2. *Гусак Д. В.* Метод факторизации в граничных задачах для одного класса процессов на цепи Маркова. II.— Киев, 1978.— 60 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 78.11).
3. *Гусак Д. В.* Распределение абсолютного максимума пуассоновских и винеровских процессов на цепи Маркова // Trans. Seventh Prague Conf. 1974.— Prague : Academia Prague, 1977.— A.— P. 211—219.
4. *Могульский А. А.* Факторизационные тождества для процессов с независимыми приращениями, заданных на конечной цепи Маркова // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1974.— Вып. 11.— С. 86—96.
5. *Королюк В. С., Шуренков В. М.* Метод потенциала в граничных задачах для случайных блужданий на цепи Маркова // Укр. мат. журн.— 1977.— **29**, № 4.— С. 464—471.
6. *Арндт К.* Об отыскании в явном виде распределения супремума случайного блуждания на цепи Маркова // Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы.— Новосибирск : Наука, 1982.— С. 139—146.
7. *Алиев Т. М., Ежов И. И.* Управляемые пуассоновские процессы с границами и их применение.— Киев, 1976.— 30 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 796-76 Деп.
8. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1976.— 182 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 26.09.86,
после доработки — 21.11.86

УДК 517.5

Г. И. Ибрагимов

О представлении аналитических функций двух переменных в произведении бесконечных выпуклых областей рядами Дирихле

А. Ф. Леонтьев (см., например, [1]) получил представление аналитических функций рядами Дирихле во всей плоскости и полуплоскости. В работах [2, 3] дано представление целых функций многих переменных во всем пространстве рядами Дирихле.

В работе [4] доказано, что любую аналитическую функцию в произвольной бесконечной выпуклой области D, отличной от всей плоскости и непрерывной в замкнутой области $\overline{D}$, можно представить в D рядом Дирихле, сходящимся на каждом компакте равномерно. В [5] показано, что любую функцию, аналитическую в выпуклой области пространства $\overline{C}^n$, можно разложить в этой области в ряд Дирихле (без указания формул для коэффициентов).

В данной работе рассматривается представление аналитических функций двух переменных рядами Дирихле в декартовом произведении бесконечных выпуклых областей, отличных от всей плоскости, непрерывных в замкнутой области и удовлетворяющих некоторому дополнительному условию, причем приводятся явные формулы для коэффициентов ряда Дирихле.

Сформулируем основной результат.

Пусть D_p, $p = 1, 2$,— бесконечная выпуклая область в плоскости z_p. Не уменьшая общности, можно предположить, что $0 \in D_p$, $(-\infty, 0] \subset D_p$. Будем считать, что если $l_{\theta_p} : x_p \cos\theta_p + y_p \sin\theta_p = K_p(\theta_p)$—опорная прямая области D_p, то $-\theta_p^0 < \theta_p < \theta_p^0$, $0 < \theta_p^0 \leqslant \pi/2$. Если ∂D_p — граница области D_p, начиная с некоторой точки совпадает с прямой l_{θ_p}, то угол θ_p может быть равен θ_p^0. В аналогичной ситуации может быть $\theta_p = -\theta_p^0$. В случае, когда D_p представляет собой полуплоскость, $\theta_p = \theta_p^0 = 0$.

Положим $h_p(\theta_p) = K_p(-\theta_p)$. Пусть целая функция $\varphi_p(\lambda)$ имеет простые нули $\lambda_k^{(p)}$, $k \geqslant 1$, и удовлетворяет условию

$$|\varphi_p(r\exp(i\theta_p))| < C\exp\{h_p(\theta_p) r\}/(1 + r^{\alpha_p}), \quad \alpha_p > 1, \quad -\theta_p^0 < \theta_p < \theta_p^0. \tag{1}$$

Положим

$$\psi_{p,k}(t_p)=\frac{1}{\varphi_p'(\lambda_k^{(p)})}\int\limits_0^{\infty\exp(i\theta_p)}\frac{\varphi_p(\lambda)\exp(-\lambda t_p)\,d\lambda}{\lambda-\lambda_k^{(p)}},\quad k\geqslant 1,\ -\theta_p^0<\theta_p<\theta_p^0.$$

