УДК 517.5

Т. Г. Алиев, П. М. Тамразов

Контурно-телесные теоремы для мероморфных функций с учетом нулей и неоднолистности

Настоящая работа посвящена усилению и обобщению некоторых контурно-телесных результатов, полученных в [1—8].

Приведем ряд определений, обозначений и понятий из работы [4].

Пусть $\mathfrak{M}$ — класс всех функций $\mu:(0,+\infty)\to[0,+\infty)$, для каждой из которых множество $I_\mu=\{x:\mu(x)>0\}$ связно и сужение функции $\log\mu(x)$ на I_μ вогнуто относительно $\log x$. Пусть $\mathfrak{M}^*$ — класс всех $\mu\in\mathfrak{M}$, для которых I_μ не пусто. Для $\mu\in\mathfrak{M}^*$ через x_μ^- и x_μ^+ обозначим соответственно левый и правый концы промежутка, которым является множество I_μ (в частности, оно может выродиться в точку). Очевидно, $0\leqslant x_\mu^-\leqslant x_\mu^+\leqslant\leqslant+\infty$. Функции μ будем называть мажорантами.

Для каждой функции $\mu\in\mathfrak{M}^*$ существуют пределы $\mu_0=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log\mu(x)}{\log x}$, $\mu_\infty=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log\mu(x)}{\log x}$, причем

$$-\infty<\mu_0\leqslant+\infty,\quad -\infty\leqslant\mu_\infty<+\infty,\quad \mu_0\geqslant\mu_\infty. \tag{1}$$

Если $\mu\equiv0$, то в качестве μ_0 и μ_∞ могут быть приняты любые конечные числа, удовлетворяющие условиям (1).

Определим при $\mu_0<+\infty$ целое m_0 условиями $m_0-1<\mu_0\leqslant m_0$, а при $\mu_\infty>-\infty$ целое m_∞ условиями $m_\infty\leqslant\mu_\infty<m_\infty+1$.

Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ — одноточечная компактификация комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Для множества $E\subset\overline{\mathbb{C}}$ через $\overline{\partial E}$ обозначим границу E в $\overline{\mathbb{C}}$ и положим $\partial E=\mathbb{C}\cap\overline{\partial E}$, $\bar{E}=E\cup\partial E$, $\overline{E}=E\cup\overline{\partial E}$.

Для открытого множества $G\subset\overline{\mathbb{C}}$ и заданной в нем функции f определим величину

$$f_{\infty,G}=\begin{cases}\varlimsup\limits_{\zeta\to\infty,\zeta\in G\setminus\{\infty\}}\dfrac{\log|f(\zeta)|}{\log|\zeta|} & \text{при } z=\infty\in\overline{G},\\ 0 \text{ при } z=\infty\notin\overline{G},\end{cases}$$

а если к тому же $z\in\mathbb{C}$, то введем также величину

$$f_{z,G}=\begin{cases}\varlimsup\limits_{\zeta\to z,\zeta\in G\setminus\{z\}}\dfrac{\log|f(\zeta)|}{|\log|\zeta-z||} & \text{при } z\in\overline{G},\\ 0 \text{ при } z\notin\overline{G}.\end{cases}$$

Если f — мероморфная в G функция, то через $k(f,w)$ обозначим кратность ее значения $f(w)$ в точке $w\in G$.

Для $z\in\overline{\mathbb{C}}$ и рассматриваемых G, μ, f определим величины $s(z,f(\cdot))=$

$= s(z, f(\cdot), G, \mu)$ следующими условиями:

$$s(z, f(\cdot)) = \begin{cases} \left(\dfrac{f(\cdot)}{\mu(|\cdot - z|)}\right)_{z,G} & \text{при } x_\mu^- = 0, z \in \mathbb{C}, \\ 0 \text{ при } x_\mu^- > 0, & z \in \mathbb{C}, \end{cases}$$

$$s(\infty, f(\cdot)) = \begin{cases} \left(\dfrac{f(\cdot)}{\mu(|\cdot|)}\right)_{\infty,G} & \text{при } x_\mu^+ = +\infty, \\ 0 \text{ при } x_\mu^+ < +\infty, \end{cases}$$

если $\mu \in \mathfrak{M}^*$. А если $\mu \equiv 0$, то полагаем $s(z, f(\cdot)) = 0$ для любого $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

Для $\mu \in \mathfrak{M}^*$ верно следующее: если $\mu_0 \neq +\infty$ и $z \in \mathbb{C}$, то $s(z, f(\cdot)) = f_{z,G} + \mu_0$, а если $\mu_\infty \neq -\infty$, то $s(\infty, f(\cdot)) = f_{\infty,G} - \mu_\infty$.

