в) *функция* $f(x)$ *монотонна при* $|x| \leqslant r$, $|f(x)| \geqslant f_0 |x|$ *и*

$$\limsup_{t \to \infty} \int_t^{\tau(t)} \frac{b(s)\tau'(s)}{a(s)} ds > 1/f_0,$$

то неравенство (6) *не имеет положительных монотонно убывающих решений.*

Лемма 5. *Если выполняется одно из условий:*

а) $\int_{\mathbb{R}_+} b(t)\,dt = \infty$, *функция* $f(x)$ *монотонна при* $|x| \geqslant L$ *и* $\int_{|x|\geqslant L} \frac{dx}{|f(x)|} < \infty$;

б) $\int_A c(t)\,dt = \infty$, *функция* $g(x)$ *монотонна при* $|x| \geqslant L$ *и* $\int_{|x|\geqslant L} \frac{dx}{|g(x)|} < \infty$;

в) $|g(x)| \geqslant g_0 |x|$ *при* $|x| \geqslant L$ *и* $\limsup_{t\to\infty} \int_t^{\tau(t)} c(s)\,ds > 1/g_0$,

то неравенство (6) *не имеет положительных монотонно возрастающих решений.*

Доказательство лемм 4 и 5 аналогично доказательству лемм 2 и 3.

Теорема 4. *Предположим, что справедливо соотношение* (3), $a(t) < 0$, $\tau'(t) \geqslant 0$ *и выполняется по одному из условий лемм* 4 *и* 5.

Тогда все решения уравнения (1) *осциллируют.*

Доказательство теоремы следует из лемм 4, 5.

1. *Романенко Е. Ю., Шарковский А. Н.* Дифференциально-функциональные уравнения, близкие к функциональным // Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — Киев : Наук. думка, 1979.— С. 179—209.
2. *Zahariev A. I., Bainov D. D.* Oscillating properties of the solutions of a clacs of neutral type functional-differential equations // Bull. Austral. Math. Soc.— 1980.— **22**, N 3.— P. 365—372.
3. *Grammatikopoulos M. K., Grove E. A., Ladas G.* Oscillations of first order neutral delay differential equations // J. Math. Anal. and Appl.— 1986.— **120**, N 2.— P. 510—520.
4. *Иванов А. Ф.* Об осцилляции решений дифференциально-разностных уравнений первого порядка нейтрального типа.— Киев, 1983.— 17 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.16).
5. *Kitamura Y., Kusano T.* Oscillation of first—order nonlinear differential equations with deviating arguments // Proc. Amer. Math. Soc.— 1980.— **78**.— P. 64—68.
6. *Иванов А. Ф., Шевело В. Н.* Об осцилляции и асимптотическом поведении решений дифференциально-функциональных уравнений первого порядка // Укр. мат. журн.— 1981. — **33**, № 6.— С. 745—751.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Хиросим. ун-т, Япония

Получено 22.07.86

УДК 517.538.5

В. В. Ковтунец

Дифференциальные свойства оператора наилучшего приближения комплекснозначных функций. II

В работе [1] исследованы дифференциальные свойства оператора наилучшего равномерного приближения комплекснозначных непрерывных на метрическом компакте $\mathfrak{M}$ функций полиномами по чебышевской системе функций $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ в случае, когда всякое характеристическое множество приближаемой функции состоит из $2n+3$ точек, т. е. имеет максимальную длину. Напомним обозначения: $C(\mathfrak{M})$ — пространство комплекснозначных непрерывных на метрическом компакте $\mathfrak{M}$ функций, M — его подпространство с базисом $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, образующим чебышевскую систему, P: $C(\mathfrak{M}) \to M$ — оператор наилучшего равномерного приближения обобщенными полиномами из M, $E(f) = \|f - P(f)\|_{C(\mathfrak{M})}$ — величина наилучшего приближения функции $f \in C(\mathfrak{M})$. Обозначим через $\hat{\varphi}(z)$ вектор-функцию $\hat{\varphi}(z) = (\varphi_0(z), \ldots, \varphi_n(z))$ со значениями в C^{n+1}. В ряде случаев будем рассматривать $\hat{\varphi}$ как функцию со значениями в действительном пространстве R^{2n+2}. По поводу основных фактов из теории наилучших приближений комплекснозначных функций см. [1, 2].

