1. *Ковтунец В. В.* Дифференциальные свойства оператора наилучшего приближения комплекснозначных функций. I // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 4.— С. 437—443.
2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 504 с.
3. *Blatt H.-P.* Linear complex Chebyshev approximation // J. Approxim. Theory.— 1984.— **41**, N 2.— P. 159—169.
4. *Шварц Л.* Анализ : В 2-х т.— М. : Мир, 1972.— Т. 1.— 824 с.

Ровен. пед. ин-т Получено 05.11.85

УДК 517.926

В. Л. Кулик

Ограниченные решения систем линейных дифференциальных уравнений

Обозначим через $C^0(R)$ пространство непрерывных и ограниченных на всей оси $R =]-\infty, \infty[$ функций $f(t)$, $C^1(R)$ — подпространство пространства $C^0(R)$ функций, имеющих непрерывные производные первого порядка. Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = A(t)\,x, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $t \in R$, $A(t) \in C^0(R)$, и предположим, что существует знакопеременная квадратичная форма $V(t, x) = \langle S(t)\,x, x\rangle$, $S(t) \in C^1(R)$, имеющая знакоопределенную производную вдоль решений системы (1)

$$\dot V(t, x) = \langle (dS(t)/dt + S(t)\,A(t) + A^T(t)\,S(t))\,x, x\rangle \leqslant -\|x\|^2. \tag{2}$$

Угловыми скобками $\langle\cdot, \cdot\rangle$ обозначаем скалярное произведение в R^n, $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. Известно [1, 2], что в случае, когда $\det S(t) \neq 0$, $\forall t \in R$ система (1) будет э-дихотомичной на R. Следовательно, неоднородная система уравнений

$$dx/dt = A(t)\,x + f(t) \tag{3}$$

при каждой фиксированной вектор-функции $f(t) \in C^0(R)$ будет иметь единственное ограниченное на R решение. Если же определитель матрицы S при некотором значении $t = t_0$ превращается в нуль, то система (3) уже не при каждой вектор-функции $f(t) \in C^0(R)$ будет иметь ограниченное на R решение. Выяснению вопроса существования при этих условиях ограниченного на R решения системы (3) и посвящена предлагаемая статья.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть существует симметричная матрица* $S(t) \in C^1(R)$, *удовлетворяющая условию* (2), *и* $\det S(t_0) = 0$ *при некотором значении* $t = t_0 \in R$. *Тогда необходимым и достаточным условием существования ограниченного на* R *решения системы* (3) *является выполнение равенства*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle f(t), y(t)\rangle\, dt = 0 \tag{4}$$

при каждом ограниченном на R *решении* $y = y(t)$ *сопряженной системы уравнений*

$$dy/dt = -A^T(t)\,y. \tag{1'}$$

Доказательство. Сперва отметим, что при выполнении условий приведенной теоремы системы уравнений (1′) имеет нетривиальные ограниченные на R решения и все они экспоненциально убывают к нулю при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ [3]. Расширенная система уравнений

$$dx/dt = A(t)\,x - y, \quad dy/dt = -A^T(t)\,y, \quad y \in R^n, \tag{5}$$

является э-дихотомичной на всей оси R [4]. Поэтому неоднородная система уравнений

$$dx/dt = A(t)x - y + f(t), \quad dy/dt = -A^T(t)y + g(t) \tag{6}$$

при любых фиксированных вектор-функциях $f(t)$, $g(t) \in C^0(R)$ имеет единственное ограниченное на R решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ и оно представимо в виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau) \begin{pmatrix} f(\tau) \\ g(\tau) \end{pmatrix} d\tau, \tag{7}$$

где $G(t, \tau)$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях системы (6). Эта функция имеет следующую структуру:

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega_0^t(A) & \omega(t, 0) \\ 0 & (\Omega_t^0(A))^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(A) & \omega(0, \tau) \\ 0 & (\Omega_0^\tau(A))^T \end{bmatrix}, & \tau \leqslant t, \\ \begin{bmatrix} \Omega_0^t(A) & \omega(t, 0) \\ 0 & (\Omega_t^0(A))^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} - I_n & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} - I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(A) & \omega(0, \tau) \\ 0 & (\Omega_0^\tau(A))^T \end{bmatrix}, & \tau > t, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\omega(t, \tau) = -\int_\tau^t \Omega_\sigma^t(A)(\Omega_\sigma^0(A))^T d\sigma, \tag{8'}$$

$\| C_{ij} \|_{i,j=1}^2$ — постоянная матрица проектирования, $\Omega_\tau^t(A)$— матрицант системы (1), $\Omega_\tau^\tau(A) = I_n$. При этом справедлива оценка

$$\| G(t, \tau) \| \leqslant K \exp\{-\gamma |t - \tau|\}, \quad K, \gamma - \text{const} > 0. \tag{9}$$

Известно [5], что матрицы C_{12}, C_{21}, входящие в структуру функции Грина (8), симметричны. В силу оценки (9) имеем

$$\| (\Omega_t^0(A))^T C_{21} \Omega_\tau^0(A) \| \leqslant K \exp\{-\gamma |t - \tau|\}. \tag{9'}$$

Поэтому для каждого числового вектора $\eta \in R^n$ равенством

$$y = (\Omega_t^0(A))^T C_{21} \eta \tag{10}$$

определяется ограниченное на R решение системы (1′). Покажем, что равенством (10) можно определить каждое ограниченное на R решение системы (1′). Пусть $y = y^*(t)$ — нетривиальное ограниченное на R решение системы (1′). Тогда неоднородная система уравнений (6), в которой полагаем $f(t) \equiv y^*(t)$, $g(t) \equiv 0$, имеет единственное ограниченное на R решение $x = 0$, $y = y^*(t)$, и это решение представимо в виде (7), где $f(\tau) \equiv y^*(\tau)$, $g(\tau) \equiv 0$. Для последних n координат равенство (7) принимает вид

$$y^*(t) = (\Omega_t^0(A))^T \int_{-\infty}^{\infty} C_{21} \Omega_\tau^0(A) y^*(\tau) d\tau. \tag{11}$$

Очевидно, постоянную матрицу C_{21} невозможно вынести за знак интеграла, поскольку интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\tau^0(A) y^*(\tau) d\tau$ может расходиться. Но несмотря на это, для каждой вектор-функции $v(t) \in C^0(R)$, η — const $\in R^n$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_{21} \Omega_\tau^0(A) v(\tau) d\tau = C_{21} \eta. \tag{12}$$

Действительно, симметричную матрицу C_{21} с помощью ортогональной матрицы Q можно привести к жордановой форме $Q^{-1} C_{21} Q = \text{diag}\{\Lambda, 0\}$, где

Λ — r-мерная диагональная матрица, состоящая из r ненулевых собственных чисел матрицы C_{21}. Обозначая $P = Q\,\mathrm{diag}\{I_r, 0\}\,Q^{-1}$, левую часть равенства (12) преобразуем следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} C_{21}\Omega_\tau^0(A)\,v(\tau)\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q\,\mathrm{diag}\{\Lambda, 0\}\,Q^{-1}\Omega_\tau^0(A)\,v(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q\,\mathrm{diag}\{\Lambda, 0\}\,Q^{-1}P\Omega_\tau^0(A)\,v(\tau)\,d\tau = C_{21}\int\limits_{-\infty}^{\infty} P\Omega_\tau^0(A)\,v(\tau)\,d\tau = C_{21}\eta.$$

Возвращаясь к равенству (11) и учитывая (12), получаем $y^*(t) = (\Omega_t^0(A))^T \times \times C_{21}\eta$. Таким образом, равенством (10) определяются все ограниченные на R решения сопряженной системы (1′).