Пусть G — открытое множество в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с границей ненулевой логарифмической емкости, $g_G(w, \zeta)$ — его обобщенная функция Грина ($w, \zeta \in G$) (в частности, если w, ζ принадлежат разным связным компонентам множества G, то принимается $g_G(w, \zeta) = 0$ [9, с. 121]).

Пусть $r > 0$. Для $w \in \mathbb{C}$ через $g_r(w, \zeta)$ обозначим обобщенную функцию Грина множества $G \cup \{\zeta : |\zeta - w| < r\}$, а через $g_r(\infty, \zeta)$ — обобщенную функцию Грина множества $G \cup \{\zeta : 1/r < |\zeta| \leqslant +\infty\}$.

При любом $w \in \overline{\mathbb{C}}$ существует предельная функция $\lim\limits_{r \to 0} g_r(w, \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{g}_G(w, \zeta)$, $\zeta \in G$, гармоническая по $\zeta \in G$, неотрицательная и играющая роль функции Грина с полюсом в точке w [10, с. 285 — 298].

Примем следующие правила раскрытия возможных неопределенных выражений: $0 \cdot (\pm\infty) = 0$. Авторами доказаны следующие результаты, являющиеся усилением теорем 1—3, 6 работы [7].

Теорема 1. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ — фиксированная точка, $G \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$ — открытое множество с границей ненулевой логарифмической емкости; $\mu \in \mathfrak{M}$, $f : G \to \overline{\mathbb{C}}$ — мероморфная функция с конечным числом полюсов, причем $p_1, \ldots, p_N$ — все ее разные полюсы (выписанные без учета кратности).*

Пусть f ограничена на всякой части G, отделимой от точек a, $z = \infty$ и $p_1, \ldots, p_N$, удовлетворяет условиям

$$f_{a,G} < +\infty, \tag{2}$$

$$f_{\infty,G} < +\infty, \tag{3}$$

$$\varlimsup_{\zeta \to z, \zeta \in G} |f(\zeta)| \leqslant \mu(|z - a|) \quad \forall z \in (\partial G) \setminus \{a\}. \tag{4}$$

Если a (аналогично $z = \infty$) является изолированной граничной точкой для G, то дополнительно предположим, что

$$\mu_0 < +\infty, \quad f(\zeta) = o(|\zeta - a|^{m_0 - 1}), \quad \zeta \to a, \tag{5}$$

(или

$$\mu_\infty > -\infty, \; f(\zeta) = o(|\zeta|^{m_\infty + 1}), \quad \zeta \to \infty, \tag{6}$$

соответственно). Тогда

$$|f(\zeta)| \leqslant \mu(|\zeta - a|) \exp\Big[\sum_{\nu=1}^{N} g_G(p_\nu, \zeta)\, k(f, p_\nu) - \sum_{w : f(w) = 0} g_G(w, \zeta)\, k(f, w) +$$

$$+ \overline{g}_G(a, \zeta) \cdot s(a, f(\cdot)) + \overline{g}_G(\infty, \zeta)\, s(\infty, f(\cdot))\Big] \quad \forall \zeta \in G \setminus \{p_1, \ldots, p_N\}. \tag{7}$$

Замечание. Величины $\overline{g}_G(a, \zeta) \cdot s(a, f(\cdot))$, $\overline{g}_G(\infty, \zeta)\, s(\infty, f(\cdot))$ неположительны, и потому оценка (7), вообще говоря, точнее соответствующей оценки (7) из [7], не учитывающей этих величин. Аналогичное замечание справедливо и по отношению к остальным результатам работы.

Теорема 2. *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — открытое множество с границей ненулевой логарифмической емкости; $\mu \in \mathfrak{M}$, причем $\mu_0 \leqslant 1$; $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ —*

непрерывная функция, голоморфная в G и удовлетворяющая условиям (3) *и*

$$|f(\zeta)-f(z)|\leqslant\mu(|\zeta-z|)\quad\forall\zeta,z\in\partial G,\quad\zeta\neq z. \tag{8}$$