Здесь мы будем изучать дифференциальные свойства оператора P в случае конечных $\mathfrak{M}$ в точках $f \in C(\mathfrak{M}) \setminus M$ таких, что хотя бы одно характеристическое множество функции f состоит менее чем из $2n+3$ точек.

Пусть $f(t, z)$, $t \in [0, 1]$, $z \in \mathfrak{M}$, — однопараметрическое семейство функций из $C(\mathfrak{M}) \setminus M$, непрерывно дифференцируемое по параметру t (гладкая кривая в $C(\mathfrak{M}) \setminus M$). Обозначим через $P(t, z) = P(f(t, \cdot); z)$ полином наилучшего приближения функции $f(t, z)$, $E(t) = \|f(t, \cdot) - P(t, \cdot)\|_{C(\mathfrak{M})}$ — величина этого приближения, $\Psi(t, z) = (f(t, z) - P(t, z))/E(t)$.

Пусть зафиксирована некоторая точка $t_0 \in [0, 1]$ такая, что одно из характеристических множеств функции $f(t_0, z)$ содержит менее чем $2n+3$ точек. Рассмотрим последовательность $(t_k)_{k=1}^{\infty}$, $t_k \to t_0 + 0$, $k \to \infty$ (или $t_k \to t_0 - 0$, $t_k \to t_0$). Обозначим через $E_k = \{\xi_{k1}, \ldots, \xi_{km_k}\}$ некоторое характеристическое множество функции $f(t_k, z)$. Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1) длина m_k характеристического множества E_k постоянна при всех достаточно больших k, т. е. $m_k = m$;

2) существуют пределы $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_{kj} = \xi_j$, $j = 1, \ldots, m$. Пользуясь критерием В. К. Иванова — Е. Я. Ремеза [2, с. 56], нетрудно убедиться, что во множестве $E = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ содержится характеристическое множество функции $f(t_0, z)$ (но само E не обязательно является характеристическим).

Определение. *Будем говорить, что при $t \to t_0 + 0$ ($t \to t_0 - 0$, $t \to t_0$) длина характеристического множества функции $f(t, z)$ не уменьшается, если для любой последовательности $(t_k)_{k=1}^{\infty}$, $t_k \to t_0 + 0$ ($t_k \to t_0 - 0$, $t_k \to t_0$), удовлетворяющей приведенным выше условиям 1 и 2, предельное множество E является характеристическим для $f(t_0, z)$.*

Теорема 1. *Если при $t \to t_0 + 0$ длина характеристического множества функции $f(t, z)$ не уменьшается, то существует односторонняя производная*

$$\frac{\partial \Psi(t_0 + 0, z)}{\partial t} = R(t_0, z) = -\frac{\alpha}{E(t_0)} \Psi(t_0, z) + \frac{1}{E(t_0)} \left[\frac{\partial f(t_0, z)}{\partial t} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial P(t_0 + 0, z)}{\partial t} \right] = -\frac{\alpha}{E(t_0)} \Psi(t_0, z) + \frac{1}{E(t_0)} \left[\frac{\partial f(t_0, z)}{\partial t} - D(t_0, z) \right], \quad (1)$$

которая однозначно определяется из следующих условий:

1) $$\operatorname{Re} \overline{\Psi(t_0, \xi_j)}\, R(t_0, \xi_j) = 0 \quad (2)$$

во всех точках $\xi_1, \ldots, \xi_m$ характеристического множества функции $f(t_0, z)$, которое является характеристическим множеством функций $f(t_k, z)$ при некоторой последовательности $(t_k)_{k=1}^{\infty}$, $t_k \to t_0 + 0$;