В силу условия (1) функция $\psi_{p,k}(t_p)$ регулярна вне $\overline{D}_p$, непрерывна вплоть до границы (кроме, быть может, бесконечно удаленной точки) и ограничена: $|\psi_{p,k}(t_p)|\leqslant M_k$. Положим $D=D_1\times D_2$ и предположим, что $f(z_1,z_2)$ — аналитическая в области D функция — непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, причем

$$f(z_1,z_2)=O(1/|z_1|^{\mu_1}|z_2|^{\mu_2}),\quad (z_1,z_2)\in\overline{D},\quad \mu_p>1. \tag{2}$$

Сопоставим функции $f(z_1,z_2)$ ряд Дирихле

$$f(z_1,z_2)\sim\sum_{m,n=1}^{\infty}d_{m,n}\exp(\lambda_m^{(1)}z_1+\lambda_n^{(2)}z_2), \tag{3}$$

где

$$d_{m,n}=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\partial D_1}\int\limits_{\partial D_2}f(t_1,t_2)\,\psi_{1,m}(t_1)\,\psi_{2,n}(t_2)\,dt_1dt_2. \tag{4}$$

Для исследования сходимости ряда (3) к $f(z_1,z_2)$ необходимо найти формулу для разности между $f(z_1,z_2)$ и частичной суммой ряда (3).

Пусть Γ_p — конечный замкнутый контур, на котором $\varphi_p(\lambda)\neq 0$, D_{Γ_p} — область, ограниченная Γ_p, $\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2$, $D_\Gamma=D_{\Gamma_1}\times D_{\Gamma_2}$. Введем функцию

$$\Phi(z_1,z_2,\lambda_1,\lambda_2)=\exp(\lambda_1z_1+\lambda_2z_2)-\varphi_1(\lambda_1)\varphi_2(\lambda_2)\times$$
$$\times\sum_{(\lambda_k^{(1)},\lambda_\nu^{(2)})\in D_\Gamma}\frac{\exp(\lambda_k^{(1)}z_1+\lambda_\nu^{(2)}z_2)}{(\lambda_1-\lambda_k^{(1)})(\lambda_2-\lambda_\nu^{(2)})\,\varphi_1'(\lambda_k^{(1)})\,\varphi_2'(\lambda_\nu^{(2)})}.$$

Функция $\Phi(z_1,z_2,\lambda_1,\lambda_2)$, как функция переменной λ_1 и λ_2, целая. Положим

$$\gamma(z_1,z_2,t_1,t_2)=\int\limits_0^{\infty\exp(i\theta_1)}\int\limits_0^{\infty\exp(i\theta_2)}\Phi(z_1,z_2,\lambda_1,\lambda_2)\exp\{-(\lambda_1t_1+\lambda_2t_2)\}d\lambda_1d\lambda_2,$$
$$-\theta_p^0<\theta_p<\theta_p^0.$$

Отсюда имеем

$$\gamma(z_1,z_2,t_1,t_2)=1/(t_1-z_1)(t_2-z_2)-\sum_{(\lambda_k^{(1)},\lambda_\nu^{(2)})\in D_\Gamma}\exp(\lambda_k^{(1)}z_1+\lambda_\nu^{(2)}z_2)\,\psi_{1,m}(t_1)\psi_{2,n}(t_2),$$
$$t_p\notin\overline{D}_p,\quad z_p\in D_p.$$

Заметим, что функция $\gamma(z_1,z_2,t_1,t_2)$, как функция от переменных t_1, t_2, регулярна при $t_1\notin\overline{D}_1$, $t_2\notin\overline{D}_2$, непрерывна и ограничена при $t_1\notin D_1$, $t_2\notin D_2$. В силу условия (2) и формулы (4) из последнего равенства находим

$$f(z_1,z_2)-\sum_{(\lambda_k^{(1)},\lambda_\nu^{(2)})\in D_\Gamma}d_{k,\nu}\exp(\lambda_k^{(1)}z_1+\lambda_\nu^{(2)}z_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\times$$
$$\times\int\limits_{\partial D_1}\int\limits_{\partial D_2}f(t_1,t_2)\,\gamma(z_1,z_2,t_1,t_2)\,dt_1dt_2. \tag{5}$$

Это и есть формула остаточного члена, о которой упоминалось выше.

