Полученное описание (теорема 2) возможных значений частных индексов при больших n труднообозримо. Приведем такое описание лишь при $n = 3$.

Теорема 3. *Частные индексы верхнетреугольной матрицы-функции 3-го порядка с индексами диагональных элементов* k_1, k_2, k_3 *равны* $k_1 + \gamma_1$, $k_2 - \gamma_1 + \gamma_2$, $k_3 - \gamma_2$, *где для целых неотрицательных чисел* γ_1, γ_2 *возможны следующие значения*: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ *при* $k_1 \geqslant k_2 \geqslant k_3$; $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 < k_3 - k_2$ *при* $k_1 \geqslant k_3 > k_2$; $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 < k_2 - k_1$ *при* $k_2 > k_1 \geqslant k_3$; $\gamma_1 < k_2 - k_1$, $\gamma_1 - \gamma_2 \geqslant k_2 - k_3$ *либо* $\gamma_2 \leqslant \gamma_1 < k_3 - k_1$ *при* $k_2 \geqslant k_3 > k_1$; $\gamma_2 < k_3 - k_2$, $\gamma_2 - \gamma_1 \geqslant k_1 - k_2$ *либо* $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 < k_3 - k_1$ *при* $k_3 > k_1 \geqslant k_2$; $\gamma_1 \leqslant \frac{1}{3}(k_3 + k_2 - 2k_1)$, $\gamma_2 \leqslant k_3 - k_1 - \frac{1}{3}(k_3 + k_2 - 2k_1)$ *при* $k_3 > k_2 > k_1$.

Таким образом, при $n = 3$ и неубывающей последовательности индексов диагональных элементов набор частных индексов подчиняется лишь условиям $\sum_{j=1}^{n} \varkappa_j = \sum_{j=1}^{n} k_j$, $\min_{1 \leqslant j \leqslant n} \varkappa_j \geqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant n} k_j$, $\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \varkappa_j \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} k_j$. Эти условия, как известно [1], необходимы при любом n. Однако уже при $n = 4$ они перестают быть достаточными. Например, при $k_1 = 0$, $k_2 = 3$, $k_3 = 4$, $k_4 = 7$ невозможен набор частных индексов $\{6, 6, 1, 1\}$.

1. *Литвинчук Г. С., Спитковский И. М.* Факторизация матриц-функций. Ч. 1 и 2.— Одесса, 1984.— 460 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 2410-84 Деп.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М. : Наука, 1968.— 756 с.
3. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений.— М. : Наука, 1970.— 379 с.
4. *Хведелидзе Б. В.* Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики / ВИНИТИ.— 1975.— **7**.— С. 5—162.
5. *Чеботарев Г. И.* Частные индексы краевой задачи Римана с треугольной матрицей второго порядка // Успехи мат. наук.— 1956.— **11**, вып. 3.— С. 192—202.

Одесса Получено 27.09.85

УДК 517.982

Е. В. Токарев

Инъективные банаховы пространства в классах финитной эквивалентности

Обозначим через $\mathscr{B}$ класс всех бесконечномерных банаховых пространств и рассмотрим класс $\mathscr{K} \subset \mathscr{B}$.

$X \in \mathscr{B}$ назовем *$\mathscr{K}$-инъективным*, если для любого $Y \in \mathscr{K}$, содержащего подпространство, изометричное X (символически: $X \subset_{\to} Y$), найдется проектор единичной нормы из Y на X.

Класс всех $\mathscr{K}$-инъективных банаховых пространств обозначим через $\mathfrak{P}_1(\mathscr{K})$. Класс $\mathfrak{P}_1(\mathscr{B})$, обозначаемый обычно $\mathfrak{P}_1$, интенсивно изучался в связи с вопросами расширения операторов: легко видеть, что $X \in \mathfrak{P}_1$, если и только если любой оператор T, отображающий X в произвольное $Y \in \mathscr{B}$, можно без увеличения нормы продолжить до оператора из Z ($X \subset_{\to} Z$) в Y. Обзор результатов исследования $\mathscr{B}$-инъективных банаховых пространств и связанных с ними вопросов содержится в работе Линденштраусса [1].

Настоящая работа обобщает исследования [1] на случай $\mathscr{K}$-инъективных банаховых пространств, где $\mathscr{K}$ — некоторый *класс финитной эквивалентности*. Приведем точное определение этого понятия.