2) *если $m < 2n + 3$, то кроме (2) выполняются равенства*

$$\sum\nolimits_{j=1}^{m} \delta_j \overline{R(t_0, \xi_j)}\, \hat{\varphi}(\xi_j) = \sum\nolimits_{j=1}^{m} c_j \overline{\Psi(t_0, \xi_j)}\, \hat{\varphi}(\xi_j), \quad \sum\nolimits_{j=1}^{m} c_j = 0, \quad (3)$$

где δ_j *взяты из условия В. К. Иванова — Е. Я. Ремеза* $\sum_{j=1}^{m}\delta_j\overline{\Psi(t_0,\xi_j)}\hat{\varphi}(\xi_j)=0$, *а* c_j, $j=1,\ldots,m$, *— некоторые действительные числа, подлежащие определению.*

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— конечное множество,* $f(t,z)$, $t\in[0,1]$, $z\in\mathfrak{M}$, *— непрерывно дифференцируемое по параметру* t *семейство функций из* $C(\mathfrak{M})\setminus M$. *Тогда для всякого* $t_0\in[0,1]$ *существует константа* $K=K(t_0)>0$ *такая, что* $\forall\, t\in[0,1]$ *выполняется неравенство*

$$\|\Psi(t,z)-\Psi(t_0,z)\|_{C(\mathfrak{M})}\leqslant K|t-t_0|. \tag{4}$$

Доказательство леммы. Заметим, что неравенство (4) следует из утверждения: существует константа $K_1=K_1(t_0)>0$ такая, что $\forall\, t\in[0,1]$ выполняется неравенство

$$\|\Psi(t,\cdot)-\Psi(t_0,\cdot)\|\leqslant K_1E(\Psi(t,\cdot)-\Psi(t_0,\cdot))=$$
$$=K_1\|\Psi(t,\cdot)-\Psi(t_0,\cdot)-P(\Psi(t,\cdot)-\Psi(t_0,\cdot);\cdot)\|. \tag{5}$$

В самом деле, используя дифференцируемость $f(t,z)$ по t и условие Липшица, для величины наилучшего приближения $E(f)$ получаем из (5)

$$\|\Psi(t,\cdot)-\Psi(t_0,\cdot)\|\leqslant K_1\left\|\frac{f(t,z)}{E(t)}-\frac{f(t_0,z)}{E(t_0)}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{K_1}{E(t)E(t_0)}[E(t_0)\|f(t,\cdot)-f(t_0,\cdot)\|+\|f(t_0,\cdot)\||E(t)-E(t_0)|]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{K_1}{E(t)E(t_0)}(E(t_0)+\|f(t_0,\cdot)\|)\|f(t,\cdot)-f(t_0,\cdot)\|\leqslant K|t-t_0|.$$

Таким образом, достаточно доказать неравенство (5). Предположим, что оно неверно. Тогда найдется такая последовательность $(t_k)_{k=1}^{\infty}$, $t_k\to t_0$, что выполняется соотношение

$$\Psi(t_k,z)=\Psi(t_0,z)+P(\Psi(t_k,\cdot)-\Psi(t_0,\cdot);z)+\alpha_k(z)=\Psi(t_0,z)+$$
$$+P_k(z)+\alpha_k(z), \tag{6}$$

где $P_k(z)=P(\Psi(t_k,\cdot)-\Psi(t_0,\cdot);z)$, $\|\alpha_k\|=o(\|\Psi(t_k,\cdot)-\Psi(t_0,\cdot)\|)$, $k\to\infty$. Не нарушая общности, можно считать последовательность $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ такой, что выполняются условия:

1) существует предел последовательности полиномов

$$\lim_{k\to\infty}\frac{P_k(z)}{\|\Psi(t_k,\cdot)-\Psi(t_0,\cdot)\|}=\lim_{k\to\infty}\frac{\Psi(t_k,z)-\Psi(t_0,z)}{\|\Psi(t_k,\cdot)-\Psi(t_0,\cdot)\|}=P_0(z)\in M;$$