Теперь введем следующие дополнительные ограничения на целые функции $\varphi_p(\lambda)$, которые заимствованы нами из работы [1]: существуют система замкнутых контуров $\Gamma_{p,k}$, $p=1,2$; $k\geqslant 1$, и система криволинейных колец $P_{p,k}=\bigcup\limits_{t\in\Gamma_{p,k}}\{z:|z-t|\leqslant\exp(-\varepsilon_k^{(p)}r_k^{(p)})\}$, $r_k^{(p)}=\min\limits_{z\in\Gamma_{p,k}}|z|\to\infty$; $0<\varepsilon_k^{(p)}\to 0$, при $k\to\infty$ со свойствами: а) для $\forall\gamma>0$, $\varepsilon>0$ справедливо равенство $\lim\limits_{k\to\infty}\min\limits_{\lambda\in\Gamma'_{p,k}}H_p(\lambda)=+\infty$, $H_p(\lambda)=\ln|\varphi_p(\lambda)|/|\lambda|$, причем при $k>K(\gamma,\varepsilon)$ функция $H_p(\lambda)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$H_p(\lambda)>h_p(\theta_p)-\varepsilon,\quad \lambda\in P'_{p,k},\quad H_p(\lambda)>h_p(\theta_p^0-\gamma)-\varepsilon,\quad \lambda\in P''_{p,k},$$

$$H_p(\lambda)>h_p(-\theta_p^0+\gamma)-\varepsilon,\quad \lambda\in P'''_{p,k},$$

где $\Gamma'_{p,k}$ — часть $\Gamma_{p,k}$, лежащая в дополнении к углу $|\theta_p|<\theta_p^0+\gamma$, $P'_{p,k}$ — часть $P_{p,k}$, лежащая в углу $|\theta_p|<\theta_p^0-\gamma$, $P''_{p,k}$, $P'''_{p,k}$ — части $P_{p,k}$, лежащие соответственно в малых углах $|\theta_p-\theta_p^0|\leqslant\gamma$, $|\theta_p+\theta_p^0|\leqslant\gamma$; б) если $C'_{p,k}$, $C''_{p,k}$ — границы криволинейного полукольца $P'_{p,k}\cup P''_{p,k}\cup P'''_{p,k}$, лежащие соответственно во внешности и внутренности $\Gamma_{p,k}$, то длины кривых $\Gamma'_{p,k}$, $C'_{p,k}$ и $C''_{p,k}$ при $k\to\infty$ суть $\exp\{0(1)r_k\}$.

Основной результат работы заключается в следующем.

Теорема. *Пусть функция $f(z_1,z_2)$ аналитична в области $D=D_1\times\times D_2$, непрерывна в замкнутой области $\bar D=\bar D_1\times\bar D_2$ и удовлетворяет условию* (2). *Предположим, что $\varphi_p(\lambda)$ — целая функция с простыми нулями $\lambda_k^{(p)}$, $k\geqslant 1$, которая удовлетворяет условию* (1) *и для нее имеются кривые $\Gamma_{p,k}$ с указанными выше свойствами* а) *и* б). *Тогда в области D справедливо разложение*

$$f(z_1,z_2)=\sum_{m,n=1}^{\infty}d_{m,n}\exp(\lambda_m^{(1)}z_1+\lambda_n^{(2)}z_2),$$

причем сходимость на каждом компакте равномерная и коэффициенты $d_{m,n}$ определяются по формулам (4).