Следуя [2], скажем, что $X \in \mathscr{B}$ *финитно представимо* в $Y \in \mathscr{B}$ (запись: $X \leqslant_f Y$), если для любого конечномерного подпространства $X_n \subset_{\to} X$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется оператор $T = T(X_n, \varepsilon)$ изоморфного вложения X_n в Y такой, что $\| T \| \| T^{-1} \| \leqslant 1 + \varepsilon$.

X и Y назовем *финитно эквивалентными*, если $X \leqslant_f Y$ и $Y \leqslant_f X$ (обозначение: $X \sim_f Y$).

Каждое $X \in \mathscr{B}$ порождает целый класс финитно ему эквивалентных банаховых пространств — *f-степень*

$$X^f = \{Y \in \mathscr{B} : Y \sim_f X\}.$$

Всякая f-степень X^f замкнута относительно операции строгого индуктивного предела (если $(Y_n)_{n=1}^{\infty} \subset X^f$; $Y_1 \subset\!\!\to Y_2 \subset\!\!\to, \ldots$, то $\overline{\bigcup Y_n} \in X^f$; черта сверху означает пополнение) и содержит пространства сколь угодно большой размерности (под размерностью $\dim X$ банахова пространства X понимается наименьшая мощность порождающего X подмножества Γ_X, т. е. такого, что замыкание его линейной оболочки, обозначаемое $\operatorname{span} \Gamma_X$, совпадает с X).

В качестве примера отметим, что f-степень $(l_2)^f$ состоит из пространств (произвольной размерности $\varkappa \geqslant \omega$), изометричных гильбертову, а f-степень $(l_\infty)^f$ содержит все пространства непрерывных функций $C(S)$, некоторые рефлексивные пространства, например $(\Sigma \otimes c_0^{(n)})_{l_2}$ или пространство Цирельсона Ts, и некоторые квазирефлексивные пространства — например пространство Джеймса J, и др.

1. Экзистенциально замкнутые банаховы пространства. Перед изучением X^f-инъективных банаховых пространств рассмотрим более широкий класс X^f-экзистенциально замкнутых пространств (термин заимствован из теории моделей).

Пусть $X, Y \in \mathscr{B}$ и $Y \subset\!\!\to X$. Назовем Y *отражающим подпространством* X (запись: $Y \prec_u X$), а X — *и-расширением* Y, если для любого конечномерного подпространства $X_n \subset\!\!\to X$ и каждого $\varepsilon > 0$ найдется оператор $T = T(X_n, \varepsilon)$ изоморфного вложения X_n в Y такой, что $\| T \| \| T^{-1} \| \leqslant 1 + \varepsilon$, а $T|_{X_n \cap Y} = \mathrm{Id}_{X_n \cap Y}$ (через Id_Z обозначен тождественный на Z оператор, а $T|_Z$ — сужение оператора T на Z). Разумеется, $Y \prec_u X$ влечет $Y \sim_f X$.

Назовем пространство $Y \in X^f$ *экзистенциально замкнутым* в классе X^f, если для любого $Z \in X^f$ и любого изометрического вложения $j : Y \subset\!\!\to Z$ образ jY является отражающим подпространством Z.

Класс всех экзистенциально замкнутых в X^f банаховых пространств обозначим через $\mathscr{E}(X^f)$.

Докажем следующую теорему, гарантирующую не только непустоту класса $\mathscr{E}(X^f)$ для любого $X \in \mathscr{B}$, но и его кофинальность в X^f.

Теорема 1. *Для каждого $X \in \mathscr{B}$ класс $\mathscr{E}(X^f)$ непуст; более того, любое $Y \in X^f$ можно изометрически вложить в некоторое $Z \in \mathscr{E}(X^f)$ той же размерности, что и Y: $\dim Z = \dim Y$.*

Доказательство этой теоремы воспроизводит в модифицированном виде схему Яушары [3]. Пусть $Y \in X^f$; $\varepsilon \geqslant 0$. Тройку (φ, A_n, C_m) назовем *ε-триплетом* над Y в классе X^f, если $A_n \subset\!\!\to Y$; $\dim A_n = n$; $C_m \leqslant_f X$; $\dim C_m = m$; φ — изоморфное вложение A_n в C_m и $\| \varphi \| \| \varphi^{-1} \| < 1 + \varepsilon$.