2) при всяком k функция $f(t_k,z)$ имеет характеристическое множество $E_k=\{\xi_{k1},\ldots,\xi_{km}\}$ длины m, постоянной при всех $k=1,2,\ldots$; при этом для всех больших k выполняются равенства $\xi_{kj}=\xi_j$, $j=1,\ldots,m$. Понятно, что ξ_j — e-точки функции $\Psi(t_0,z)$;

3) существуют пределы последовательностей $(\delta_{kj})_{k=1}^{\infty}$ коэффициентов в условии В. К. Иванова — Е. Я. Ремеза $\sum_{j=1}^{m}\delta_{kj}\overline{\Psi(t_k,\xi_{kj})}\,\hat{\varphi}(\xi_{kj})=0$, $\sum_{j=1}^{m}\delta_{kj}=1$, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_{kj}=\delta_j\geqslant0$, $\sum_{j=1}^{m}\delta_j=1$.

Отправляясь от очевидного неравенства $|\Psi(t_k,\xi_j)|\leqslant|\Psi(t_0,\xi_j)|$, на основании (6) получаем $\operatorname{Re}\overline{\Psi(t_0,\xi_j)}\,P_0(\xi_j)\leqslant0$. Аналогично, отправляясь от неравенств $|\Psi(t_0,\xi_{kj})|\leqslant|\Psi(t_k,\xi_{kj})|$, получаем неравенства $\operatorname{Re}\overline{\Psi(t_0,\xi_j)}\times P_0(\xi_j)\geqslant0$, и окончательно имеем равенства

$$\operatorname{Re}\overline{\Psi(t_0,\xi_j)}\,P_0(\xi_j)=0,\quad j=1,\ldots,m. \tag{7}$$

Используя условие В. К. Иванова — Е. Я. Ремеза для функций $\Psi(t_k, z)$ и равенство (6), приходим к соотношению

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_{kj} \overline{\Psi(t_0, \xi_{kj})}\, P_0(\xi_{kj}) + \| \Psi(t_k, \cdot) - \Psi(t_0, \cdot) \| \sum_{j=1}^{m} \delta_{kj} | P_0(\xi_{kj}) |^2 + $$
$$+ o(\| \Psi(t_k, \cdot) - \Psi(t_0, \cdot) \|), \quad k \to \infty, \quad \sum_{j=1}^{m} \delta_{kj} = 1, \quad \delta_{kj} \geqslant 0. \qquad (8)$$

Учитывая, что среди чисел $\delta_j = \lim\limits_{k\to\infty} \delta_{kj}$ не менее чем $n+2$ отличны от нуля и полином P_0 имеет не более n корней, при достаточно больших k имеем неравенство $\sum_{j=1}^{m} \delta_{kj} | P_0(\xi_{kj}) |^2 \geqslant \gamma > 0$. Принимая во внимание равенства $\xi_{kj} = \xi_j$, справедливые также при всех достаточно больших k, и учитывая (7), приходим к противоречию с (8). Этим лемма доказана.

Доказательство теоремы. На основании леммы выберем последовательность $t_k \to t_0 + 0$, $k \to \infty$, такую, что существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\Psi(t_k, z) - \Psi(t_0, z)}{t_k - t_0} = R(t_0, z)$. Функция $R(t_0, z)$, очевидно, представима в виде (1). Как и при доказательстве леммы, будем считать, что при каждом k функция $f(t_k, z)$ обладает характеристическим множеством $E_k = \{\xi_{k1}, \ldots, \xi_{km}\}$, состоящим в точности из m точек, $n+2 \leqslant m \leqslant 2n+3$, и при всех достаточно больших k в силу конечности $\mathfrak{M}$ эти множества постоянны: $\xi_{kj} = \xi_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Отправляясь от представления

$$\Psi(t_k, z) = \Psi(t_0, z) + (t_k - t_0) R(t_0, z) + o(t_k - t_0) \qquad (9)$$

и очевидных неравенств $| \Psi(t_k, \xi_j) | \leqslant | \Psi(t_0, \xi_j) |$, $| \Psi(t_0, \xi_{kj}) | \leqslant | \Psi(t_k, \xi_{kj}) |$, приходим к уравнениям (2). Эти уравнения образуют линейную систему относительно $2n+3$ действительных неизвестных — коэффициентов полинома $D = \partial P / \partial t$ и действительного α из (1).