Доказательство. Прежде чем приступить к доказательству теоремы отметим, что для функции $\Phi(z_1,z_2,\lambda_1,\lambda_2)$ справедливо следующее интегральное представление: если 1) $\lambda_1\in D_{\Gamma_1}$, $\lambda_2\in D_{\Gamma_2}$, то

$$\Phi(z_1,z_2,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{(2\pi i^2)}\times$$

$$\times\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{[\varphi_1(\lambda_1)\varphi_2(u_2)+\varphi_1(u_1)\varphi_2(\lambda_2)-\varphi_1(\lambda_1)\varphi_2(\lambda_2)]\exp(u_1z_1+u_2z_2)\,du_1du_2}{(u_1-\lambda_1)(u_2-\lambda_2)\varphi_1(u_1)\varphi_2(u_2)},\tag{6}$$

а если 2) $\lambda_1\in D_{\Gamma_1}$, $\lambda_2\notin\bar D_{\Gamma_2}$, или $\lambda_1\notin\bar D_{\Gamma_1}$, $\lambda_2\in D_{\Gamma_2}$, или $\lambda_1\notin\bar D_{\Gamma_1}$, $\lambda_2\notin\bar D_{\Gamma_2}$, то в каждом из этих случаев справедливо равенство

$$\Phi(z_1,z_2,\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\times$$

$$\times\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{[\varphi_1(\lambda_1)\varphi_2(u_2)+\varphi_1(u_1)\varphi_2(\lambda_2)-\varphi_1(\lambda_1)\varphi_2(\lambda_2)]\exp(u_1z_1+u_2z_2)\,du_1du_2}{(u_1-\lambda_1)(u_2-\lambda_2)\varphi_1(u_1)\varphi_2(u_2)}+$$

$$+\exp(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2).\tag{7}$$

Пусть $D'_{p,k}$ — пересечение $D_{\Gamma_{p,k}}$ с углом $|\arg u_p|<\theta_p^0$, $D''_{p,k}$ — дополнение $D'_{p,k}$ до этого угла. Положим $l'_{p,k}=\Gamma'_{p,k}\cup C'_{p,k}$, $l''_{p,k}=\Gamma'_{p,k}\cup C''_{p,k}$, $p=1,2$; $k\geqslant 1$. В формуле (6) контуры интегрирования Γ_1 и Γ_2 заменим соответственно контурами $l'_{1,m}$, $l'_{2,n}$ и обозначим полученную функцию через $\Phi_{m,n}(z_1,z_2,\lambda_1,\lambda_2)$ или просто $\Phi_{m,n}$. Так как $D'_{p,k}\subset D_{l'_{p,k}}$, то для $\lambda_1\in D'_{1,m}$, $\lambda_2\in D'_{2,n}$ и всех $(z_1, z_2) \in D$ имеем

$$\Phi_{m,n} = \exp(\lambda_2 z_2)\,\varphi_1(\lambda_1)\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l'_{1,m}}\frac{\exp(u_1 z_1)\,du_1}{(u_1-\lambda_1)\,\varphi_1(u_1)} + \exp(\lambda_1 z_1)\,\varphi_2(\lambda_2)\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l'_{2,n}}\frac{\exp(u_2 z_2)\,du_2}{(u_2-\lambda_2)\,\varphi_2(u_2)} - \frac{\varphi_1(\lambda_1)\,\varphi_2(\lambda_2)}{(2\pi i)^2}\times$$

$$\times\int\limits_{l'_{1,m}}\int\limits_{l'_{2,n}}\frac{\exp(u_1 z_1+u_2 z_2)\,du_1 du_2}{(u_1-\lambda_1)(u_2-\lambda_2)\,\varphi_1(u_1)\,\varphi_2(u_2)}, \qquad (8)$$