Если точка $z=\infty$ является изолированной граничной точкой множества G (на $\overline{\mathbb{C}}$), то дополнительно предположим, что выполнено (6) *и* $\mu_\infty\geqslant 0$. *Тогда*

$$|f(\zeta)-f(z)|\leqslant\mu(|z-\zeta|)\exp\Big[-\sum_{\substack{w\in G\\ f(w)=f(z)}}g_G(w,\zeta)\,k(f,w)+\overline{g}_G(z,\zeta)\times$$
$$\times((f(\cdot)-f(z))_{z,G}+\mu_0)+\overline{g}_G(\infty,\zeta)\,s(\infty,f(\cdot)-f(z))\Big]\quad\forall\zeta\in G,\quad\forall z\in\partial G, \tag{9}$$

$$|f(z)-f(\zeta)|\leqslant\mu(|z-\zeta|)\exp\Big[-\sum_{\substack{w\in G\\ f(w)=f(z)}}g_G(w,\zeta)\,k(f,w)+$$
$$+g_G(z,\zeta)\,\mu_0+\overline{g}_G(\infty,\zeta)\,s(\infty,f(\cdot)-f(z))\Big]\quad\forall z,\zeta\in G,\quad z\neq\zeta. \tag{10}$$

Теорема 3. *Пусть $G\subset\mathbb{C}$ — открытое множество с границей ненулевой логарифмической емкости;* $\mu\in\mathfrak{M}$, *причем* $\mu_0\leqslant 1$; $f:\overline{G}\to\overline{\mathbb{C}}$ — *(обобщенно) непрерывное отображение, мероморфное в G, все разные полюсы которого пробегают множество P, и пусть выполнены условия* (3), (8) *и*

$$f(z)\neq\infty\quad\forall z\in\partial G. \tag{11}$$

Если точка $z=\infty$ является изолированной граничной точкой множества G (на $\overline{\mathbb{C}}$), то дополнительно предположим, что выполнено (6) *и* $\mu_\infty\geqslant 0$. *Тогда*

$$|f(\zeta)-f(z)|\exp\Big[-\sum_{p\in P}(g_G(p,\zeta)+g_G(p,z))\,k(f,p)\Big]\leqslant\mu(|\zeta-z|)\times$$
$$\times\exp\Big[-\sum_{\substack{w\in G\\ f(w)=f(z)}}\overline{g}_G(w,\zeta)\,k(f,w)+\overline{g}_G(z\ \zeta)((f(\cdot)-f(z))_{z,G}+\mu_0)+$$
$$+\overline{g}_G(\infty,\zeta)\,s(\infty,f(\cdot)-f(z))\Big]\quad\forall\zeta\in G\diagdown P,\ \forall z\in\partial G, \tag{12}$$

$$|f(\zeta)-f(z)|\exp\Big[-\sum_{p\in P}(g_G(p,\zeta)+g_G(p,z))\,k(f,p)\Big]\leqslant\mu(|\zeta-z|)\times$$
$$\times\exp\Big[-\sum_{\substack{w\in G\\ f(w)=f(z)}}g_G(w,\zeta)\,k(f,w)+g_G(z,\zeta)\,\mu_0+s(\infty,f(\cdot)-f(z))\,g_G(\infty,\zeta)\Big]$$
$$\forall z,\zeta\in G\diagdown P,\quad z\neq\zeta. \tag{13}$$

Через $\mathfrak{N}_*$ обозначим класс всех множеств $E\subset\overline{\mathbb{C}}$ нулевой внутренней логарифмической емкости (имеется в виду, что всякая компактная в $\mathbb{C}$ порция E имеет нулевую внутреннюю логарифмическую емкость).

Следующий локальный результат обобщает теорему 1.

Теорема 4. *Пусть $a\in\mathbb{C}$ — фиксированная точка: $G\subset\mathbb{C}\diagdown\{a\}$ — открытое множество с границей положительной логарифмической емкости; U — некоторая окрестность точек a и $z=\infty$; $Q\subset\overline{\mathbb{C}}\diagdown G$ — множество, содержащее точки a и $z=\infty$, $Q\in\mathfrak{N}_*$; $\mu\in\mathfrak{M}$; $f:G\to\overline{\mathbb{C}}$ — мероморфная функция, все разные полюсы которой пробегают множество P, и пусть выполнены условия* (2), (3) *и*

$$\varlimsup_{\zeta\to z,\,\zeta\in G}|f(\zeta)|\exp\Big[-\sum_{p\in P_1}g_G(p,\zeta)\,k(f,p)\Big]<+\infty\ \forall z\in(\partial G)\diagdown\{a\}, \tag{14}$$

$$\varlimsup_{\zeta\to z,\,\zeta\in G}|f(\zeta)|\exp\Big[-\sum_{p\in P_2}g_G(p,\zeta)\,k(f,p)\Big]\leqslant\mu(|z-a|)\quad\forall z\in(\partial G)\diagdown Q, \tag{15}$$

$$\varlimsup_{\zeta\to z,\,\zeta\in G}|f(\zeta)|\leqslant\mu(|z-a|)\quad\forall z\in U\cap[(\partial G)\diagdown Q], \tag{16}$$