В силу условия теоремы множество $E = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$, по которому записана система (2), является характеристическим для функции $f(t_0, z)$. Поэтому ранг системы (2) равен m (доказательство этого факта такое же, как и в случае $m = 2n+3$ [1, 3]). Если $m < 2n+3$, то уравнений (2) недостаточно для определения коэффициентов функции $R(t_0, z)$. Воспользуемся в этом случае критерием В. К. Иванова — Е. Я. Ремеза, согласно которому при каждом $k = 1, 2, \ldots$ существуют такие положительные числа $\delta_{k1}, \ldots, \delta_{km}$, $\sum_{j=1}^{m} \delta_{kj} = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, что выполняется равенство

$$\sum_{j=0}^{m} \delta_{kj} \overline{\Psi(t_k, \xi_{kj})}\, \hat{\varphi}(\xi_{kj}) = 0. \qquad (10)$$

Применяя (9), получаем

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_{kj} \overline{R(t_0, \xi_{kj})}\, \hat{\varphi}(\xi_{kj}) + \sum_{j=1}^{m} c_{kj} \overline{\Psi(t_0, \xi_{kj})}\, \hat{\varphi}(\xi_{kj}) + o(1) = 0, \quad k \to \infty, \qquad (11)$$

где $c_{kj} = \delta_{kj} / (t_k - t_0)$.

Так как в силу условия теоремы действительный ранг системы векторов $\overline{\Psi(t_0, \xi_j)}\, \hat{\varphi}(\xi_j)$ равен $m-1$, то существуют пределы $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_{kj} = \delta_j$, $j = 1, \ldots, m$, и при этом $\sum_{j=1}^{m} \delta_j = 1$, $\sum_{j=1}^{m} \delta_j \overline{\Psi(t_0, \xi_j)}\, \hat{\varphi}(\xi_j) = 0$. Следовательно, (11) можно переписать так:

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_j \overline{R(t_0, \xi_{kj})}\, \hat{\varphi}(\xi_{kj}) + \sum_{j=1}^{m} c_{kj} \overline{\Psi(t_0, \xi_{kj})}\, \hat{\varphi}(\xi_{kj}) + o(1) = 0, \qquad (11')$$

и далее при всех достаточно больших k в силу конечности $\mathfrak{M}$ имеем соотношение

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_j \overline{R(t_0, \xi_j)}\, \hat{\varphi}(\xi_j) + \sum_{j=1}^{m} c_{kj} \overline{\Psi(t_0, \xi_j)}\, \hat{\varphi}(\xi_j) + o(1) = 0. \qquad (11'')$$

Из (11″) видно, что расстояние от $(2n+2)$-мерного вектора $r = \sum_{j=1}^{m} \delta_j \overline{R(t_0, \xi_j)}\, \hat{\varphi}(\xi_j)$ до подпространства $V_0 \subset R^{2n+2}$, натянутого на векторы $\overline{\Psi(t_0, \xi_j)}\,\hat{\varphi}(\xi_j)$, $j = 1, \ldots, m$, может быть сколь угодно малым, и поэтому $r \in V_0$. Таким образом, $\sum_{j=1}^m \delta_j \overline{R(t_0, \xi_j)}\,\hat{\varphi}(\xi_j) = \sum_{j=1}^m c_j \overline{\Psi(t_0, \xi_j)}\,\hat{\varphi}(\xi_j)$, где c_j — действительные числа, на которые в силу теоремы В. К. Иванова — Е. Я. Ремеза можно наложить условие $\sum_{j=1}^m c_j = 0$. Мы доказали, что функция $R(t_0, z)$ удовлетворяет уравнениям (3).

Равенства (2), (3) образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно $2n + 3 + m$ действительных неизвестных: $c_1, c_2, \ldots, c_m$, α и действительных и мнимых частей коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_n$ полинома $D(t_0, z) = \sum_{s=0}^n b_s \varphi_s(z)$. Докажем, что эта система однозначно разрешима при заданном характеристическом множестве $E = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$.