Покажем, что выполнение условия (4) эквивалентно выполнению равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} C_{21}\Omega_\tau^0(A)\,f(\tau)\,d\tau = 0. \tag{13}$$

Пусть при некоторой фиксированной вектор-функции $f(\tau) = f_0(\tau) \in C^0(R)$ выполняется равенство (13). Тогда для произвольного числового вектора $\eta = \mathrm{colon}\{\eta_1, \ldots, \eta_n\} \in R^n$ с учетом симметричности матрицы C_{12} имеем

$$0 = \eta^T\int\limits_{-\infty}^{\infty} C_{21}\Omega_\tau^0(A)\,f_0(\tau)\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [(\Omega_\tau^0(A))^T C_{21}\eta]^T f_0(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle(\Omega_\tau^0(A))^T C_{21}\eta, f_0(\tau)\rangle\,d\tau. \tag{14}$$

Поскольку равенством (10) определяется каждое ограниченное на R решение системы (1′), то равенство (14) как раз и указывает на выполнение условия (4) при $f(t) \equiv f_0(t)$. Очевидно, если выполняется условие (4) при некоторой вектор-функции $f(t) = f_0(t) \in C^0(R)$, а все ограниченные на R решения системы (1′) представляются равенством (10), то $\forall\eta \in R^n$ выполняется равенство (14). Отсюда в силу произвольности $\eta \in R^n$ должно выполняться условие (13). Таким образом, эквивалентность условий (4) и (13) доказана. Теперь покажем, что условие (13) является необходимым и достаточным для существования ограниченного на R решения системы (3). Пусть неоднородная система (3) при некоторой вектор-функции $f(t) = = \tilde{f}(t) \in C^0(R)$ имеет ограниченное на R решение $x = \tilde{x}(t)$. Тогда система (6) при $f(t) \equiv \tilde{f}(t)$, $g(t) \equiv 0$ имеет ограниченное на R решение $x = \tilde{x}(t)$, $y = 0$ и оно единственно:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t, \tau)\begin{pmatrix} \tilde{f}(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau. \tag{7′}$$

Отсюда для координат y с учетом структуры функции Грина (8) получаем

$$0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\Omega_t^0(A))^T C_{21}\Omega_\tau^0(A)\,\tilde{f}(\tau)\,d\tau. \tag{15}$$

Поскольку $\det\Omega_t^0(A) \neq 0$, то из равенства (15) сразу следует равенство (13) при $f(t) \equiv \tilde{f}(t)$. Пусть теперь выполняется равенство (13) при некоторой вектор-функции $f(t) = \bar{f}(t) \in C^0(R)$. Неоднородная система (6) при $f(t) \equiv \bar{f}(t)$, $g(t) \equiv 0$ имеет единственное ограниченное на R решение, представимое равенством (7) ($f \equiv \bar{f}$, $g \equiv 0$). В силу (13) и (7′) для координат y получаем $y = 0$. Поэтому система (3) при $f(t) \equiv \bar{f}(t)$ имеет ограниченное на R решение. Этим и завершается доказательство теоремы 1.

Замечание 1. Все функции $f(t) \in C^0(R)$, удовлетворяющие равенству (13), могут быть представлены равенством

$$f(t) = v(t) - (\Omega_t^0(A))^T \int_{-\infty}^{\infty} C_{21}\Omega_\tau^0(A)\, v(\tau)\, d\tau, \tag{16}$$

где $v(t)$ — произвольная вектор-функция из пространства $C^0(R)$.

Действительно, зафиксируем некоторую вектор-функцию $v(t) = v_0(t) \in C^0(R)$ и покажем, что функция $f(t) = f_0(t)$, определяемая равенством (16), удовлетворяет условию (13). Учитывая проектируемость оператора [5] $\mathfrak{M}v = (\Omega_t^0(A))^T \int_{-\infty}^{\infty} C_{21}\Omega_\tau^0(A)\, v(\tau)\, d\tau$, $\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}$, получаем $\mathfrak{M}f_0(t) = \mathfrak{M}(v_0(t) - \mathfrak{M}v_0(t)) = \mathfrak{M}v_0(t) - \mathfrak{M}^2 v_0(t) \equiv 0$. Теперь пусть $f(t) = f^0(t)$ — некоторая фиксированная вектор-функция из пространства $C^0(R)$, удовлетворяющая равенству (13). Тогда для нее выполняется равенство (16) при $v(t) = \mathfrak{M}f^0(t)$.