в которых суммы берутся по каким-нибудь (в частности, пустым) подмножествам P_s множества P. Если a (аналогично $z=\infty$) является внутренней точкой множества $G\cup Q$, то дополнительно предположим, что выполнено (5) (*соответственно* (6)). *Тогда*

$$|f(\zeta)|\exp\Big[-\sum_{p\in P} g_G(p,\zeta)\,k(f,p)\Big]\leqslant \mu(|\zeta-a|)\times$$

$$\times\exp\Big[-\sum_{w:f(w)=0} g_G(w,\zeta)\,k(f,w)+\bar g_G(a,\zeta)\,\tau(a)+\bar g_G(\infty,\zeta)\,\tau(\infty)\Big]\quad \forall\zeta\in G\setminus P, \tag{17}$$

где для $b\in\bar{\mathbb{C}}$ принято обозначение $\tau(b)=s\Big(b, f(\cdot)\exp\Big(-\sum_{p\in P} g_G(p,\cdot)\times$ $\times k(f,p)\Big), G, \mu\Big)$.

Теорема 5. *Пусть $a\in\mathbb{C}$ — фиксированная точка; $G\subset\mathbb{C}\setminus\{a\}$ — открытое множество с границей нулевой логарифмической емкости; U — некоторая окрестность точек a и $z=\infty$; $Q\subset\bar{\mathbb{C}}\setminus G$ — множество, содержащее точки a и $z=\infty$; $\mu\in\mathfrak{M}$; $f:G\to\bar{\mathbb{C}}$ — мероморфная функция, у которой все разные полюсы пробегают множество P, и выполнены условия* (2), (3) *и*

$$\varlimsup_{\zeta\to z,\zeta\in G}|f(\zeta)|<+\infty\quad\forall z\in(\partial G)\setminus\{a\},\quad \varlimsup_{\zeta\to z,\zeta\in G}|f(\zeta)|\leqslant\mu(|z-a|)\quad\forall z\in(\partial G)\setminus Q. \tag{18}$$

Если a (аналогично $z=\infty$) является внутренней точкой множества $G\cup Q$, то дополнительно предположим, что выполнено (5) (*соответственно* (6)). *Тогда функция f рациональна. Если $f(\zeta)\not\equiv 0$ в G, то для функции f_*, являющейся аналитическим продолжением f на множество $\mathbb{C}\setminus\{a\}$, верны оценки*

$$\sum_{w:f_*(w)=0} k(f_*,w)-\sum_{p\in P} k(f,p)\leqslant m_\infty-m_0\leqslant 0. \tag{19}$$

Если $f\not\equiv 0$ голоморфна в G, то справедливо

$$f(\zeta)=c(\zeta-a)^m\quad\forall\zeta\in G, \tag{20}$$

$$\mu(x)=\beta x^m\quad\forall x>0 \tag{21}$$

с постоянными $c\in\mathbb{C}$, $\beta\geqslant 0$ и целой постоянной m, $m=m_0=m_\infty$, и имеет место одно и только одно из двух: либо оценка $|f(\zeta)|\leqslant\mu(|\zeta-a|)$ $\forall\zeta\in G$, либо следующий исключительный случай: $|c|>\beta$, $G=\mathbb{C}\setminus Q$.

Теорема 6. *Пусть $G\subset\mathbb{C}$ — открытое множество с границей нулевой логарифмической емкости; $\mu\in\mathfrak{M}$, причем $\mu_0\leqslant 1$; $f:\bar G\to\bar{\mathbb{C}}$ — (обобщенно) непрерывное отображение, мероморфное в G, и пусть выполнены все условия* (3), (11) *и* (8). *Если точка $z=\infty$ является изолированной граничной точкой множества G (на $\bar{\mathbb{C}}$), то дополнительно предположим, что выполнено* (6) *и $\mu_\infty\geqslant 0$. Тогда f — рациональная функция. Если к тому же $f\not\equiv$ const в G и голоморфна, то верно*

$$f(\zeta)=c\zeta+b\quad\forall\zeta\in G, \tag{22}$$

$$\mu(x)=\beta x\quad\forall x>0 \tag{23}$$

с постоянными b, $c\in\mathbb{C}$, $\beta\geqslant 0$ и имеет место одно и только одно из двух: либо соотношение

$$|f(z)-f(\zeta)|\leqslant\mu(|z-\zeta|)\quad\forall z,\zeta\in\bar G,\quad z\neq\zeta, \tag{24}$$

либо следующий исключительный случай: $|c|>\beta$, $\mathbb{C}\setminus G$ содержит не более одной точки.

