УДК 519.21

*Д. В. Гусак, А. И. Турениязова*

# О решетчатых полунепрерывных пуассоновских процессах на цепи Маркова

Рассмотрим двухмерный марковский процесс $\{\xi(t), x(t)\}$ $(t \geqslant 0)$, где $x(t)$ — конечная регулярная цепь Маркова со значениями $k = 1, 2, \ldots, n$ и производящей матрицей $\mathbf{Q} = \mathbf{N}[\mathbf{P} - \mathrm{I}]$, $\xi(t)$ — пуассоновский процесс, заданный на цепи $x(t)$, со значениями из $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, матричная производящая функция которого имеет вид

$$\mathbf{\Phi}_t(u) = \| M[u^{\xi(t)}, x(t) = r \mid x(0) = k] \| = \| M_{kr}[u^{\xi(t)}] \| = \exp\{t\mathbf{\Psi}(u)\},$$

где $\mathbf{\Psi}(u) = \mathbf{\Lambda}(\tilde{\mathbf{P}}(u) - \mathrm{I}) + \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{F}}(u) - \mathrm{I})$, $\mathbf{\Psi}(1) = \mathbf{Q}$, $\mathbf{\Lambda} = \| \delta_{kr}\lambda_k \|$, $\mathbf{N} = \|\delta_{kr}n_k\|$, $k = 1, 2, \ldots n$, а $\tilde{\mathbf{F}}(u)$, $\tilde{\mathbf{P}}(u)$ — производящие матрицы для соответствующих распределений $\mathbf{F}(m) = \| p_{kr}P\{\chi_{kr} = m\} \|$, $\mathbf{P}(m) = \| \delta_{kr}P\{\xi_k = m\} \|$.

Для сокращения записи интегральных преобразований введем показательно-распределенную случайную величину $\theta_s$, $s > 0$. Тогда

$$\mathbf{P}_m(s) = s\int\limits_0^\infty e^{-st} \| P_{kr}\{\xi(t) = m\} \| dt = \| P_{kr}\{\xi(\theta_s) = m\} \|, \quad \mathbf{P}(s, m) =$$

$$= \| P_{kr}\{\xi(\theta_s) \leqslant m\} \|, \quad \mathbf{\Phi}(s, u) = \| M_{kr}[u^{\xi(\theta_s)}] \| = s(s\mathrm{I} - \mathbf{\Psi}(u))^{-1}.$$

Введем еще обозначения $\xi^+(t) = \sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u)$, $\xi^-(t) = \inf\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u)$, $\tau_m^- = \inf\{t : \xi(t) = -m\}$, $\tau_m^+ = \inf\{t : \xi(t) = m\}$, $m \geqslant 0$. Как и для процессов с непрерывно распределенными скачками [1] в рассматриваемом случае имеет место факторизационное разложение (матричный аналог тождества безгранично делимой факторизации) при $|u| = 1$

$$\mathbf{\Phi}(s, u) = \begin{cases} \mathbf{\Phi}_+(s, u)\,\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{\Phi}^-(s, u), \\ \mathbf{\Phi}_-(s, u)\,\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{\Phi}^+(s, u), \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{\Phi}_\pm(s, u) = \mathbf{M}u^{\xi^\pm(\theta_s)}$, $\mathbf{\Phi}^\mp(s, u) = \mathbf{M}u^{\xi(\theta_s) - \xi^\pm(\theta_s)}$, $\mathbf{P}_s = s(s\mathrm{I} - \mathbf{Q})^{-1}$, $\mathbf{\Phi}_\pm$, $\mathbf{\Phi}_\mp$ аналитичны соответственно при $|u| < 1$, $|u| > 1$.

Граничные задачи для полунепрерывных процессов на цепи Маркова изучались в работах [1—6] в основном для нерешетчатого случая. Решетчатый случай рассматривался в [7] (когда матрица является якобиевой). Нас будут интересовать полунепрерывные пуассоновские процессы на цепи с решетчатым распределением скачков, а также некоторые граничные функционалы этих процессов. Будем предполагать, что распределение скачков $\{\chi_{kr}\}$ и $\{\xi_k\}$ сосредоточено в точках $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$, причем вероятности $P(\xi_k = -1\}$, $k = \overline{1, n}$, строго положительны. Такие процессы назовем непрерывными снизу, или полунепрерывными.