Замечание 2. В условиях теоремы 1 ограниченное на R решение системы (3) представимо в виде

$$x(t) = \Omega_0^t(A) \int_{-\infty}^{t} C_{11}\Omega_\tau^0(A)\, f(\tau)\, d\tau + \Omega_0^t(A) \int_{t}^{\infty} (C_{11} - I_n)\, \Omega_\tau^0(A)\, f(\tau)\, d\tau.$$

При этом для функции

$$\tilde{G}(t, \tau) = \begin{cases} \Omega_0^t(A)\, C_{11}\Omega_\tau^0(A), & \tau \leqslant t, \\ \Omega_0^t(A)\,(C_{11} - I_n)\,\Omega_\tau^0(A), & \tau > t \end{cases}$$

не будет выполняться оценка вида (9). Эта оценка будет выполняться для суммы $\tilde{G}(t, \tau) + \omega(t, 0)\, C_{21}\Omega_\tau^0(A)$, где $\omega(t, 0)$ определено равенством (8′) при $\tau = 0$.

При изучении гладкости инвариантных тороидальных многообразий существенную роль играет постоянная γ в оценке функции Грина (9) [6]. Поэтому особый интерес представляет вопрос определения постоянной γ через матрицу $S(t)$, удовлетворяющую неравенству (2). Обозначим $2\gamma_0 = (\sup\limits_{t \in R} \max\limits_{\|x\|=1} |\langle S(t)x, x\rangle|)^{-1}$ и докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда для каждого фиксированного числа* $\varepsilon_0 \in]0, \gamma_0[$ *существует постоянная* $K(\varepsilon_0) > 0$ *такая, что для функции Грина* (8) *справедлива оценка*

$$\| G(t, \tau) \| \leqslant K(\varepsilon_0) \exp\{-(\gamma_0 - \varepsilon_0)\, |t - \tau|\} \ \forall t, \tau \in R. \tag{17}$$

Доказательство. Зафиксируем некоторое число $\varepsilon_0 \in]0, \gamma_0[$ и покажем, что при $p = \pm(\gamma_0 - \varepsilon_0)$ возмущенная система уравнений

$$dx/dt = (A(t) + pI_n)\, x - y, \quad dy/dt = (-A^T(t) + pI_n)\, y \tag{5′}$$

является э-дихотомичной на всей оси R, т. е. имеет единственную функцию Грина $G(t, \tau;\, p)$. Очевидно, в силу простой взаимосвязи между матрицантами систем (5′) и (5) $\bar{\Omega}_\tau^t(p) \equiv \bar{\Omega}_\tau^t(0) \exp\{p(t - \tau)\}$ выполняется тождество

$$G(t, \tau;\, p) \equiv G(t, \tau;\, 0) \exp\{p(t - \tau)\}. \tag{18}$$

Заметим, что при выполнении неравенства (2) и значении $p = \pm(\gamma_0 - \varepsilon_0)$ матрица $\hat{S}(t;\, p) = dS(t)/dt + S(t)(A(t) + pI_n) + (A^T(t) + pI_n)\, S(t)$ является отрицательно определенной. Действительно, $\langle \hat{S}(t;\, p)\, x, x\rangle \leqslant -\|x\|^2 + 2\,|p| \times |\langle S(t)x, x\rangle| \leqslant -[1 - 2\,|p| \sup\limits_{t \in R}(\max\limits_{\|x\|=1} |\langle S(t)x, x\rangle|)]\, \|x\|^2 = -\gamma_0^{-1}\varepsilon_0 \|x\|^2$. Поэтому система (1′) и вторая подсистема системы (5′) имеют одно и то же подпространство затухающих на $\pm\infty$ решений. Используя результаты работы [2], систему уравнений (5′) с помощью замены переменных Ляпунова $x = L(t)v$, $y = (L^{-1}(t))^T u$ преобразуем к блочно-треугольному виду $dv/dt = (Y(t) + pI_n)v - L^{-1}(t)(L^{-1}(t))^T u$, $du/dt = (-Y^T(t) + pI_n)u$, где