Скажем, что ε-триплет (φ, A_n, C_m) над Y ε-реализуется с помощью $B \in X^f$, если существует такое изоморфное вложение $\psi : C_m \subset\!\!\to B$, что $\| \psi \| \| \psi^{-1} \| < 1 + \varepsilon$ и $\psi\varphi x = x \ \forall\, x \in A_n$, причем $Y \subset\!\!\to \mathscr{B}$.

Выберем во множестве $\mathscr{P}_f(Y)$ всех различных конечномерных подпространств Y (изометричные пространства отождествляются) счетное, плотное в смысле дистанции Банаха—Мазура подмножество $(B_\delta)_{\delta<\omega}$, и числовую последовательность $\varepsilon_j \downarrow 0$.

Занумеруем все те ε_j-триплеты ($j = 1, 2, \ldots$) над Y (вида $(\varphi; A; C)$), в которых A и C выбираются из множества $(B_\delta)_{\delta<\omega}$ в последовательность $(\varphi_\gamma^j; A_\gamma^j; C_\gamma^j)_{\gamma<\omega}$ (верхний индекс j не относится к нумерации, а только отмечает, что $(\varphi_\gamma^j; A_\gamma^j; C_\gamma^j)$ является ε_j-триплетом), и по индукции определим возрастающую последовательность банаховых пространств.

Положим $Y_0 = Y$ и предположим, что Y_{n-1} уже определено. Рассмотрим ε_{j_n}-триплет $(\varphi_n^{j_n}; A_n^{j_n}; C_n^{j_n})$ над Y_{n-1}. Если он не ε_{j_n}-реализуется с помощью пространств из класса X^f, положим $Y_n = Y_{n-1}$; если же он ε_{j_n}-реализуется с помощью некоторого $Z \in X^f$, положим $Y_n = Z$.

Далее определим $Y^{(1)} = \overline{\bigcup Y_n}$; $Y^{(n+1)} = (Y^{(n)})^{(1)}$ и, наконец, $Y_\infty = \bigcup Y^{(n)}$. Очевидно, что $Y \subset_\to Y_\infty$ и, тем более, $Y \subset_\to \overline{Y}_\infty$.

Очевидно также, что $\dim Y = \dim \overline{Y}_\infty$. Для доказательства теоремы осталось установить, что $\overline{Y}_\infty \in \mathfrak{E}(X^f)$.

Пусть $Z \in X^f$; $\overline{Y}_\infty \subset_\to Z$. Выберем из набора пространств $(B_\delta)_{\delta<\omega}$ два конечномерных подпространства $X_n \subset_\to Y_\infty$ и $Z_m \subset_\to Z$. Пусть $\varphi: X_n \subset_\to Y_\infty$ — тождественное отображение. Обозначим $C = \operatorname{span}(X_n \cup Z_m)$. Можно считать, что $C \in (B_\delta)_{\delta<\omega}$.

Тогда для каждого $j = 1, 2, \ldots$ (φ, X_n, C) является ε_j-триплетом над $\overline{Y}_\infty$, который ε_j-реализуется с помощью Z. Поскольку X_n конечномерно, $X_n \subset_\to Y^{(q)}$ для некоторого $q < \infty$, так что можно считать (φ, X_n, C) ε_j-триплетом над $Y^{(q)}$. Поэтому тройка (φ, X_n, C) встречается в виде $(\varphi_\delta^j, A_\delta^j, C_\delta^j)$ в последовательности всех выбранных триплетов над $Y^{(q)}$. На δ-м шаге построения $Y^{(q+1)}$ тройка (φ, X_n, C) считалась триплетом над $(Y^{(q)})_\delta$. При этом, поскольку триплет (φ, X_n, C) ε_j-реализуется (с помощью пространства Z) то $(Y^{(q)})_\delta$ ε_j-реализует этот триплет, т. е. найдется вложение $\psi: C \subset_\to \subset_\to (Y^{(q)})_\delta$ такое, что $\psi\varphi x = x$ $\forall x \in X_n$ и $\|\psi\| \|\psi^{-1}\| < 1 + \varepsilon_j$. Таким образом, ψ ε_j-вкладывает C в Y_∞, оставляя неподвижными все элементы X_n, а поскольку $(B_\delta)_{\delta<\omega}$ плотно в $\mathscr{P}_f(Y)$, а j произвольно, $Y_\infty \in \mathfrak{E}(X^f)$. Тем самым $\overline{Y}_\infty \in \mathfrak{E}(X^f)$.