В силу непрерывности снизу компоненты $\xi(t)$ функционал $\tau_m^-$ является однородным по $m$ процессом с независимыми приращениями на вложенной цепи $y_m = x(\tau_m^-)$. Поэтому для матрицы

$$\mathbf{T}(s, m) = \| M[e^{-s\tau_m^-}, \quad y_m = r \,|\, y_0 = k] \| = \|M_{kr}[e^{-s\tau_m^-}, \tau_m^- < \infty] \| = \mathbf{M}e^{-s\tau_m^-}$$

выполняется соотношение $\mathbf{T}(s, m + k) = \mathbf{T}(s, m)\,\mathbf{T}(s, k)$, $m, k \geqslant 0$. Отсюда следует

$$\mathbf{T}(s, m) = \exp\{-m\mathbf{Q}(s)\}, \quad m \geqslant 0, \tag{2}$$

где матрица $\mathbf{Q}(s)$ выражается через распределение отрицательных значений $\xi(\theta_s)$ (см. соотношение (10)).

Теорема 1. *Для процесса* $\{\xi(t), x(t)\}$ *с кумулянтой*

$$\mathbf{\Psi}(u) = \sum_{m=-1}^{\infty}(u^m - 1)[\mathbf{\Lambda P}(m) + \mathbf{NF}(m)] + \mathbf{Q} \tag{3}$$

*компоненты второго разложения в* (1) *представимы в виде*

$$\mathbf{\Phi}_-(s, u) = \mathbf{M}u^{\xi^-(\theta_s)} = u[\mathrm{I} + \mathbf{P}(s, 0)\mathbf{P}_0^{-1}(s)(u-1)]^{-1}\mathbf{P}_s, \tag{4}$$

$$\mathbf{\Phi}^+(s, u) = \mathbf{M}u^{\xi(\theta_s)-\xi^-(\theta_s)} = \{\mathbf{P}(s, 0)\mathbf{P}_0^{-1}(s) + u^{-1}[\mathrm{I} - \mathbf{P}(s, 0)\mathbf{P}_0^{-1}(s)]\}\mathbf{\Phi}(s, u), \tag{5}$$

*а соответствующие им распределения* $\xi^-(\theta_s)$ *и* $\hat{\xi}^+(\theta_s) = \xi(\theta_s) - \xi^-(\theta_s)$ *имеют вид*

$$\mathbf{P}_s^-(m) = e^{m\mathbf{Q}(s)}(\mathrm{I} - e^{-\mathbf{Q}(s)})\mathbf{P}_s, \quad m \leqslant 0, \tag{6}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_s^+(m) = \mathbf{P}(s, 0)\mathbf{P}_0^{-1}(s)\mathbf{P}_m(s) + [\mathrm{I} - \mathbf{P}(s, 0)\mathbf{P}_0^{-1}(s)]\mathbf{P}_{m+1}(s), \quad m \geqslant 0. \tag{7}$$

Доказательство. Заметим, что $\tau_m^-$ и $\xi^-(\theta_s)$ связаны соотношением $P_{kr}\{\xi^-(t) \leqslant -m\} = \sum_{j=1}^{n}\int_0^t P_{kj}\{\tau_m^- \in du\}P\{x(t) = r \mid x(u) = j\}$ После интегрального преобразования по $t$ находим

$$\mathbf{P}_-(s, -m) = \|P_{kr}\{\xi^-(\theta_s) \leqslant -m\}\| = \mathbf{M}[e^{-s\tau_m^-}, \tau_m^- < \infty]\mathbf{P}_s = \\ = e^{-m\mathbf{Q}(s)}\mathbf{P}_s, \quad m \geqslant 0. \tag{8}$$

С другой стороны, при $m \leqslant 0$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P}_m(s) = \|P_{kr}\{\xi(\theta_s) = m\}\| = \mathbf{T}(s, m)\mathbf{P}_s, \quad m \leqslant 0, \tag{9}$$

