УДК 517.9

А. Ф. Иванов, Т. Кусано

Об осцилляции решений одного класса дифференциально-функциональных уравнений

Рассмотрим дифференциально-функциональное уравнение первого порядка нейтрального типа:

$$x'(t) + a(t)\,x'(\tau(t)) + F(t, x(t), x(\tau(t))) = 0, \tag{1}$$

где $a(t) \in C[t_0, \infty), \tau(t) \in C^1[t_0, \infty)$, $F(t, u, v) \in C([t_0, \infty) \times \mathbb{R}^2)$, $\lim\limits_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$.

Под решением уравнения (1) понимается функция, которая определена, непрерывно дифференцируемая и удовлетворяет уравнению (1) при всех достаточно больших t. Под осциллирующим понимается такое решение, производная которого меняет знак на интервале $[T, \infty)$ при любом $T \geqslant t_0$.

Как показывают исследования некоторых дифференциально-функциональных уравнений первого порядка нейтрального типа (в частности, дифференциально-разностных уравнений, сводящихся к семействам разностных уравнений [1]), для таких уравнений типичны решения, осциллирующие в смысле приведенного выше определения. В качестве простого примера можно предложить уравнение $x'(t) = a(t)\,x'(t-1) + a'(t)\,x(t-1)$, все решения которого принадлежат множеству гладких решений разностного уравнения $x(t) = a(t)\,x(t-1) + a_0$, a_0 — const. Если потребовать выполнение условия $\limsup\limits_{t\to\infty} a(t) < -1$, то последнее уравнение будет иметь бесконечно много решений $x(t)$ таких, что функция $x(t) - c$, c — произвольная постоянная, имеет сколь угодно большие нули. Эти решения осциллируют также и в смысле приведенного определения.

Среди большого количества публикаций, посвященных осцилляционным свойствам дифференциально-функциональных уравнений, незначительное число статей касается уравнений нейтрального типа (см., например, [2—4]). Уравнение (1) при $a(t) \equiv 0$ изучалось в работах [5, 6]. Идеи и методы исследования, развитые в последних двух работах, применимы также и к уравнению (1).

В настоящей работе получены достаточные условия осцилляции всех решений уравнения (1) при следующих дополнительных предположениях: $a(t)$ не меняет знак при $t \geqslant t_0$ ($a(t) \geqslant 0$ либо $a(t) \leqslant 0$), $F(t, u, v)$ в области $D = \{(t, u, v) \mid t \geqslant t_0,\ uv > 0\}$ удовлетворяет одному из условий

$$uF(t, u, v) > 0, \tag{2}$$

$$uF(t, u, v) < 0 \tag{3}$$

и допускает оценку

$$|F(t, u, v)| \geqslant b(t)\,f(u) + c(t)\,g(v), \tag{4}$$

где $b(t), c(t) \in C[t_0, \infty)$, $b(t) \geqslant 0$, $c(t) \geqslant 0$, $f(u), g(v) \in C(\mathbb{R})$, $uf(u) > 0$ при $u \neq 0$, $vg(v) > 0$ при $v \neq 0$.

При сделанных ограничениях уравнение (1) имеет единственное постоянное решение $x(t) \equiv 0$. Предполагается, что уравнение (1) допускает также другие решения. Из определения следует, что если уравнение (1) имеет неосциллирующее решение, то оно монотонно при всех достаточно больших t.

Заметим, что для доказательства осциллируемости решений уравнения (1) достаточно ограничиться рассмотрением положительных решений. Если $x(t)$ — отрицательное решение уравнения (1), то $y(t) = -x(t)$ будет решением уравнения $y(t) + a(t)\,y(\tau(t)) + G(t, y(t), y(\tau(t))) = 0$, где функция $G(t, u, v) = -F(t, -u, -v)$ также удовлетворяет условиям типа (2) — (4).

Лемма 1. *Пусть $a(t) \geqslant 0$. Тогда при выполнении условия* (2) *уравнение* (1) *не имеет положительных монотонно возрастающих решений, а при выполнении условия* (3) *уравнение* (1) *не имеет положительных монотонно убывающих решений.*

Действительно, предположим, например, что уравнение (1) при выполнении условия (2) имеет положительное монотонно возрастающее решение $x(t)$. Тогда при достаточно больших t: $x'(t) \geqslant 0$, $a(t)\, x'(\tau(t)) \geqslant 0$, $F(t, x(t), x(\tau(t))) > 0$, и соотношение (1) для $x(t)$ невозможно. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Определим множества $A = \{t \geqslant t_0 \mid \tau(t) > t\}$, $R = \{t \geqslant t_0 \mid \tau(t) < t\}$ полуоси $\mathbb{R}_+ = \{t \geqslant t_0\}$, на которых отклоняющийся аргумент $\tau(t)$ является по отношению к t либо опережением, либо запаздыванием соответственно.