Следующая теорема устанавливает связь между X^f-инъективными и X^f-экзистенциально замкнутыми пространствами.

Теорема 2. *Если $Y \in \mathfrak{E}(X^f)$, то $Y^{**} \in \mathfrak{P}_1(X^f)$.*

Доказательство. Согласно результату Штерна [4], если $Y \prec_u Z$, то существует проектор P единичной нормы из Z^{**} на Y^{**}. Пусть $W \in X^f$ и $Y^{**} \subset_\to W$. Рассмотрим канонические вложения $Y \subset_\to Y^{**}$ и $W \subset_\to W^{**}$. Тогда цепочку вложений можно записать в виде $Y \subset_\to Y^{**} \subset_\to W \subset_\to W^{**}$. Пусть Q—проектор из W^{**} на Y^{**}; $\|Q\| = 1$. Его сужение $Q|_W$ на W проектирует W на Y^{**} и имеет норму, равную единице.

Замечание. Из результатов [4] следует также, что если X^f-инъективное пространство Y лежит в классе X^f, то оно является также и X^f-экзистенциально замкнутым. Обратное неверно: для каждого $q > 2$ и $2 < r < q$ пространство l_q является инъективным, но не экзистенциально замкнутым в классе $(l_q \oplus_q l_r)^f$.

2. Расширение операторов. Аналогично упомянутому выше свойству класса $\mathfrak{P}_1$ класс $\mathfrak{P}_1(X^f)$ для каждого $X \in \mathscr{B}$ также обладает некоторым свойством расширения операторов.

Теорема 3. *Пусть $X \in \mathscr{B}$; $Y \in X^f$. Эквивалентны следующие утверждения:* 1) $Y \in \mathfrak{P}_1(X^f)$; 2) *для любого $Z \in X^f$ такого, что $Y \subset_\to Z$, и для любого $W \in \mathscr{B}$ каждый оператор $T: Y \to W$ можно продолжить до оператора $\hat{T}: Z \to W$ без увеличения нормы.*

Доказательство. Пусть P — проектор из Z на Y; $\|P\| = 1$. 1) $\Rightarrow$ 2). Положим $\hat{T} = TP$. 2) $\Rightarrow$ 1). Положим $Z = Y$; $T = \mathrm{Id}_Z$.

Оказывается, всякое $Y \in \mathfrak{E}(X^f)$ тоже обладает некоторыми свойствами продолжения операторов.

Теорема 4. *Пусть $X \in \mathscr{B}$. Всякое $Z \in \mathfrak{E}(X^f)$ обладает свойством продолжения тождественного оператора (ПТО): для любого $W \in X^f$, $Z \subset_\to W$,* *тождественный оператор* Id_Z *можно без увеличения нормы продолжить до оператора* $T: W \to Z^{**}$.

Доказательство воспроизводит схему Линденштраусса [1]. Определим на множестве пар (B, ε), где B пробегает все конечномерные подпространства W, а $0 < \varepsilon \leqslant 1$, частичный порядок, считая, что (B_2, ε_2) предшествует (B_1, ε_1), если $B_2 \subset_{\to} B_1$, а $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Поскольку Z — отражающее подпространство W, для каждой пары (B, ε) найдется оператор $T_{B, \varepsilon} \quad : B \subset_{\to} \subset_{\to} Z$ такой, что $\| T \| \, \| T^{-1} \| < 1 + \varepsilon$, а $T|_{B \cap Z} = \mathrm{Id}_{B \cap Z}$.

Рассмотрим в пространстве Z^{**} сферу $S^{**}(r)$ радиуса r с центром в начале координат. Она $\sigma(Z^{**}, Z^{*})$-компактна, а значит, по теореме Тихонова, компактно и произведение $\Pi = \prod\limits_{w \in W} S^{**}(2\|w\|)$ в обычной топологии произведения.