а в силу формулы (7) получаем

$$\Phi_{m,n} = \exp(\lambda_1 z_1)\,\frac{\varphi_2(\lambda_2)}{2\pi i}\int\limits_{l''_{2,n}}\frac{\exp(u_2 z_2)\,du_2}{(u_2-\lambda_2)\,\varphi_2(u_2)} - \frac{\varphi_1(\lambda_1)\,\varphi_2(\lambda_2)}{(2\pi i)^2}\times$$

$$\times\int\limits_{l'_{1,m}}\int\limits_{l''_{2,n}}\frac{\exp(u_1 z_1+u_2 z_2)\,du_1 du_2}{(u_1-\lambda_1)(u_2-\lambda_2)\,\varphi_1(u_1)\,\varphi_2(u_2)} + \exp(\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2),$$

$$\lambda_1 \in D'_{1,m}, \quad \lambda_2 \in D''_{2,n}, \qquad (9)$$

$$\Phi_{m,n} = \exp(\lambda_2 z_2)\,\frac{\varphi_1(\lambda_1)}{2\pi i}\int\limits_{l''_{1,m}}\frac{\exp(u_1 z_1)\,du_1}{(u_1-\lambda_1)\,\varphi_1(u_1)} - \frac{\varphi_1(\lambda_1)\,\varphi_2(\lambda_2)}{(2\pi i)^2}\times$$

$$\times\int\limits_{l''_{1,m}}\int\limits_{l'_{2,n}}\frac{\exp(u_1 z_1+u_2 z_2)\,du_1 du_2}{(u_1-\lambda_1)(u_2-\lambda_2)\,\varphi_1(u_1)\,\varphi_2(u_2)} + \exp(\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2),$$

$$\lambda_1 \in D''_{1,m}, \quad \lambda_2 \in D'_{2,n}, \qquad (10)$$

$$\Phi_{m,n} = \frac{\varphi_1(\lambda_1)\,\varphi_2(\lambda_2)}{(2\pi i)^2}\int\limits_{l''_{1,m}}\int\limits_{l''_{2,n}}\frac{\exp(u_1 z_1+u_2 z_2)\,du_1 du_2}{(u_1-\lambda_1)(u_2-\lambda_2)\,\varphi_1(u_1)\,\varphi_2(u_2)} +$$

$$+\exp(\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2), \quad \lambda_p \in D''_{p,k}. \qquad (11)$$

Теперь для того чтобы оценить остаточный член по формуле (5), нужно изучить рост функции $\Phi_{m,n}(z_2, z_2, \lambda_1, \lambda_2)$ как функции переменных λ_1 и λ_2 в области $|\arg\lambda_1| < \theta_1^0$, $|\arg\lambda_2| < \theta_2^0$.

Пусть $z_1 \in E_1$, $z_2 \in E_2$ и $E_p \subset D_p$ — выпуклый компакт, $K_p^0(\theta_p)$ — опорная функция E_p, δ_p — расстояние от E_p до ∂D_p, $E = E_1 \times E_2$. Положив $u_p = |u_p|\exp(i\theta_p)$, $-\pi \leqslant \theta_p \leqslant \pi$, имеем $\operatorname{Re}(z_p u_p) = |u_p|\operatorname{Re}\{z_p \exp(i\theta_p)\} \leqslant |u_p|\,K_p^0(\theta_p)$, $-\pi \leqslant \theta_p \leqslant \pi$.

Учитывая, что δ_p — расстояние от E_p до ∂D_p, в силу известного свойства опорной функции получаем

$$K_p^0(\theta_p) \leqslant h_p(-\theta_p) - \delta_p, \quad |\theta_p| < \theta_p^0. \qquad (12)$$

Далее в силу непрерывности опорной функции $K_p^0(\theta_p)$ для заданного $\varepsilon > 0$ найдется $\gamma > 0$ такое, что если $|\theta_p'' - \theta_p'| < 2\gamma$, то $|K_p^0(\theta_p'') - K_p^0(\theta_p')| < \varepsilon$. Следовательно, $K_p^0(\theta_p) < K_p^0(\theta_p^0 - \gamma) + \varepsilon$ при $|\theta_p - \theta_p^0| < \gamma$ и $K_p^0(\theta_p) < K_p^0(-\theta_p^0 + \gamma) + \varepsilon$ при $|\theta_p + \theta_p^0| < \gamma$. В силу неравенства (12) получаем $K_p^0(\theta_p^0 - \gamma) \leqslant h_p(-\theta_p^0 + \gamma) - \delta_p$ и $K_p^0(-\theta_p^0 + \gamma) \leqslant h_p(\theta_p^0 - \gamma) - \delta_p$. Значит, для всех $z_p \in E_p$ имеем