Предположим, что уравнение (1) имеет положительное решение $x(t)$. Тогда из уравнения (1) следует, что если выполняется условие (2), то $x(t)$ удовлетворяет неравенству

$$x'(t) + a(t)\, x'(\tau(t)) + b(t)\, f(x(t)) + c(t)\, g(x(\tau(t))) \leqslant 0, \tag{5}$$

а если выполняется условие (3), то неравенству

$$x'(t) + a(t)\, x'(\tau(t)) - b(t)\, f(x(t)) - c(t)\, g(x(\tau(t))) \geqslant 0, \tag{6}$$

где по условию $b(t) \geqslant 0$, $c(t) \geqslant 0$. Таким образом, исходная задача об осцилляции всех решений уравнения (1) сводится к задаче об отсутствии у неравенств (5) и (6) положительных монотонных решений в случаях (2) и (3) соответственно.

Теорема 1. *Предположим, что справедливо соотношение* (2), $a(t) \geqslant 0$, $|a(t)/\tau'(t)| \leqslant M$ *и выполняется одно из условий:*

а) $\int_R c(t)\, dt = \infty$, *функция* $g(x)$ *монотонна при* $|x| \leqslant r$ *и* $\int_{|x| \leqslant r} dx/|g(x)| < \infty$;

б) $\tau'(t) \geqslant 0$, $\int_A b(t)\, dt = \infty$, *функция* $f(x)$ *монотонна при* $|x| \leqslant r$ *и* $\int_{|x| \leqslant r} dx/|f(x)| < \infty$.

Тогда все решения уравнения (1) *осциллируют.*

Доказательство. В силу леммы 1 и приведенного выше замечания достаточно показать, что неравенство (5) не имеет положительных монотонно убывающих решений. Предположим противное: $0 < x(t)$ — монотонно убывающее решение неравенства (5). Тогда в случае а): $x'(t) + \frac{a(t)}{\tau'(t)}\, x'(\tau(t))\, \tau'(t) + c(t)\, g(x(\tau(t))) \leqslant 0$, или при $t \in R$: $\frac{x'(t)}{g(x(t))} + \frac{a(t)}{\tau'(t)} \times \frac{x'(\tau(t))\, \tau'(t)}{g(x(\tau(t)))} + c(t) \leqslant 0$. Интегрируя это неравенство, получаем

$$\int_{x(t_0)}^{0} \frac{du}{g(u)} - M \left| \int_{x(\tau(t_0))}^{0} \frac{du}{g(u)} \right| \leqslant - \int_R c(t)\, dt,$$

что противоречит условию а) теоремы.

В случае б): $x'(t) + a(t)\, x'(\tau(t)) + b(t)\, f(x(t)) \leqslant 0$, или при $t \in A$: $\frac{x'(t)}{f(x(t))} + \frac{a(t)}{\tau'(t)}\, \frac{x'(\tau(t))\, \tau'(t)}{f(x(\tau(t)))} + b(t) \leqslant 0$. Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$\int_{x(t_0)}^{0} \frac{du}{f(u)} - M \left| \int_{x(\tau(t_0))}^{0} \frac{du}{f(u)} \right| \leqslant - \int_A b(t)\, dt,$$

что противоречит условию б) теоремы.

Теорема 2. *Предположим, что справедливо соотношение* (3), $a(t) \geqslant 0$, $|a(t)/\tau'(t)| \leqslant M$ *и выполняется одно из условий:*

а) $\int\limits_A c(t)\,dt = \infty$, *функция* $g(x)$ *монотонна при* $|x| \geqslant L$ *и* $\int\limits_{|x|\geqslant L} \frac{dx}{|g(x)|} < \infty$;

б) $\tau'(t) \geqslant 0$, $\int\limits_R b(t)\,dt = \infty$, *функция* $f(x)$ *монотонна при* $|x| \geqslant L$ и $\int\limits_{|x|\geqslant L} dx/|f(x)| < \infty$.

Тогда все решения уравнения (1) *осциллируют.*

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно показать, что неравенство (6) не имеет положительных монотонно возрастающих решений. Предположим противное: $0 < x(t)$ — монотонное решение неравенства (6). Тогда в случае а): $x'(t) + a(t)x'(\tau(t)) \geqslant c(t)g(x(\tau(t)))$, или при $t \in A$: $\frac{x'(t)}{g(x(t))} + \frac{a(t)}{\tau'(t)} \frac{x'(\tau(t))\tau'(t)}{g(x(\tau(t)))} \geqslant c(t)$. Интегрируя последнее неравенство, получаем

$$\int\limits_{x(t_0)}^{\infty} \frac{du}{g(u)} + M \int\limits_{x(\tau(t_0))}^{\infty} \frac{du}{g(u)} \geqslant \int\limits_A c(t)\,dt,$$

что противоречит условию а) теоремы.