Для $t \in \Pi$ обозначим его w-ю координату ($w \in W$) через $t(w)$ и всякому оператору $T_{(B, \varepsilon)}$, рассматриваемому как оператор $T: B \to Z^{**}$, поставим в соответствие точку $t_{(B, \varepsilon)} \in \Pi$, положив $t_{(B, \varepsilon)}(w) = \begin{cases} T_{(B, \varepsilon)}\, w, & \text{если } w \in B; \\ 0, & \text{если } w \notin B. \end{cases}$

Пусть t — предельная точка сети $t_{(B, \varepsilon)}$; t имеет следующие свойства:

а) $tz = z$, $z \in Z$;

б) $t(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha t w_1 + \beta t w_2$, $w_1, w_2 \in W$; α, β — скаляры;

в) $\| tw \| \leqslant \| w \|$, $w \in W$.

Свойство а) следует из того, что $t_{(B, \varepsilon)} z = z$, если (B, ε) следует за $(\mathrm{span}\, z, 1)$; остальные доказываются аналогично. Оператор T из W в Z^{**}, определенный правилом $Tw = t(w)$, имеет требуемые свойства.

Если $Z \in \mathcal{B}$ обладает свойством ПТО из формулировки теоремы 4, то оно имеет и другие свойства продолжения операторов. Следующая теорема и ее доказательство аналогичны результатам [1].

Теорема 5. *Пусть* $Z \in \mathcal{B}$; $Y \in Z^{f}$; $Z \subset_{\to} Y$; $W \in \mathcal{B}$. *Если* Z *обладает свойством ПТО, то*

1) Z^{**} *ортогонально дополняемо в некотором* $H \in \mathfrak{P}_1(Z^{f})$;

2) *всякий оператор* $T: Z \to W^{*}$ *продолжается до оператора* $\hat{T}: Y \to W^{*}$ *без увеличения нормы;*

3) *всякий компактный оператор* $T: Z \to W$ *продолжается до компактного оператора* $\hat{T}: Y \to W$ *без увеличения нормы;*

4) *всякий слабо компактный оператор* $T: Z \to W$ *продолжается до слабо компактного оператора* $\hat{T}: Z \to W$ *без увеличения нормы.*

Доказательство. 1). По теореме 1 найдется $H \in \mathfrak{P}_1(Z^{f})$ такое, что $Z \subset_{\to} Z^{**} \subset_{\to} H$. По условию теоремы (свойство ПТО) найдется оператор $\tilde{T}: H \to H$, $\tilde{T} H \subset Z^{**}$, $\tilde{T}|_Z = \mathrm{Id}_Z$, $\|\tilde{T}\| = 1$. Тогда $\tilde{T}^{**} H^{**} \subset Z^{**\perp\perp}$ и $\tilde{T}^{**}|_{Z^{\perp\perp}}$ тождественный. Пусть $Q: Z^{***} \to Z^{*}$ — естественный проектор; $\|Q\| = 1$. Тогда $Q_{-1}(0) = Z^{\perp}$ и Q^{*} есть проектор из Z^{****} на $Z^{\perp\perp}$. Поскольку Z^{****} и $Z^{**\perp\perp}$ изометричны, то найдется проектор P, $\|P\| = 1$, из $Z^{**\perp\perp}$ на $Z^{\perp\perp}$; $P\tilde{T}^{**}$ проектирует H^{**} на $Z^{\perp\perp}$.

2). Пусть T — оператор из Z в W^{*}. По условию ПТО найдется оператор T_0 нормы $\|T_0\| = 1$ из Y в Z^{**}, сужение которого на Z является на Z тождественным. Имеется также проектор Q единичной нормы из W^{***} на W^{*}. Поэтому $\tilde{T} = QT^{**}T_0$ есть расширение T до оператора из Y в W.

Утверждения 3 и 4 доказываются аналогично утверждению 2; при этом не требуется наличия проектора из W^{**} на W, поскольку T^{**} отображает в этих случаях пространство Z^{**} на канонический образ пространства Z в W^{**}.

Замечания. 1. В некоторых случаях (например, если $Z \in (l_\infty)^{f}$ или $Z \in (l_1)^{f}$) из утверждения 1 теоремы 5 следует, что $Z^{**} \in \mathfrak{P}_1(Z^{f})$. Автору неизвестно, будет ли верна эта импликация в случае произвольного пространства Z.

2. Класс пространств $Z \in \mathcal{B}$, обладающих свойствами ПТО и другими, вытекающими из него, вообще говоря, шире класса $\mathcal{E}(Z^{f})$.