Теоремы 2, 3, 6 имеют глобальный характер, а теоремы 1, 4, 5 локальны. При этом теоремы 1—4 относятся к открытым множествам с границей положительной логарифмической емкости, а теоремы 5, 6 — к случаю, когда граница имеет нулевую логарифмическую емкость. В теореме 2 имеется дополнительное условие голоморфности f в G.

Доказательство теоремы 4. В доказательстве можно не рассматривать те связные компоненты множества G, во всех точках которых ряд $\sum_{p\in P} g_G(p, \zeta)\, k(f, p)$ расходится. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что он сходится на множестве $G\setminus P$.

Из условий (2), (3) и (16) следует, что $P\cup \partial U$ содержится в кольце $2r<|\zeta-a|<R/2$ при некоторых положительных r и R. Обозначим $G\cap\cap\{\zeta:|\zeta-a|>R\}=D^R$, $G\cap\{\zeta:|\zeta-a|<r\}=D_r$. Фиксируем произвольные $\sigma>0$, $\alpha\in(-\infty, +\infty)$, для которых

$$\mu(x)\leqslant \sigma x^{\alpha}\quad \forall x>0. \tag{25}$$

На основании (16) существует $q>\sigma$ такое, что

$$|f(\zeta)|\leqslant q|\zeta-a|^{\alpha}\quad \forall\zeta\in G\cap[\{\zeta:|\zeta-a|=r\}\cup\{\zeta:|\zeta-a|=R\}].$$

Тогда

$$\varlimsup_{w\to\zeta, w\in G}|f(w)|\leqslant q|\zeta-a|^{\alpha}\quad \forall\zeta\in[(\partial D_r)\cup(\partial D^R)]\setminus Q.$$

К множествам $D_r\cup D^R$, Q, сужению функции f на $D_r\cup D^R$ и мажоранте qx^{α} можно применить полученное вторым из авторов обобщение на случай множества $Q\in\mathfrak{N}_*$ теоремы 3_* работы [4]. В результате получим оценку

$$|f(\zeta)|\leqslant q|\zeta-a|^{\alpha}\quad \forall\zeta\in D_r\cup D^R. \tag{26}$$

Автором работ [11, 12] получено также обобщение на случай множества $Q\in\mathfrak{N}_*$ теоремы 2 из указанных работ. Соотношения (14), (15), (26) позволяют применить этот результат при условии 3 (формулировки этой теоремы) к множествам G, Q, функции $\lambda(x)=\log(\sigma x^{\alpha})$, постоянной $b=\log(q/\sigma)$ и субгармонической (в широком смысле, см. [11, 12]) в G, обобщенно непрерывной функции $u(\zeta)=\log|f(\zeta)|-\sum_{p\in P} g_G(p,\zeta)\, k(f, p)$. Исключительный случай утверждения применяемой теоремы невозможен, ибо он предполагает, что $G=\mathbb{C}\setminus Q$, но тогда Q было бы замкнутым множеством нулевой логарифмической емкости и ∂G также имело бы емкость нуль. Поэтому верно соотношение $u(\zeta)\leqslant\log(\sigma|\zeta-a|^{\alpha})$ $\forall\zeta\in G$. Пусть теперь Z — произвольное конечное множество нулей функции f в G. Рассмотрим в G функцию $v_Z(\zeta)=u(\zeta)+\sum_{w\in Z} g_G(w,\zeta)\, k(f, w)$. Она субгармонична в G, а во всех регулярных граничных точках множества G выполнено условие

$$\varlimsup_{\zeta\to z, \zeta\in G} v_Z(\zeta)\leqslant\log(\sigma|z-a|^{\alpha}).$$

Поэтому на основании упомянутого обобщения теоремы 2 из [11, 12], как и выше, получаем

$$v_Z(\zeta)\leqslant\log(\sigma|\zeta-a|^{\alpha})\quad\forall\zeta\in G\setminus P. \tag{27}$$