В случае б): $x'(t) + a(t)x'(\tau(t)) \geqslant b(t)f(x(t))$, или при $t \in R$: $\frac{x'(t)}{f(x(t))} + \frac{a(t)}{\tau'(t)} \frac{x'(\tau(t))\tau'(t)}{f(x(\tau(t)))} \geqslant b(t)$. Интегрируя это неравенство, получаем

$$\int\limits_{x(t_0)}^{\infty} \frac{du}{f(u)} + M \int\limits_{x(\tau(t_0))}^{\infty} \frac{du}{f(u)} \geqslant \int\limits_R b(t)\,dt,$$

что противоречит условию б) теоремы.

Лемма 2. *Предположим, что справедливо соотношение* (2), $a(t) \leqslant 0$ *и выполняется одно из условий:*

а) $\int\limits_{\mathbb{R}_+} b(t)\,dt = \infty$, $\int\limits_{|x|\leqslant r} \frac{dx}{|f(x)|} < \infty$;

б) $\int\limits_R c(t)\,dt = \infty$, *функция* $g(x)$ *монотонна при* $|x| \leqslant r$ *и* $\int\limits_{|x|\leqslant r} \frac{dx}{|g(x)|} < \infty$;

в) $|g(x)| \geqslant g_0|x|$ *при* $|x| \leqslant r$, $\tau'(t) \geqslant 0$ *и* $\limsup\limits_{t\to\infty} \int\limits_{\tau(t)}^{t} c(s)\,ds > 1/g_0$.

Тогда неравенство (5) *не имеет положительных монотонно убывающих решений.*

Доказательство. Предположим противное: $0 < x(t)$ — монотонно убывающее решение неравенства (5). Тогда в случае а): $x'(t) + b(t)f(x(t)) \leqslant 0$. Интегрируя это неравенство по $\mathbb{R}_+$, получаем противоречие: $\int\limits_{x(t_0)}^{0} \frac{du}{f(u)} \leqslant -\int\limits_{\mathbb{R}_+} b(t)\,dt$. В случае б): $x'(t) + c(t)g(x(\tau(t))) \leqslant 0$. Интегрируя по R последнее неравенство, получаем противоречие:

$\int\limits_{x(t_0)}^{0} \frac{du}{g(u)} \leqslant - \int\limits_{R} c(t)\, dt$. В случае в): $x'(t) + c(t)\, g(x(\tau(t))) \leqslant 0$. Если $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = x_0 > 0$, то из последнего неравенства следует $x(t) \leqslant x(t_0) - g(x_0) \int\limits_{t_0}^{t} c(s)\, ds$. Поскольку $\limsup\limits_{t \to \infty} \int\limits_{\tau(t)}^{t} c(s)\, ds > 1/g_0$, то $\int\limits_{\mathbb{R}_+} c(t)\, dt = \infty$. Следовательно, $x(t) < 0$ при всех достаточно больших t. Таким образом. $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$ и можно указать такое $t_1 \geqslant t_0$, что $x(t) \leqslant r$, $x(\tau(t)) \leqslant r$ $\forall\, t \geqslant t_1$. Тогда $x'(t) + g_0 c(t)\, x(\tau(t)) \leqslant 0$. Интегрируя это неравенство на промежутке $[\tau(t), t]$, получаем $x(\tau(t)) \leqslant x(t) \left[1 - g_0 \int\limits_{\tau(t)}^{t} c(s)\, ds\right]$, что с учетом условия в) противоречит предположению $x(t) > 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Предположим, что справедливо соотношение* (2), $a(t) < 0$, $\tau'(t) \geqslant 0$ *и выполняется одно из условий:*

а) $\int\limits_{A} \frac{\tau'(t)\, c(t)}{a(t)}\, dt = \infty$, $\int\limits_{|x| \geqslant L} \frac{dx}{|g(x)|} < \infty$;

б) $\int\limits_{R} \frac{\tau'(t)\, b(t)}{a(t)}\, dt = \infty$, $\int\limits_{|x| \geqslant L} \frac{dx}{|f(x)|} < \infty$;

в) $|f(x)| \geqslant f_0 |x|$ *при* $|x| \geqslant L$ *и* $\limsup\limits_{t \to \infty} \int\limits_{\tau(t)}^{t} \frac{b(s)\, \tau'(s)}{a(s)}\, ds > 1/f_0$.