$$\operatorname{Re}(z_p u_p) < [h_p(\theta_p^0 - \gamma) - \delta_p + \varepsilon]\,|u_p|, \quad |\theta_p - \theta_p^0| < \gamma, \quad \operatorname{Re}(z_p u_p) <$$

$$< [h_p(-\theta_p^0 + \gamma) - \delta_p + \varepsilon]\,|u_p|, \quad |\theta_p + \theta_p^0| < \gamma. \qquad (13)$$

Учитывая, что E_p — ограниченное множество, получаем

$$\operatorname{Re}(z_p u_p) \leqslant M |u_p|, \tag{14}$$

где M зависит от E. В силу (14) и первого из условий а) находим

$$|\exp(z_p u_p)|/|\varphi_p(u_p)| < \exp(-|u_p|), \quad u_p \in \Gamma'_{p,k}, \quad k > k_1, \tag{15}$$

а в силу (12) и второго из условий а) получаем

$$|\exp(u_p z_p)|/|\varphi_p(u_p)| < \exp\{-(\delta_p - \varepsilon)|u_p|\}, \quad u_p \in [C'_{p,k} \cup C''_{p,k}] \cap P'_{p,k}, \quad k > k_2. \tag{16}$$

Далее в силу (13) и остальных из условий а) выполняется неравенство

$$|\exp(z_p u_p)|/|\varphi_p(u_p)| < \exp\{-(\delta_p - 2\varepsilon)|u_p|\}, \quad u_p \in [C'_{p,k} \cup C''_{p,k}] \cap [P''_{p,k} \cup P'''_{p,k}],$$
$$k \geqslant k_3. \tag{17}$$

На основании неравенств (15) — (17) заключаем, что для всех $u_p \in \Gamma'_{p,k} \cup \cup C'_{p,k} \cup C''_{p,k}$ и $z_p \in E_p$ имеем

$$|\exp(z_p u_p)|/|\varphi_p(u_p)| < \exp\{-(\delta_p - 2\varepsilon)|u_p|\}, \quad k \geqslant k_4. \tag{18}$$

Наконец, отметим, что если $\lambda_p \in D'_{p,k}$, $u_p \in l'_{p,k}$, или $\lambda_p \in D''_{p,k}$, $u_p \in l''_{p,k}$, то

$$|u_p - \lambda_p| \geqslant \exp(-\varepsilon_k^{(p)} r_k^{(p)}), \quad k \geqslant 1. \tag{19}$$

Теперь, пользуясь неравенствами (18), (19) и условием б), которому удовлетворяют $l'_{p,k}$ и $l''_{p,k}$, получаем следующие оценки:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{l'_{p,k}} \left| \frac{\exp(u_p z_p)}{(u_p - \lambda_p)\varphi_p(u_p)} \right| |du_p| < \exp\{-(\delta_p - 3\varepsilon) r_k^{(p)}\},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{l''_{p,k}} \left| \frac{\exp(u_p z_p)}{(u_p - \lambda_p)\varphi_p(u_p)} \right| |du_p| < \exp\{-(\delta_p - 3\varepsilon) r_k^{(p)}\}, \quad z_p \in E_p, \quad k \geqslant k_5. \tag{20}$$

Осталось оценить $\exp(\lambda_p z_p)$ для $\lambda_p \in D'_{p,m}$ и $\lambda_p \in D''_{p,m}$. Положим $\lambda_p = r_p \exp(i\theta_p)$. Так как области $D'_{p,k}$ и $D''_{p,k}$ содержатся в угле $|\arg \lambda_p| < \theta_p^0$, то в силу неравенства (12) имеем

$$|\exp(\lambda_p z_p)| = \exp\{\operatorname{Re}(\lambda_p z_p)\} \leqslant \exp\{K_p^0(-\theta_p) r_p\} \leqslant \exp\{(h_p(\theta_p) - \delta_p) r_p\},$$
$$|\theta_p| < \theta_p^0, \quad z_p \in E_p, \tag{21}$$