Фиксируем произвольное $\zeta_0\in G\setminus P$. Сначала предположим, что $\mu\in\mathfrak{M}^*$. Если $x_\mu^-<|\zeta_0-a|<x_\mu^+$, то можно выбрать $\sigma>0$, $\alpha\in(-\infty, +\infty)$ такие, что выполнено (25) и $\mu(|\zeta_0-a|)=\sigma|\zeta_0-a|^{\alpha}$. Отсюда и из (27) следует оценка

$$v_Z(\zeta_0)\leqslant\log\mu(|\zeta_0-a|). \tag{28}$$

Если $|\zeta_0-a|$ не лежит на сегменте $[x_\mu^-, x_\mu^+]$, то за счет выбора $\sigma>0$ и $\alpha\in(-\infty, +\infty)$ можно добиться того, что число $\sigma|\zeta_0-a|^{\alpha}$ станет меньше любого наперед заданного $\varepsilon>0$, а условие (25) сохранится. Поэтому из (27) вытекает равенство $v_Z(\zeta_0)=-\infty$. Если же $|\zeta_0-a|$ равно x_μ^- или x_μ^+, то, согласно доказанному, связная компонента множества G, которой принадлежит ζ_0, содержит круг, где $v_Z(\zeta)\equiv-\infty$, и потому $v_Z(\zeta_0)=-\infty$. Итак, при $\mu\in\mathfrak{M}^*$, оценка (28) всегда верна.

Если $\mu \equiv 0$, то при всяких $\sigma > 0$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ верно (25), откуда получаем $v_Z(\zeta_0) = -\infty$, и потому снова имеет место (28).

Итак, доказано, что при условиях теоремы 4 в любой точке $\zeta_0 \in G \setminus P$ верна оценка (28). Отсюда на основании произвола в выборе множества Z нулей функции f следует справедливость оценки

$$|f(\zeta)| \exp\Big[-\sum_{p \in P} g_G(p, \zeta) k(f, p)\Big] \leqslant \mu(|\zeta - a|) \times$$

$$\times \exp\Big[-\sum_{w: f(w)=0} g_G(w, \zeta) k(f, w)\Big] \quad \forall \zeta \in G \setminus P, \tag{29}$$

Отсюда в свою очередь следует, что $-\infty \leqslant \tau(a) \leqslant 0$, $-\infty \leqslant \tau(\infty) \leqslant 0$.

Обозначим $\tau(a) = \tau^1$, $\tau(\infty) = \tau^2$. Пусть либо $\tau_i = 0 = \tau^i$, либо $\tau_i \in (\tau^i, 0]$, $i = 1, 2$.

Фиксируем произвольные $\sigma > 0$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, для которых имеет место (25), и произвольное конечное множество Z нулей функции f в G. Тогда верно (27). Обозначим $v_Z(\zeta) - \log(\sigma|\zeta - a|^\alpha) - \tau_1 \bar{g}_G(a, \zeta) - \tau_2 \bar{g}_G(\infty, \zeta) = v_{Z,\tau_1,\tau_2}$. Функция v_{Z,τ_1,τ_2} субгармонична и обобщенно непрерывна в G и ограничена сверху на всякой ограниченной части G, отделимой от a. Кроме того, во всех регулярных граничных точках $z \in (\partial G) \setminus \{a\}$ верно

$$\varlimsup_{\zeta \to z, \zeta \in G} v_{Z,\tau_1,\tau_2}(\zeta) \leqslant 0.$$

Если $\tau_2 = 0$, то из (27) следует существование конечной постоянной c_1 такой, что

$$v_{Z,\tau_1,\tau_2}(\zeta) \leqslant -c_1\tau_1 \quad \forall \zeta \in G : |\zeta - a| \geqslant 1.$$

Если $\tau_2 \in (\tau^2, 0]$, то существуют конечные постоянные c_1, c_2 такие, что при всех $\zeta \in G$ с достаточно большим $|\zeta|$

$$v_{Z,\tau_1,\tau_2}(\zeta) \leqslant u(\zeta) - \log(\sigma|\zeta - a|^\alpha) - c_1\tau_1 - (\log|\zeta - a| + c_2)\tau_2 \leqslant O(1), \ \zeta \to \infty,$$

ибо величина $u^\infty = \Big(f(\cdot)\cdot\exp\Big(-\sum_{p \in P} g_G(p, \cdot) k(f, p)\Big)\Big)_{\infty, G}$ либо равна $-\infty$ и $u(\zeta) < (\alpha + \tau_2)\log|\zeta - a|$ при всех достаточно больших $|\zeta|$ $(\zeta \in G)$, либо $u^\infty \neq -\infty$, $\mu_\infty \neq -\infty$ и при всех больших $|\zeta|$ $(\zeta \in G)$

$$u(\zeta) - (\alpha + \tau_2)\log|\zeta - a| < (u^\infty - \tau^2 - \alpha)\log|\zeta - a| = (\mu_\infty - \alpha)\log|\zeta - a| \leqslant 0.$$

Аналогичным образом показываем, что для $\zeta \in G$ $v_{Z,\tau_1,\tau_2}(\zeta) \leqslant O(1)$, $\zeta \to a$.