Тогда неравенство (5) *не имеет положительных монотонно возрастающих решений.*

Доказательство. Предположим противное: $0 < x(t)$ — монотонно возрастающее решение неравенства (5). Тогда

$$x'(\tau(t))\, \tau'(t) + \frac{b(t)\, \tau'(t)}{a(t)} f(x(t)) + \frac{c(t)\, \tau'(t)}{a(t)} g(x(\tau(t))) \geqslant 0,$$

и последующие рассуждения аналогичны приведенным для соответствующих пунктов леммы 2.

Теорема 3. *Предположим, что справедливо соотношение* (2), $a(t) < 0$, $\tau'(t) \geqslant 0$ *и выполняется по одному из условий лемм* 2 *и* 3.

Тогда все решения уравнения (1) *осциллируют.*

Доказательство теоремы 3 следует из лемм 2 и 3.

Следующие две леммы относятся к случаю, когда $a(t) < 0$, $\tau'(t) \geqslant 0$ и выполняется соотношение (3).

Лемма 4. *Если выполняется одно из условий:*

а) $\int\limits_{\mathbb{R}_+} \frac{c(t)\, \tau'(t)}{a(t)}\, dt = \infty$, *функция* $g(x)$ *монотонна при* $|x| \leqslant r$ *и* $\int\limits_{|x| \leqslant r} \frac{dx}{|g(x)|} < \infty$;

б) $\int\limits_{A} \frac{b(t)\, \tau'(t)}{a(t)}\, dt = \infty$, *функция* $f(x)$ *монотонна при* $|x| \leqslant r$ *и* $\int\limits_{|x| \leqslant r} \frac{dx}{|f(x)|} < \infty$;

в) *функция* $f(x)$ *монотонна при* $|x| \leqslant r$, $|f(x)| \geqslant f_0|x|$ *и*

$$\limsup_{t\to\infty} \int\limits_t^{\tau(t)} \frac{b(s)\,\tau'(s)}{a(s)}\,ds > 1/f_0,$$

то неравенство (6) *не имеет положительных монотонно убывающих решений.*

Лемма 5. *Если выполняется одно из условий:*

а) $\int\limits_{\mathbb{R}_+} b(t)\,dt = \infty$, *функция* $f(x)$ *монотонна при* $|x| \geqslant L$ *и* $\int\limits_{|x|\geqslant L} \frac{dx}{|f(x)|} < \infty$;

б) $\int\limits_A c(t)\,dt = \infty$, *функция* $g(x)$ *монотонна при* $|x| \geqslant L$ *и* $\int\limits_{|x|\geqslant L} \frac{dx}{|g(x)|} < \infty$;

в) $|g(x)| \geqslant g_0|x|$ *при* $|x| \geqslant L$ *и* $\limsup\limits_{t\to\infty} \int\limits_t^{\tau(t)} c(s)\,ds > 1/g_0$,

то неравенство (6) *не имеет положительных монотонно возрастающих решений.*

Доказательство лемм 4 и 5 аналогично доказательству лемм 2 и 3.

Теорема 4. *Предположим, что справедливо соотношение* (3), $a(t) < 0$, $\tau'(t) \geqslant 0$ *и выполняется по одному из условий лемм* 4 *и* 5.

Тогда все решения уравнения (1) *осциллируют.*

Доказательство теоремы следует из лемм 4, 5.

1. *Романенко Е. Ю., Шарковский А. Н.* Дифференциально-функциональные уравнения, близкие к функциональным // Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — Киев : Наук. думка, 1979.— С. 179—209.
2. *Zahariev A. I., Bainov D. D.* Oscillating properties of the solutions of a clacs of neutral type functional-differential equations // Bull. Austral. Math. Soc.— 1980.— **22**, N 3.— P. 365—372.
3. *Grammatikopoulos M. K., Grove E. A., Ladas G.* Oscillations of first order neutral delay differential equations // J. Math. Anal. and Appl.— 1986.— **120**, N 2.— P. 510—520.
4. *Иванов А. Ф.* Об осцилляции решений дифференциально-разностных уравнений первого порядка нейтрального типа.— Киев, 1983.— 17 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.16).
5. *Kitamura Y., Kusano T.* Oscillation of first—order nonlinear differential equations with deviating arguments // Proc. Amer. Math. Soc.— 1980.— **78**.— P. 64—68.
6. *Иванов А. Ф., Шевело В. Н.* Об осцилляции и асимптотическом поведении решений дифференциально-функциональных уравнений первого порядка // Укр. мат. журн.— 1981. — **33**, № 6.— С. 745—751.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Хиросим. ун-т, Япония

Получено 22.07.86

УДК 517.538.5

В. В. Ковтунец

Дифференциальные свойства оператора наилучшего приближения комплекснозначных функций. II

В работе [1] исследованы дифференциальные свойства оператора наилучшего равномерного приближения комплекснозначных непрерывных на метрическом компакте $\mathfrak{M}$ функций полиномами по чебышевской системе функций $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ в случае, когда всякое характеристическое множество приб-