откуда для $\lambda_p \in D''_{p,k}$

$$|\exp(\lambda_p z_p)| < \exp\{h_p(\theta_p) r_p - (\delta_p - \varepsilon) r_k^{(p)}\}/(1 + r_p^{\alpha_p}), \quad k \geqslant k_6. \tag{22}$$

Следовательно, функция $\exp(\lambda_p z_p)$ для $\lambda_p \in D'_{p,k}$ оценивается неравенством (21), а для $\lambda_p \in D''_{p,k}$ — неравенством (22). Из соотношений (8) — (11), учитывая (20), (21), (22) и условие (1), получаем

$$|\Phi_{m,n}| < \exp\{h_1(\theta_1) r_1 + (h_2(\theta_2) - \delta_2) r_2 - (\delta_1 - 3\varepsilon) r_m^{(1)}\}/(1 + r_1^{\alpha_1}) +$$
$$+ \exp\{h_2(\theta_2) r_2 + (h_1(\theta_1) - \delta_1) r_1 - (\delta_2 - 3\varepsilon) r_n^{(2)}\}/(1 + r_2^{\alpha_2}) + \exp\{h_1(\theta_1) r_1 +$$
$$+ h_2(\theta_2) r_2 - (\delta_1 - 3\varepsilon) r_m^{(1)}\}/(1 + r_1^{\alpha_1})(1 + r_2^{\alpha_2}), \quad \lambda_1 \in D'_{1,m}, \quad \lambda_2 \in D'_{2,n},$$

$$|\Phi_{m,n}| < \exp\{(h_1(\theta_1) - \delta_1) r_1 + h_2(\theta_2) r_2 - (\delta_2 - 3\varepsilon) r_n^{(2)}\}/(1 + r_2^{\alpha_2}) +$$
$$+ \exp\{h_1(\theta_1) r_1 + h_2(\theta_2) r_2 - (\delta_1 - 3\varepsilon) r_m^{(1)}\}/(1 + r_1^{\alpha_1}) + \exp\{(h_1(\theta_1) - \delta_1) r_1 +$$
$$+ h_2(\theta_2) r_2 - (\delta_2 - 3\varepsilon) r_n^{(2)}\}/(1 + r_2^{\alpha_2}), \quad \lambda_1 \in D'_{1,m}, \quad \lambda_2 \in D''_{2,n},$$

$$|\Phi_{m,n}| < \exp\{h_1(\theta_1)r_1 + (h_2(\theta_2) - \delta_2)r_2 - (\delta_1 - 3\varepsilon)r_m^{(1)}\}/(1 + r_1^{\alpha_1}) +$$
$$+ \exp\{h_1(\theta_1)r_1 + h_2(\theta_2)r_2 - (\delta_1 - 3\varepsilon)r_m^{(1)}\}/(1 + r_1^{\alpha_1})(1 + r_2^{\alpha_2}) + \exp\{h_1(\theta_1)r_1 +$$
$$+ (h_2(\theta_2) - \delta_2)r_2 - (\delta_1 - 3\varepsilon)r_m^{(1)}\}/(1 + r_1^{\alpha_1}), \quad \lambda_1 \in D''_{1,m}, \quad \lambda_2 \in D'_{2,n},$$
$$|\Phi_{m,n}| < \exp\{h_1(\theta_1)r_1 + h_2(\theta_2)r_2 - (\delta_1 - 3\varepsilon)r_m^{(1)}\}/(1 + r_1^{\alpha_1})(1 + r_2^{\alpha_2}) +$$
$$+ \exp\{h_1(\theta_1)r_1 + (h_2(\theta_2) - \delta_2)r_2 - (\delta_1 - 3\varepsilon)r_m^{(1)}\}/(1 + r_1^{\alpha_1}),$$
$$\lambda_1 \in D''_{1,m}, \quad \lambda_2 \in D''_{2,n}.$$

При этом учтено, что $\exp\{-(\delta_p - 3\varepsilon)r_k^{(p)}\} \leqslant 1$, так как $\varepsilon > 0$ — произвольно малое.