Заметим, что из уравнений (2) однозначно определяется $\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{E(t_k) - E(t_0)}{t_k - t_0}$ (доказательство этого факта аналогично случаю $m = 2n + 3$ [1]). Таким образом, если система (2), (3) имеет два решения $R_1(t_0, z)$ и $R_2(t_0, z)$ вида

$$R_i(t_0, z) = -\frac{\alpha}{E(t_0)}\Psi(t_0, z) + \frac{1}{E(t_0)}\left[\frac{\partial f(t_0, z)}{\partial t} - D_i(t_0, z)\right],$$

то их разность $R_1 - R_2 = \dfrac{1}{E(t_0)}[D_2(t_0, z) - D_1(t_0, z)] = Q(z)$ представляет собой полином. Поскольку $\delta_1, \ldots, \delta_m$ определены однозначно, то из (3) следует равенство

$$\sum_{j=1}^m \delta_j \overline{Q(\xi_j)}\,\hat{\varphi}(\xi_j) + \sum_{j=1}^m d_j \overline{\Psi(t_0, \xi_j)}\,\hat{\varphi}(\xi_j) = 0,$$

где $d_j \in R$, $j = 1, \ldots, m$. Отсюда

$$\sum_{j=1}^m \delta_j |Q(\xi_j)|^2 + \sum_{j=1}^m d_j \overline{\Psi(t_0, \xi_j)}\,Q(\xi_j) = 0. \tag{12}$$

Из того, что R_1 и R_2 удовлетворяют равенствам (2), следует $\operatorname{Re}\overline{\Psi(t_0, \xi_j)}Q(\xi_j) = 0$, и мы немедленно приходим к противоречию с (12). Однозначность определения коэффициентов c_j из условий (3) очевидна.

Для доказательства существования производной $\partial\Psi(t_0 + 0, z)/\partial t$ достаточно убедиться в том, что для любой последовательности $t_k \to t_0 + 0$, $k \to \infty$, существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\Psi(t_k, z) - \Psi(t_0, z)}{t_k - t_0}$ и все такие пределы совпадают. Как видно из приведенных выше рассуждений, для этого достаточно доказать, что для любого характеристического множества $E = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ функции $f(t_0, z)$, которое является пределом характеристических множеств функций $f(t_k, z)$ при какой-нибудь последовательности $(t_k)_{k=1}^\infty$, $t_k \to t_0 + 0$, система уравнений (2), (3) дает одно и то же решение $R(t_0, z)$.

Заметим сначала, что если для каждого t_k из последовательности $(t_k)_{k=1}^\infty$ функция $\Psi(t_k, z)$ имеет два характеристических множества $E_k = \{\xi_{k1}, \ldots, \xi_{km}\}$ и $\tilde{E}_k = \{\zeta_{k1}, \ldots, \zeta_{kl}\}$, и при этом $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_{kj} = \xi_j$, $j = 1, \ldots, m$, $\lim\limits_{k\to\infty} \zeta_{kj} = \zeta_j$, $j = 1, \ldots, l$, то решения системы (2), (3) на множествах $E = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ и $\tilde{E} = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_l\}$ совпадают.

Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_q$ — всевозможные характеристические множества функции $f(t_0, z)$ такие, что каждое E_r является характеристическим множеством функций $f(t_{kr}, z)$, $k = 1, 2, \ldots$, при некоторой последовательности $(t_{kr})_{k=1}^\infty$, $t_{kr} \to t_0 + 0$, $k \to \infty$. Количество таких множеств конечно в силу конечности $\mathfrak{M}$.