3. Свойства аппроксимации. Следуя [5], будем говорить, что $X \in \mathcal{B}$ обладает равномерным аппроксимационным свойством (РАС) (соответственно равномерным проекционным свойством (РПС)), если существуют такие $\lambda < \infty$ и функция $f: \omega \to \omega$, что для всякого конечномерного подпространства $X_n \subset_\to X$, $\dim X_n = n$, найдется такой оператор (соответственно проектор) $T: X \to X$, что размерность его образа $\dim TX \leqslant f(n)$; $\| T \| \leqslant \lambda$, а $T|_{X_n} = \mathrm{Id}_{X_n}$.

$X \in \mathcal{B}$ обладает равномерным аппроксимационным свойством Гротендика (РАСГ), если для каждого $\varepsilon > 0$ и каждой последовательности $\beta = (\beta_n)$ с $\beta_n \to 0$ найдутся $\lambda = \lambda(\beta, \varepsilon)$ и $m = m(\beta, \varepsilon)$ такие, что для любой последовательности $(x_n) \subset X$ с $\| x_n \| \leqslant \beta_n$ найдется оператор $T: X \to X$ такой, что $\| Tx_n - x_n \| \leqslant \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$; $\| T \| \leqslant \lambda$; $\dim TX \leqslant m$.

$X \in \mathcal{B}$ обладает локально безусловной структурой (ЛБС) [6], если X^{**} изоморфно дополняемому подпространству банаховой решетки, финитно эквивалентной X.

Следующий результат является прямым следствием определений, теоремы 1 и теорем 9.1 и 9.3 из [5], в связи с чем его доказательство опускается.

Теорема 6. *Пусть $X \in \mathcal{B}$, $Z \in \mathfrak{E}(X^f)$. Z обладает свойством РАС (соответственно РПС, РАСГ), если и только если в классе X^f хоть одно пространство обладает РАС (соответственно РПС, РАСГ). Z обладает ЛБС, если и только если в классе X^f есть хоть одна банахова решетка.*

Рассмотрим класс $\Pi \subset \mathcal{B}$, образованный теми банаховыми пространствами X, которые обладают следующим свойством:

(П) существует функция $f: \omega \to \omega$; $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = \infty$, такая, что для любого оператора $T: X \to X$ с $\dim TX = n < \infty$ его норма $\| T \| \geqslant f(n)$.

Непустоту класса Π установил Пизье [7].

Теорема 7. *Если $X \in \Pi$, то в классе X^f нет ни одного пространства, которое обладало бы свойством РАСГ (и, тем более, РАС или РПС).*

Доказательство. Заметим, что свойство (П) банахова пространства X наследуется всеми его ультрастепенями $(X)_\mathfrak{U}$ и их дополняемыми подпространствами; в том числе и пространством X^{**}.

Пусть $X \in \Pi$; $Z \in \mathfrak{E}(X^f)$. Если существует $Y \in X^f$, обладающее РАСГ, то по теореме 6 Z тоже обладает РАСГ, а согласно теореме 9.3 из [5] то же верно и для Z^{**}. Но Z^{**}, будучи X^f-инъективным, изометрично ортогонально дополняемому подпространству некоторой ультрастепени $(X)_\mathfrak{U}$ и, значит, обладает (П).

Но свойства (П) и РАСГ не могут выполняться одновременно.

4. $\mathfrak{P}_\lambda(X^f)$-пространства. Усиливая определение X^f-инъективных пространств, отнесем банахово пространство Y к классу $\mathfrak{P}_\lambda(X^f)$ (λ — некоторое положительное число, большее единицы), если для любого $Z \in X^f$ и вложения $j: Y \subset_\to Z$ найдется проектор P из Z на Y нормы $\| P \| \leqslant \lambda$.

Пусть $X, Y, Z \in \mathcal{B}$; $X \subset_\to Z$; $Y \subset_\to Z$. Следуя [8], определим сферический раствор $\Omega(X, Y)$ между X и Y:

$$\Omega(X, Y) = \max\left(\sup_{x \in S(X)} \operatorname{dist}(x, S(Y)); \sup_{y \in S(Y)} \operatorname{dist}(y, S(X))\right),$$

где $S(X)$ и $S(Y)$ — единичные сферы пространств X и Y, а $\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \| x - y \|$.

М. И. Островский [8] установил, что если $X \in \mathfrak{P}_\lambda(\mathcal{B})$ и $\Omega(X, Y) < 1/\lambda$, то X изоморфно Y. Следующая теорема усиливает этот результат; ее доказательство дословно повторяет рассуждения [8] и поэтому опускается.