вытекающее из очевидного представления

$$P_{kr}\{\xi(t) = m\} = \int_0^t \sum_{j=1}^{n} P\{\tau_m^- \in du\}P_{jr}\{\xi(t-u) = 0\}.$$

Из соотношений (2) и (9) получаем $\mathbf{P}(s, 0) = (\mathrm{I} - e^{-\mathbf{Q}(s)})^{-1}\mathbf{P}_0(s)$. Отсюда связь матрицы $\mathbf{Q}(s)$ с распределением $\xi(\theta_s)$ выражается соотношением

$$\mathrm{I} - e^{-\mathbf{Q}(s)} = \mathbf{P}_0(s)\mathbf{P}^{-1}(s, 0). \tag{10}$$

С помощью распределения (8) находим $\|P_{kr}\{\xi^-(\theta_s) = m\}\| = e^{-|m|\mathbf{Q}(s)}(\mathrm{I} - e^{-\mathbf{Q}(s)})\mathbf{P}_s$, т. е. $|\xi^-(\theta_s)|$ имеет матричную форму (6) геометрического распределения со знаменателем $\exp\{-\mathbf{Q}(s)\}$. Заметим, что при $s = 0$ $\exp\{-\mathbf{Q}(0)\}$ является хотя бы подстохастической матрицей. Следовательно,

$$\mathbf{\Phi}_-(s, u) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m\mathbf{Q}(s)}u^{-m}(\mathrm{I} - e^{-\mathbf{Q}(s)})\mathbf{P}_s = (\mathrm{I} - u^{-1}e^{-\mathbf{Q}(s)})^{-1}(\mathrm{I} - e^{-\mathbf{Q}(s)})\mathbf{P}_s. \tag{11}$$

После подстановки (10) в соотношение (11) нетрудно получить формулу (4) для $\mathbf{\Phi}_-(s, u)$.

Из факторизационного разложения (1) и формулы (4) следует

$$\mathbf{\Phi}^+(s, u) = \mathbf{P}_s\mathbf{\Phi}_-^{-1}(s, u)\mathbf{\Phi}(s, u) = \{\mathbf{P}(s, 0)\mathbf{P}_0^{-1}(s) + \\ + u^{-1}[\mathrm{I} - \mathbf{P}(s, 0)\mathbf{P}_0^{-1}(s)]\}\mathbf{\Phi}(s, u).$$

Таким образом, соотношение (5) установлено. Его можно обратить по $u$. Для этого применим операцию проектирования $\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k u^k\right]_+^0 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u^k$ к правой части (5). В результате проектирования и обращения по $u$ получаем распределения для $\hat{\xi}^{+}(\theta_s) = \xi(\theta_s) - \xi^{-}(\theta_s)$ (см. (7)). Соотношения (6), (7) определяют формулы обращения по $u$ компонент факторизации $\mathbf{\Phi}_{-}(s, u)$ и $\mathbf{\Phi}^{+}(s, u)$. Если учесть соотношение (1), то распределение $\mathbf{P}_m(s)$ можно представить сверткой $\hat{\mathbf{P}}_s^{+}(m)$, $m \geqslant 0$, и $\mathbf{A}_s^{-}(m) = (\mathrm{I} - e^{-\mathbf{Q}(s)})\, e^{-m\mathbf{Q}(s)}$, $m \leqslant 0$.

В силу предполагаемой эргодичности цепи $x(t)$ существует стационарное распределение $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\}$. Поэтому существует предел при $s \to 0$ $\mathbf{P}_0 = \lim\limits_{s\to 0} \mathbf{P}_s$, где $\mathbf{P}_0$ состоит из одинаковых строк, образуемых стационарными вероятностями. Если предположить, что

$$0 < |\mu_1^0| = \Big| \sum_{k=1}^{n} \pi_k \,[\lambda_k \mathbf{M}\xi_k + n_k \sum_{r \neq k} p_{kr} M\chi_{kr}] \Big| < \infty, \qquad (12)$$

то из результатов работы [8] следует существование предела

$$\lim_{u\to 1} (u - 1)\mathbf{\Psi}^{-1}(u) = \frac{1}{|\mu_1^0|}\,\mathbf{P}_0.$$