Тем самым доказано, что функция v_{Z,τ_1,τ_2} ограничена сверху в G и потому на основании принципа максимума $v_{Z,\tau_1,\tau_2} \leqslant 0$ $\forall \zeta \in G$. Устремляя τ_i к τ^i для $i = 1, 2$, в пределе получаем

$$v_Z(\zeta) \leqslant \log(\sigma|\zeta - a|^\alpha) + \bar{g}_G(a, \zeta)\tau^1 + \bar{g}_G(\infty, \zeta)\tau^2 \tag{30}$$

(при соглашении, что $0 \cdot (\pm\infty) = 0$).

Пусть $\zeta_0 \in G \setminus P$. На основании (29) достаточно рассмотреть лишь случай $\mu \in \mathfrak{M}^*$. Если $x_\mu^- < |\zeta_0 - a| < x_\mu^+$, то можно выбрать $\sigma > 0$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ такие, что выполнено (25) и $\mu(|\zeta_0 - a|) = \sigma|\zeta_0 - a|^\alpha$. Отсюда и из (30) следует оценка

$$v_Z(\zeta_0) \leqslant \log \mu(|\zeta_0 - a|) + \bar{g}_G(a, \zeta_0)\tau^1 + \bar{g}_G(\infty, \zeta_0)\tau^2. \tag{31}$$

Если $|\zeta_0 - a|$ не лежит на интервале (x_μ^-, x_μ^+), то, как показано выше, $v_Z(\zeta_0) = -\infty$. Следовательно, оценка (31) справедлива для любого $\zeta_0 \in G \setminus P$.

Учитывая произвол в выборе множества Z нулей функции f, отсюда приходим к оценке (17). Теорема 4 доказана.

Справедливость теоремы 1 следует из теоремы 4 (очевидно, (7) — частный случай оценки (17)).

Доказательство теоремы 3. Из условий теоремы следует, что множество P конечно. Фиксируем произвольную точку $\zeta_* \in \partial G$

в качестве a. Из условия $\mu_0 \leqslant 1$ вытекает справедливость условия вида (5) для функции $f(\zeta_*) - f(z)$ от z. Поэтому к этой функции можно применить теорему 1 (или теорему 4), откуда следует

$$|f(\zeta_*) - f(z)| \exp\Big[-\sum_{p \in P} g_G(p, z) k(f, p)\Big] \leqslant \mu(|\zeta_* - z|) \times$$

$$\times \exp\Big[\sum_{\substack{w \in G \\ f(w) = f(\zeta_*)}} g_G(w, z) k(f, w) + \bar{g}_G(\zeta_*, z) s(\zeta_*, f(\cdot) - f(\zeta_*)) +$$

$$+ \bar{g}_G(\infty, z) s(\infty, f(\cdot) - f(\zeta_*))\Big] \leqslant \mu(|\zeta_* - z|) \quad \forall z \in G \setminus P. \tag{32}$$

Из (32) следует (12).

Теперь в качестве a фиксируем произвольную точку $z \in G \setminus P$ и исключим из G эту точку. Из условия $\mu_0 \leqslant 1$ следует

$$f(\zeta) - f(a) = O(\mu(|\zeta - a|)), \quad \zeta \to a. \tag{33}$$

Если точка $\zeta = \infty$ является изолированной граничной точкой для G, то из (3) вытекает аналитичность f в этой точке, а из (6) и условия $\mu_\infty \geqslant 0$ получаем

$$f(\zeta) - f(a) = O(\mu(|\zeta - a|)), \quad \zeta \to \infty. \tag{34}$$

Пусть $\sigma > 0$ и $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ таковы, что выполнено (25).

Рассмотрим некоторое конечное множество L нулей функции $f(\zeta) - f(a)$ от ζ в $G \setminus \{a\}$ и функцию

$$u_L(\zeta) = \log|f(\zeta) - f(a)| - \sum_{p \in P} [g_G(p, \zeta) + g_G(p, a)] k(f, p) +$$

$$+ \sum_{w \in L} g_G(w, \zeta) k(f, w). \tag{35}$$

Из (32) — (35) и (25) ясно, что функция $u_L(\zeta)$ субгармонична в $G \setminus \{a\}$ и квазивсюду на $\partial(G \setminus \{a\})$ мажорируется функцией $\log(\sigma|\zeta - a|^\alpha)$ от ζ. Поэтому на основании принципа максимума имеем

$$u_L(\zeta) \leqslant \log(\sigma|\zeta - a|^\alpha) \quad \forall \zeta \in G \setminus \{a\}. \tag{36}$$

Фиксируем произвольное $\zeta_0 \in G \setminus (P \cup \{a\})$. Опираясь на (36) и повторяя в точности ту часть доказательства теоремы 4, которая следует после (27), убеждаемся в справедливости неравенства в (13) для $z = a \in G \setminus P$ и $\zeta \in G \setminus \{a\}$.

