/\sqrt{\iota}, & k > m. \end{cases}$$

Так как

$$\sum_{l=1}^{N} \delta_{nl}^{(2)} \Delta (\tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k}) = \sum_{l=1}^{N-1} a_{nl}^{(2)} \overline{\Delta}_k (\tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k}) + \delta_{nN}^{(2)} \overline{\Delta}_k \frac{\tau_{kN}^{(1)}}{\sqrt{N}},$$

то

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}^{(2)} \overline{\Delta}_k (\tau_{kl}^{(1)}/k) = \sum_{l=1}^{\infty} \delta_{nl}^{(2)} \Delta (\tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k}).$$

Следовательно, $\sigma_{mn}^{(3)} = \sum_{k,l=1}^{\infty} A_{mk}^{(1)} \delta_{nl}^{(2)} \Delta (\tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k})$.

Если применить преобразование Харди, то получим

$$\sum_{k,l=1}^{M,N} A_{mk}^{(1)} \delta_{nl}^{(2)} \Delta (\tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k}) = \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{l=1}^{N-1} \overline{\Delta}_k A_{mk}^{(1)} a_{nl} \tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k} + \sum_{k=1}^{M-1} \overline{\Delta}_k A_{nk}^{(1)} \delta_{nN}^{(2)} \tau_{kN}^{(1)}/\sqrt{k} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{N-1} A_{nM} \overline{\Delta}_l \delta_{nl}^{(2)} \tau_{Ml}^{(1)}/\sqrt{M} + A_{mM}^{(1)} \tau_{kN}^{(1)}/\sqrt{k}\, \delta_{nm}^{(2)},$$

откуда $\sigma_{mn}^{(3)} = \sum_{k,l=1}^{\infty} \Delta_k A_{mk}^{(1)} a_{nl}^{(2)} \tau_{kl}^{(1)}/\sqrt{k}$.

Так как матрица $\| \Delta_k A_{mk}^{(1)} a_{nl}^{(2)} \|$ регулярна на классе ограниченных нуль-последовательностей, то $\sigma_{mn}^{(3)} = o(1)$, $m, n \to \infty$. А тогда, как показывает (2), $S_{mn} \to S$, $m, n \to \infty$.

Доказанная теорема является аналогом известной теоремы тауберова типа для B-метода в одномерном случае, в которой тауберово условие имеет вид $nu_n = O(1)$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.

1. *Lorentz J. J.* Tauberians theorems for absolute summability // Arch. Math. — 1954. — 5. — P. 469—475.

Днепропетр. ун-т

Получено 17.10.85