При условии (12) существует предел

$$\lim_{s\to 0} s^{-1}\mathbf{P}_m(s) = \mathbf{R}_m = \int_0^\infty \| P_{kr}\{\xi(t) = m\} \|\, dt, \quad m \geqslant 0.$$

Теорема 2. *Если для процесса с кумулянтой* (3) *выполнено условие*

$$-\infty < \mu_1^0 < 0, \qquad (13)$$

*то при $t \to \infty$ распределение $\xi^{-}(t)$ вырождается, а распределение $\hat{\xi}^{+}(t)$ стремится к невырожденному, совпадающему с пределом*

$$\lim_{s\to 0} \hat{\mathbf{P}}_s^{+}(m) = \mathbf{P}_0\mathbf{R}_0^{-1}[\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_{m+1}], \quad m \geqslant 0. \qquad (14)$$

*Производящая функция этого распределения имеет вид*

$$\mathbf{\Phi}^{+}(0, u) = \mathbf{P}_0\mathbf{R}_0^{-1}\mathbf{\Psi}^{-1}(u)\,(1 - u^{-1}). \qquad (15)$$

*Если выполнено условие*

$$0 < \mu_1^0 < \infty, \qquad (16)$$

*то при $t \to \infty$ распределение $\hat{\xi}^{+}(t)$ вырождается. а распределение $\xi^{-}(t)$ стремится к невырожденному распределению*

$$\mathbf{P}_0^{-}(m) = \lim_{t\to\infty} \| P_{kr}\{\xi^{-}(t) = m\} \| = e^{m\mathbf{Q}(0)}\mathbf{R}_0 \Big\| \int_0^\infty P_{kr}\{\xi(t) \leqslant 0\}\, dt \Big\|^{-1} \mathbf{P}_0 \qquad (17)$$

*с производящей функцией*

$$\mathbf{\Phi}_{-}(0, u) = u\Big[\mathrm{I} + \Big\| \int_0^\infty P_{kr}\{\xi(t) \leqslant 0\}\, dt \Big\| \mathbf{R}_0^{-1}(u - 1)\Big]^{-1}\mathbf{P}_0. \qquad (18)$$

Доказательство. При выполнении условия (13) для $y_m = x(\tau_m^{-})$

$$\lim_{s\to 0} \mathbf{T}(s, m) = \| P\{y_m = r \mid y_0 = k\} \| = \lim_{s\to 0} e^{-m\mathbf{Q}(s)} = e^{-m\mathbf{Q}(0)}.$$

Значение матрицы $\mathbf{Q}(0)$ определяет инфинитезимальную матрицу цепи и для нее выполняется соотношение $\mathbf{Q}(0)\,\mathbf{P}_0 = 0$. Следовательно,

$$\lim_{s\to 0} \mathbf{\Phi}_{-}(s, u) = \lim_{s\to 0} (\mathrm{I} - e^{-\mathbf{Q}(s)}u)^{-1}(\mathrm{I} - e^{-\mathbf{Q}(s)})\,\mathbf{P}_s = 0,$$

поэтому распределение $\xi^-(\theta_s)$ при $s \to 0$ становится вырожденным

$$\lim_{t\to\infty} \| P_{kr} \{\xi^-(t) > -\infty\} \| = \lim_{s\to 0} \| P_{kr}\{\xi^-(\theta_s) > -\infty\} \| = 0.$$

Для доказательства соотношений (14) и (15) следует учесть, что при малых значениях $s\ \mathbf{P}(s, 0) = \mathbf{P}_s + 0(1)$, если выполнено условие (13).

Таким образом, предельный переход при $s \to 0$ в соотношениях (5) и (17) приводит к формулам (14) и (15). Заметим, что функционалы $\xi^-(t)$ и $\hat{\xi}^+(t)$ обладают свойством монотонности по $t$, поэтому предельные значения их распределений при $t \to \infty$ совпадают с пределами их интегральных преобразований при $s \to 0$.

Доказательство соотношений (17) и (18) при условии (16) аналогично доказательству первой части теоремы 2.