Выберем положительное ε_0 такое, что при каждом $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon_0)$ всякое характеристическое множество функции $f(t, z)$ совпадает с одним из множеств $E_1, E_2, \ldots, E_q$. Это возможно благодаря тому, что при $t \to t_0 + 0$ длина характеристического множества функции $f(t, z)$ не уменьшается. При каждом $\varepsilon < \varepsilon_0$ через $T_r(\varepsilon)$ обозначим множество всех $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$, при которых множество E_r является характеристическим для функции $f(t, z)$. Из выбора ε_0 следует, что при любом $r = 1, \ldots, q$ $T_r(\varepsilon)$ — замкнутое в $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ множество, и при этом $\bigcup_{r=1}^{q} T_r(\varepsilon) = (t_0, t_0 + \varepsilon)$. Обозначим через R_r решение системы (2), (3) на множестве E_r, $r = 1, \ldots, q$, и докажем равенства $R_1 = \ldots = R_q$.

Будем говорить, что множества E_p и E_s связаны, если найдутся такие индексы $i_1, \ldots, i_\alpha$, $i_1 = p$, $i_\alpha = s$, что множества $T_{i_{j-1}}(\varepsilon)$ и $T_{i_j}(\varepsilon)$ пересекаются при всех $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$, $j = 2, \ldots, \alpha$. В силу сделанного выше замечания $R_{i_{j-1}} = R_{i_j}$ и, следовательно, $R_p = R_s$, если E_p и E_s связаны.

Таким образом, для доказательства теоремы нам достаточно установить, что любые множества E_p, E_s связаны, и тогда $R_1 = R_2 = \ldots = R_q$. Пусть $\mathscr{E} = \{E_{i_1}, \ldots, E_{i_\gamma}\}$ — совокупность всех множеств, связанных с E_1. Положим $\overline{\mathscr{E}} = \{E_1, \ldots, E_q\} \setminus \mathscr{E}$. Если $\overline{\mathscr{E}} \neq \varnothing$, то для любых $E_j \in \overline{\mathscr{E}}$, $E_p \in \mathscr{E}$ имеем $T_j(\varepsilon) \cap T_p(\varepsilon) = \varnothing$ для всех достаточно малых ε. Тогда множества $T(\varepsilon) = \bigcup_{E_j \in \mathscr{E}} T_j(\varepsilon)$ и $\overline{T(\varepsilon)} = \bigcup_{E_j \in \overline{\mathscr{E}}} T_j(\varepsilon)$ при достаточно малых ε не пересекаются. Но $T(\varepsilon) \cup \overline{T(\varepsilon)} = (t_0, t_0 + \varepsilon)$, откуда следует, что если $T(\varepsilon)$ замкнуто, то $\overline{T(\varepsilon)}$ открыто в индуцированной топологии интервала $(t_0, t_0 + \varepsilon)$, что невозможно, поскольку все $T_j(\varepsilon)$ замкнуты в $(t_0, t_0 + \varepsilon)$, а сам интервал $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ — связное множество. Таким образом, $\overline{\mathscr{E}} = \varnothing$ и все множества E_r связаны с E_1. Теорема доказана.

Справедлива более сильная теорема.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ конечно. Если при $t \to t_0 + 0$ длина характеристического множества функции $f(t, z)$ не уменьшается, то найдется отрезок $[t_0, t_0 + \delta]$, $\delta > 0$, такой, что:*

1) *в каждой точке $\tau \in [t_0, t_0 + \delta]$ существуют односторонние производные функции $\psi(t, z)$ по t (в точке t_0 правая, в $t_0 + \delta$ левая). В каждой такой точке правая (левая) производная может быть найдена из системы, аналогичной* (2), (3);

2) *функция $\Psi(t, z)$ абсолютно непрерывна на $[t_0, t_0 + \delta]$ и дифференцируема по t на этом промежутке всюду за исключением, быть может, не более чем счетного множества точек.*

Доказательство. Утверждение 1 следует из теоремы 1 в силу того, что при выполнении условий теоремы при некотором $\delta > 0$ во всех точках $\tau \in [t_0, t_0 + \delta]$ длина характеристического множества функции $f(t, z)$ не уменьшается при $t \to \tau \pm 0$.