На основании последних четырех неравенств при $|\arg\lambda_1| < \theta_1^0$, $|\arg\lambda_2| < \theta_2^0$ окончательно имеем

$$|\Phi_{m,n}| < C_1 [\exp\{h_1(\theta_1)r_1 + (h_2(\theta_2) - \delta_2)r_2 - (\delta_1 - 3\varepsilon)r_m^{(1)}\}/(1 + r_1^{\alpha_1}) +$$
$$+ \exp\{h_2(\theta_2)r_2 + (h_1(\theta_1) - \delta_1)r_1 - (\delta_2 - 3\varepsilon)r_n^{(2)}\}/(1 + r_2^{\alpha_2}) + \exp\{h_1(\theta_1)r_1 +$$
$$+ h_2(\theta_2)r_2 - (\delta_1 - 3\varepsilon)r_m^{(1)}\}/(1 + r_1^{\alpha_1})(1 + r_2^{\alpha_2}) + \exp\{h_1(\theta_1)r_1 + h_2(\theta_2)r_2 -$$
$$- (\delta_2 - 3\varepsilon)r_n^{(2)}\}/(1 + r_1^{\alpha_1})(1 + r_2^{\alpha_2})], \quad (z_1, z_2) \in E, \quad m, n \geqslant 1.$$

Из этой оценки вытекает, что функция $\gamma_{m,n}(z_1, z_2, t_1, t_2)$, которая определяется через функцию $\Phi_{m,n}(z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2)$ по формуле

$$\gamma_{m,n}(z_1, z_2, t_1, t_2) = \int\limits_0^{\infty\exp(i\theta_1)} \int\limits_0^{\infty\exp(i\theta_2)} \Phi_{m,n}(z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2)\exp(-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2)\,d\lambda_1 d\lambda_2,$$

как функция от переменных t_1, t_2 аналитична при $t_1 \notin \bar{D}_1$, $t_2 \notin \bar{D}_2$ и непрерывны при $t_1 \notin D_1$, $t_2 \notin D_2$ и, кроме того,

$$|\gamma_{m,n}(z_1, z_2, t_1, t_2)| < C_2 [\exp\{-(\delta_1 - 3\varepsilon)r_m^{(1)}\} + \exp\{-(\delta_2 - 3\varepsilon)r_n^{(2)}\}],$$
$$m, n \geqslant 1, \quad (z_1, z_2) \in E.$$

Отсюда на основании формулы (6) и условия (2) заключаем, что

$$\left| f(z_1, z_2) - \sum_{(\lambda_k^{(1)}, \lambda_\nu^{(2)}) \in D_{m,n}} d_{k,\nu} \exp(\lambda_k^{(1)} z_1 + \lambda_\nu^{(2)} z_2) \right| < C [\exp(-\delta_0' r_m^{(1)}) +$$
$$+ \exp(-\delta_0'' r_n^{(2)})],$$

где постоянные C, δ_0' и δ_0'' зависят только от компакта E. Правая часть здесь при $m, n \to \infty$ стремится к нулю, следовательно, ряд (3) сходится на каждом компакте области D равномерно.

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М. : Наука, 1976.— 536 с.
2. *Громов В. П.* О представлении целых функций двух комплексных переменных функциональными рядами типа рядов Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1969.— **33**, № 1.— С. 163—173.
3. *Леонтьев А. Ф.* О представлении целых функций многих переменных рядами Дирихле // Мат. сб.— 1972.— **89**.— С. 586—598.
4. *Леонтьев А. Ф.* К вопросу о представлении аналитических функций в бесконечной выпуклой области рядами Дирихле // Докл. АН СССР.— 1975.— **225**, № 1.— С. 1013—1015.
5. *Моржаков В. В.* Абсолютно представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций многих комплексных переменных. — Ростов н/Д, 1980. — 30 с. — Деп. в ВИНИТИ, № 245-81.

Азерб. пед. ин-т

Получено 12.08.85