Без особых затруднений можно доказать аналоги теорем 1 и 2 для компонент $\mathbf{\Phi}_+(s, u)$ и $\mathbf{\Phi}^-(s, u)$ (см. (10)), определяющих распределения случайных величин $\xi^+(\theta_s)$ и $\hat{\xi}^-(\theta_s) = \xi(\theta_s) - \xi^+(\theta_s)$. Эти результаты мы сформулируем без доказательства.

Т е о р е м а 3. *Компоненты первого факторизационного разложения в* (1) *представимы в виде*

$$\mathbf{\Phi}^-(s, u) = \mathbf{M}u^{\hat{\xi}^-(\theta_s)} = \mathbf{P}_s[\mathrm{I} + \mathbf{P}_0^{-1}(s)\,\mathbf{P}(s, 0)\,(u-1)]^{-1}u,$$

$$\mathbf{\Phi}_+(s, u) = \mathbf{M}u^{\xi^+(\theta_s)} = \mathbf{\Phi}(s, u)\{\mathbf{P}_0^{-1}(s)\,\mathbf{P}(s, 0) + u_0^{-1}[\mathrm{I} - \mathbf{P}_0^{-1}(s)\,\mathbf{P}(s, 0)]\}.$$

*Распределения* $\xi^+(\theta_s)$ и $\hat{\xi}^-(\theta_s)$ *имеют вид*

$$\mathbf{P}_s^+(m) = \mathbf{P}_m(s)\,\mathbf{P}_0^{-1}(s)\,\mathbf{P}(s, 0) + \mathbf{P}_{m+1}(s)\,[\mathrm{I} - \mathbf{P}_0^{-1}(s)\,\mathbf{P}(s, 0)], \quad m \geqslant 0, \tag{19}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_s^-(m) = \mathbf{P}_s e^{m\hat{\mathbf{Q}}(s)}\mathbf{P}^{-1}(s, 0)\,\mathbf{P}_0(s), \quad m \leqslant 0, \tag{20}$$

*где* $\hat{\mathbf{Q}}(s)$ *определяется соотношением*

$$\mathrm{I} - e^{-\hat{\mathbf{Q}}(s)} = \mathbf{P}^{-1}(s, 0)\,\mathbf{P}_0(s).$$

*Если выполнено условие* (13), *то предельное распределение* $\hat{\xi}^-(t)$, $t \to \infty$, *становится вырожденным, а распределение абсолютного максимума определяется производящей функцией*

$$\mathbf{\Phi}_+(0, u) = \mathbf{\Psi}^{-1}(u)\,\mathbf{R}_0^{-1}\mathbf{P}_0(1 - u^{-1}). \tag{21}$$

*Если выполнено условие* (16), *то распределение абсолютного максимума вырождено, а для* $\hat{\xi}^-(t)$, $t \to \infty$, *существует невырожденное распределение с производящей функцией*

$$\mathbf{\Phi}^-(0, u) = \mathbf{P}_0\Big[\mathrm{I} + \mathbf{R}_0^{-1}\Big\|\int_0^\infty P_{kr}\{\xi(t) \leqslant 0\}\,dt\Big\|(u-1)\Big]^{-1}u. \tag{22}$$

Остается заметить, что распределения с производящими функциями (21) и (22) легко обращаются по $u$. Результаты обращения можно получить также из формул (19) и (20) путем предельного перехода по $s \to 0$. Если $\mu_l^0 < 0$, то $\lim_{t\to\infty} \| P_{kr}\{\xi^+(t) = m\} \| = [\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_{m+1}]\,\mathbf{R}_0^{-1}\mathbf{P}_0$, $m \geqslant 0$. Если $\mu_1^0 > 0$, то $\lim_{t\to\infty} \| P_{kr}\{\hat{\xi}^-(t) = m\} \| = \mathbf{P}_0 e^{m\hat{\mathbf{Q}}(0)}(I - e^{-\hat{\mathbf{Q}}(0)})$, $m \leqslant 0$, при этом $\mathrm{I} - e^{-\hat{\mathbf{Q}}(0)} = \Big\|\int_0^\infty P_{kr}\{\xi(t) \leqslant 0\}\,dt\Big\|^{-1}\mathbf{R}_0$.