Теорема 8. *Если $X \subset_\to Z$; $Y \subset_\to Z$ и $X \in \mathfrak{P}_\lambda(Z^f)$, то из условия $\Omega(X, Y) < 1/\lambda$ вытекает, что X изоморфно Y, а дистанция Банаха — Мазура между X и Y оценивается неравенством $d(X, Y) \leqslant (1 + \lambda\Omega(X, Y))/(1 - \lambda\Omega(X, Y))$.*

1. *Lindenstrauss J.* Extention of compact operators // Mem. Amer. Math. Soc.— 1964.— N 48.— P. 1—112.
2. *Кадец М. И.* Геометрия нормированных пространств.— Итоги науки и техники. Математический анализ.— М. : ВИНИТИ, 1975, т. 13, с. 85—123.
3. *Yaushara M.* The amalgamation property, the universal homoheneous models and the generic models // Math. scand.— 1974.— N 34.— P. 5—36.
4. *Stern J.* Ultrapowers and local properties of Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1978.— **240**.— P. 231—252.
5. *Heinrich S.* Ultraproducts in Banach spaces theory // J. reine und angew. Math.— 1980.— **313**.— P. 72—104.
6. *Dubinski E., Pełczyński A., Rosenthal H. P.* On Banach spaces X for which Π_2 $(\mathscr{L}_\infty, X) = B(\mathscr{L}_\infty, X)$ // Stud. math.— 1972.— **44**.— P. 617—648.
7. *Pisier J.* Countre — example a une conjecture de Grothendieck // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. I.— 1981.— **293**, N 18.— P. 681—683.
8. *Островский М. И.* Свойства Банаха-Сакса, инъективность и растворы подпространств банахова пространства // Теория функций, функц. анализ и их прил.— 1985.— Вып. 44.— С. 69—78.

ВНИИкондиционер, Харьков

Получено 23.09.85

УДК 519.41/47

Н. С. Черников, А. П. Петравчук

Характеризация периодических локально разрешимых групп с разрешимыми и с конечноэкспонентными силовскими π-подгруппами

В настоящей работе исследуются свойства периодических локально разрешимых групп в зависимости от свойств их силовских (т. е. максимальных) π-подгрупп (π — некоторое множество простых чисел). В ней установлено, в частности, что для такой группы разрешимость всех силовских π-подгрупп равносильна наличию конечного ряда характеристических подгрупп с π'-факторами и абелевыми π-факторами (см. теорему 1). Напомним: π-группой называется периодическая группа, все простые делители порядков элементов которой принадлежат π (при $\pi = \varnothing$ 1 — единственная π-группа); через π' обозначается множество всех простых чисел, не входящих в π. Отметим, что ввиду известной теоремы Фейта — Томпсона о разрешимости конечных групп нечетного порядка класс периодических локально разрешимых групп включает в себя все локально конечные группы без элементов порядка 2.

Используем следующие обозначения: $C_G(N)$ — централизатор подгруппы N в группе G, $O_\pi(G)$ — максимальная инвариантная π-подгруппа группы G, $O^\pi(G)$ — пересечение всех инвариантных подгрупп периодической группы G, фактор-группы по которым являются π-группами ($G/O^\pi(G)$ всегда π-группа), p — простое число (иногда выступающее как одноэлементное множество), $O_{p',p}(G)$ определяется из соотношения $O_p(G/O_{p'}(G)) = O_{p',p}(G)/O_{p'}(G)$, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядков элементов группы G, $|G|$ — порядок конечной группы G, $d(G)$ — ступень разрешимости разрешимой группы G. Если в группе G все π-подгруппы разрешимы и их ступени разрешимости ограничены в совокупности, то $d_\pi(G)$ — максимум этих ступеней. Далее $a(G)$ — экспонента периодической группы G. Если в группе G все π-подгруппы имеют конечные экспоненты, ограниченные в совокупности, то $a_\pi(G)$ — наименьшее общее кратное этих экспонент. Наконец, $l_\pi(G)$ — π-длина группы G (см. определение 2).

Следуя [1], введем определение.

Определение 1. *Возрастающим $\pi'\pi$-рядом группы G будем называть следующий ряд ее характеристических подгрупп:*