Пользуясь первым утверждением, рассмотрим векторнозначную функцию $\Phi(t) : [t_0, t_0 + \delta] \to C(\mathfrak{M})$, определенную по формуле $\Phi(t) = \dfrac{\partial \Psi(t + 0, z)}{\partial t}$, $t \in [t_0, t_0 + \delta)$, $\Phi(t_0 + \delta) = \dfrac{\partial \Psi(t_0 + \delta - 0, z)}{\partial t}$.

Как и при доказательстве существования односторонней производной в теореме 1, убеждаемся, что функция $\Phi(t)$ имеет односторонние пределы в каждой точке, и эти пределы совпадают с соответствующими односторонними производными $\partial \Psi(t \pm 0, z)/\partial t$. Следовательно, функция $\Phi(t)$ является правильной [4, с. 196], и поэтому она непрерывна всюду за исключением не более чем счетного множества точек. Отсюда следует второе утверждение теоремы.

Замечание. Существуют примеры, свидетельствующие о том, что теоремы 1 и 2 неверны на произвольных компактах $\mathfrak{M}$.

1. *Ковтунец В. В.* Дифференциальные свойства оператора наилучшего приближения комплекснозначных функций. I // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 4.— С. 437—443.
2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 504 с.
3. *Blatt H.-P.* Linear complex Chebyshev approximation // J. Approxim. Theory.— 1984.— **41**, N 2.— P. 159—169.
4. *Шварц Л.* Анализ : В 2-х т.— М. : Мир, 1972.— Т. 1.— 824 с.

Ровен. пед. ин-т Получено 05.11.85

УДК 517.926

В. Л. Кулик

Ограниченные решения систем линейных дифференциальных уравнений

Обозначим через $C^0(R)$ пространство непрерывных и ограниченных на всей оси $R =]-\infty, \infty[$ функций $f(t)$, $C^1(R)$ — подпространство пространства $C^0(R)$ функций, имеющих непрерывные производные первого порядка. Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = A(t)x, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $t \in R$, $A(t) \in C^0(R)$, и предположим, что существует знакопеременная квадратичная форма $V(t, x) = \langle S(t)x, x\rangle$, $S(t) \in C^1(R)$, имеющая знакоопределенную производную вдоль решений системы (1)

$$\dot V(t, x) = \langle (dS(t)/dt + S(t)A(t) + A^T(t)S(t))x, x\rangle \leqslant -\|x\|^2. \tag{2}$$

Угловыми скобками $\langle \cdot, \cdot\rangle$ обозначаем скалярное произведение в R^n, $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. Известно [1, 2], что в случае, когда $\det S(t) \neq 0$, $\forall t \in R$ система (1) будет э-дихотомичной на R. Следовательно, неоднородная система уравнений

$$dx/dt = A(t)x + f(t) \tag{3}$$

при каждой фиксированной вектор-функции $f(t) \in C^0(R)$ будет иметь единственное ограниченное на R решение. Если же определитель матрицы S при некотором значении $t = t_0$ превращается в нуль, то система (3) уже не при каждой вектор-функции $f(t) \in C^0(R)$ будет иметь ограниченное на R решение. Выяснению вопроса существования при этих условиях ограниченного на R решения системы (3) и посвящена предлагаемая статья.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть существует симметричная матрица* $S(t) \in C^1(R)$, *удовлетворяющая условию* (2), *и* $\det S(t_0) = 0$ *при некотором значении* $t = t_0 \in R$. *Тогда необходимым и достаточным условием существования ограниченного на* R *решения системы* (3) *является выполнение равенства*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle f(t), y(t)\rangle\, dt = 0 \tag{4}$$

при каждом ограниченном на R *решении* $y = y(t)$ *сопряженной системы уравнений*

$$dy/dt = -A^T(t)y. \tag{1'}$$

Доказательство. Сперва отметим, что при выполнении условий приведенной теоремы системы уравнений (1′) имеет нетривиальные ограниченные на R решения и все они экспоненциально убывают к нулю при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$ [3]. Расширенная система уравнений

$$dx/dt = A(t)x - y, \quad dy/dt = -A^T(t)y, \quad y \in R^n, \tag{5}$$