1. *Гусак Д. В.* Метод факторизации в граничных задачах для одного класса процессов на цепи Маркова. I.— Киев, 1978.— 64 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 78.6).

2. *Гусак Д. В.* Метод факторизации в граничных задачах для одного класса процессов на цепи Маркова. II.— Киев, 1978.— 60 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 78.11).
3. *Гусак Д. В.* Распределение абсолютного максимума пуассоновских и винеровских процессов на цепи Маркова // Trans. Seventh Prague Conf. 1974.— Prague : Academia Prague, 1977.— A.— P. 211—219.
4. *Могульский А. А.* Факторизационные тождества для процессов с независимыми приращениями, заданных на конечной цепи Маркова // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1974.— Вып. 11.— С. 86—96.
5. *Королюк В. С., Шуренков В. М.* Метод потенциала в граничных задачах для случайных блужданий на цепи Маркова // Укр. мат. журн.— 1977.— **29**, № 4.— С. 464—471.
6. *Арндт К.* Об отыскании в явном виде распределения супремума случайного блуждания на цепи Маркова // Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы.— Новосибирск : Наука, 1982.— С. 139—146.
7. *Алиев Т. М., Ежов И. И.* Управляемые пуассоновские процессы с границами и их применение.— Киев, 1976.— 30 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 796-76 Деп.
8. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1976.— 182 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 26.09.86,
после доработки — 21.11.86

УДК 517.5

*Г. И. Ибрагимов*

# О представлении аналитических функций двух переменных в произведении бесконечных выпуклых областей рядами Дирихле

А. Ф. Леонтьев (см., например, [1]) получил представление аналитических функций рядами Дирихле во всей плоскости и полуплоскости. В работах [2, 3] дано представление целых функций многих переменных во всем пространстве рядами Дирихле.

В работе [4] доказано, что любую аналитическую функцию в произвольной бесконечной выпуклой области $D$, отличной от всей плоскости и непрерывной в замкнутой области $\overline{D}$, можно представить в $D$ рядом Дирихле, сходящимся на каждом компакте равномерно. В [5] показано, что любую функцию, аналитическую в выпуклой области пространства $\overline{C}^n$, можно разложить в этой области в ряд Дирихле (без указания формул для коэффициентов).

В данной работе рассматривается представление аналитических функций двух переменных рядами Дирихле в декартовом произведении бесконечных выпуклых областей, отличных от всей плоскости, непрерывных в замкнутой области и удовлетворяющих некоторому дополнительному условию, причем приводятся явные формулы для коэффициентов ряда Дирихле.

Сформулируем основной результат.

Пусть $D_p$, $p = 1, 2$,— бесконечная выпуклая область в плоскости $z_p$. Не уменьшая общности, можно предположить, что $0 \in D_p$, $(-\infty, 0] \subset D_p$. Будем считать, что если $l_{\theta_p}: x_p \cos\theta_p + y_p \sin\theta_p = K_p(\theta_p)$—опорная прямая области $D_p$, то $-\theta_p^0 < \theta_p < \theta_p^0$, $0 < \theta_p^0 \leqslant \pi/2$. Если $\partial D_p$ — граница области $D_p$, начиная с некоторой точки совпадает с прямой $l_{\theta_p}$, то угол $\theta_p$ может быть равен $\theta_p^0$. В аналогичной ситуации может быть $\theta_p = -\theta_p^0$. В случае, когда $D_p$ представляет собой полуплоскость, $\theta_p = \theta_p^0 = 0$.

Положим $h_p(\theta_p) = K_p(-\theta_p)$. Пусть целая функция $\varphi_p(\lambda)$ имеет простые нули $\lambda_k^{(p)}$, $k \geqslant 1$, и удовлетворяет условию

$$|\varphi_p(r \exp(i\theta_p))| < C \exp\{h_p(\theta_p) r\}/(1 + r^{\alpha_p}), \quad \alpha_p > 1, \quad -\theta_p^0 < \theta_p < \theta_p^0. \tag{1}$$