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y^+(t) & 0 & Y_1(t) \\ 0 & Y^-(t) & Y_2(t) \\ 0 & 0 & \check{Y}(t) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что неоднородная система уравнений

$$dv/dt = (Y(t) + pI_n)v - L^{-1}(t)(L^{-1}(t))^T u + f(t),$$
$$du/dt = (-Y^T(t) + pI_n)u + \varphi(t) \tag{19}$$

при любых фиксированных вектор-функциях $f(t)$, $\varphi(t) \in C^0(R)$ имеет единственное ограниченное на R решение. Для этого, очевидно, достаточно доказать существование единственного ограниченного на R решения подсистемы

$$dv_3/dt = (\check{Y}(t) + pI_{r_3})v_3 + M(t)u_3 + f_3(t), \quad du_3/dt = (-\check{Y}^T(t) + pI_{r_3})u_3 + \varphi_3(t) \tag{20}$$

при любых фиксированных вектор-функциях $f_3(t)$, $\varphi_3(t) \in C^0(R)$. При этом учтем, что матрица $M(t)$ — симметричная и определенно отрицательная. Подставляя общее решение второй подсистемы $u_3(t) = (\Omega_t^0(\check{Y}))^T \Big(\eta + \int\limits_0^t (\Omega_0^\tau(\check{Y}))^T \exp\{-p\tau\}\varphi_3(\tau)\,d\tau\Big)\exp\{pt\}$, где η — произвольный постоянный вектор из R^{r_3}, в первую, получаем

$$dv_3/dt = (\check{Y}(t) + pI_{r_3})v_3 + M(t)(\Omega_t^0(\check{Y}))^T \exp\{pt\}\eta + \bar{f}_3(t), \tag{21}$$

где $\bar{f}_3(t) = M(t)\int\limits_0^t (\Omega_t^\tau(\check{Y}))^T \exp\{p(t-\tau)\}\varphi_3(\tau)\,d\tau + f_3(t)$. Для того чтобы неоднородная система (21) имела ограниченное на R решение, необходимо и достаточно $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Omega_\tau^0(\check{Y})\exp\{-p\tau\}[M(\tau)(\Omega_\tau^0(\check{Y}))^T\exp\{p\tau\}\eta + \bar{f}_3(\tau)]\,d\tau = 0$. Отсюда однозначно определяем вектор η:

$$\eta = -\Big[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Omega_\tau^0(\check{Y})M(\tau)(\Omega_\tau^0(\check{Y}))^T d\tau\Big]^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Omega_\tau^0(\check{Y})\exp\{-p\tau\}\bar{f}_3(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, система уравнений (20), а следовательно, и (19) при любых вектор-функциях $f(t)$, $\varphi(t) \in C^0(R)$ имеют единственные ограниченные на R решения. Поэтому система (5′) э-дихотомична на R и имеет единственную функцию Грина $G(t, \tau; p)$, удовлетворяющую оценке

$$\|G(t,\tau;\ p)\| \leqslant K\exp\{-\gamma(p)\,|t-\tau|\}, \tag{22}$$

где $\gamma(p)$ пока не известно (известно только, что $\gamma(p) > 0$). Покажем, что из тождества (18) и неравенства (22) при $\gamma(p) > 0$ следует оценка (17). Предположим, что оценка (17) не выполняется. Тогда существует последовательность значений t_n, $\tau_n \in R$, при которых

$$\lim_{n\to\infty}\exp\{(\gamma_0 - \varepsilon_0)\,|t_n - \tau_n|\}\,\|G(t_n,\tau_n)\| = \infty. \tag{23}$$

Очевидно, можно считать, что $t_n \geqslant \tau_n$ либо $t_n \leqslant \tau_n$ $\forall\, n \in N$. В противном случае всегда существует подпоследовательность, которая уже удовлетворяет одному из этих неравенств. Равенство (23) совместно с тождеством (18) противоречит (22). Поэтому оценка (17) выполняется. Этим и завершается доказательство теоремы 2.

1. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Экспоненциальная дихотомия инвариантного тора динамических систем // Дифференц. уравнения.— 1979.— **15**, № 8.— С. 1434—1443.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование линейных систем дифференциальных уравнений с помощью квадратичных форм.— Киев, 1982.— 44 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 82.10).
3. *Кулик В. Л.* Квадратичные формы и дихотомия решений систем линейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 1.— С. 43—49.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Применение квадратичных форм к исследованию систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.— 1985.— **21**, № 5.— С. 776—787.
5. *Митропольский Ю. А., Кулик В. Л.* Функция Ляпунова и ограниченные решения линейных систем дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 1.— С. 39—49.
6. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— **34**, № 6.— С. 1219—1240.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 28.02.86

УДК 517.9

А. К. Лопатин

Обоснование алгоритма асимптотической декомпозиции для конечного числа приближений

Основная идея метода асимптотической декомпозиции [1, 2] состоит в сопоставлении исходной возмущенной системе

$$dx'/dt = \omega(x') + \varepsilon\tilde{\omega}(x') \tag{1}$$

централизованной системы

$$dx_j/dt = \omega_j(x) + \varepsilon N(x)\, x_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{2}$$

получаемой из исходной с помощью замены переменных в виде рядов Ли

$$x_j = \exp(\varepsilon S)\, x_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Здесь

$$S = S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon^2 S_3 + \dots . \tag{4}$$

В формулах (1), (2) $x = \operatorname{colon}\|x_1, \dots, x_n\|$, $\omega = \operatorname{colon}\|\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)\|$, $\tilde{\omega} = \operatorname{colon}\|\tilde{\omega}_1(x), \dots, \tilde{\omega}_n(x)\|$, $\omega_i(x), \tilde{\omega}_i(x) \in \mathfrak{O}(G)$, $i = \overline{1, n}$, $G_{0\varepsilon} = \mathfrak{J} \times \mathfrak{J}_\varepsilon \times G \in R^{n+2}$, $\varepsilon \in \mathfrak{J}_\varepsilon = [0, 1]$, $t \in \mathfrak{J}$, — область существования и единственности решения задачи Коши системы (1), $\mathfrak{O}(G)$ — многообразие аналитических функций, определенное на G,

$$N(x) = N_1(x) + \varepsilon N_2(x) + \dots, \ [U, N_\nu] \equiv 0, \quad \nu = 1, 2, \dots . \tag{5}$$

В настоящей работе рассматривается вопрос обоснования алгоритма асимптотической декомпозиции. Сопоставим возмущенной системе (1) укороченную централизованную систему

$$dx_j^{(m)}/dt = \omega_j(x^{(m)}) + \varepsilon N^{(m)}(x^{(m)})\, x_j^{(m)} + \varepsilon^{m+1}\Phi_j^{(m+1)}(x^{(m)}, \varepsilon), \quad j = \overline{1, n}, \tag{6}$$

где $N^{(m)}(x^{(m)}) = N_1(x^{(m)}) + \dots + \varepsilon^{m-1} N_m(x^{(m)})$, $x^{(m)} = \operatorname{colon}\|x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}\|$, $\Phi_j^{(m+1)}(x^{(m)}, \varepsilon)$ — известные аналитические функции.

Укороченная централизованная система (6) до членов порядка ε^m совпадает с централизованной системой (2). Для получения системы (6) вместо замены переменных (3) вводим укороченное преобразование

$$x_j' = \exp(\varepsilon S^{(m)}(x^{(m)}))\, x_j^{(m)}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{7}$$

где

$$S^{(m)} = S_1 + \varepsilon S_2 + \dots + \varepsilon^{m-1} S_m. \tag{8}$$