Справедливость теоремы 2 следует из теоремы 3 (очевидно, (9), (10) — частные случаи оценок (12), (13)).

Доказательство теоремы 5. Так как ∂G имеет логарифмическую емкость нуль, то f голоморфно продолжается на множество $(\partial G) \setminus \{a\}$ (ср. с [1]), причем продолженная функция мероморфна в области $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ и, как следует из (2) и (3), она аналитически продолжается на $\overline{\mathbb{C}}$. Поэтому функция f_* рациональна и представима в виде конечного произведения

$$f_*(\zeta) = c(\zeta - a)^{h_0} \Big(\prod_{w: f(w) = 0} (\zeta - w)^{k(f, w)}\Big) \Big(\prod_{z \in P} (\zeta - z)^{-k(f, z)}\Big) \quad \forall \zeta \in \overline{\mathbb{C}} \tag{37}$$

(h_0 — целое).

Если $c = 0$, то справедливость утверждения теоремы очевидна.

Поэтому рассмотрим случай $c \neq 0$. Существуют $\sigma > 0$ и $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ такие, что выполнено (25). Если a не является внутренней точкой множества $G \cup Q$, то она предельна для множества $(\partial G) \setminus Q$ и из (37), (18) и (25) следуют неравенства $h_0 \geqslant \mu_0 \geqslant \alpha$, а так как h_0 целое, то $h_0 \geqslant m_0 \geqslant \mu_0 \geqslant \alpha$. Если же a — внутренняя точка множества $G \cup Q$, то из (37), (5) и (25) снова получаем $h_0 \geqslant m_0 \geqslant \mu_0 \geqslant \alpha$.

Обозначим $h_0 - \sum_{p\in P} k(f, p) + \sum_{w: f_*(w)=0} k(f_*, w) = h_\infty$.

Проводя в отношении точки $z=\infty$ рассуждения, аналогичные проведенным в отношении a, можно убедиться, что $h_\infty \leqslant m_\infty \leqslant \mu_\infty \leqslant \alpha$. Объединяя доказанные неравенства, имеем $h_\infty \leqslant m_\infty \leqslant \mu_\infty \leqslant \alpha \leqslant \mu_0 \leqslant m_0 \leqslant h_0$. Тем самым доказано (19).

Теперь предположим, что f голоморфна в G. Тогда либо $f_* \equiv 0$, либо f_* не имеет нулей в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, $h_\infty = \mu_\infty = \alpha = \mu_0 = h_0$ и верно (20), (21). При этом, если $|c| > \beta$, то $\partial G \subset Q$, т. е. $\mathbb{C} \setminus Q = G$. Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. По аналогии с доказательством теоремы 5, функция f голоморфно продолжается на ∂G и продолженная функция f_* рациональна. Пусть f голоморфна в G. Тогда f_* — многочлен. Обозначим через $h_\infty \geqslant 0$ степень этого многочлена.

Фиксируем произвольную точку $a \in \mathbb{C}$, а если $\partial G \neq \varnothing$, то пусть $a \in \partial G$.

Существуют $\sigma > 0$ и $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ такие, что выполнено (25). Используя функцию $f_*(\zeta) - f_*(a)$, по аналогии с доказательством теоремы 5 устанавливаем соотношения $h_\infty \leqslant m_\infty \leqslant \mu_\infty \leqslant \alpha \leqslant \mu_0$. Так как $\mu_0 \leqslant 1$, то $0 \leqslant h_\infty \leqslant 1$ и f имеет вид (22).

Теперь к функции $f_*(\zeta) - f_*(a)$ можно применить теорему 5, в результате чего получают обоснование все остальные утверждения теоремы 6 (при этом учитываются (23), (24)). Теорема 6 доказана.

1. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные теоремы для голоморфных функций и отображений.— Киев, 1982.— 11 с.— (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 82.42).
2. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные свойства голоморфных функций и отображений одного и многих комплексных переменных // Междунар. конф. по теории приближения функций (Киев, 30 мая—6 июня 1983 г.): Тез. докл.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 177.
3. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные свойства голоморфных функций и отображений.— Киев, 1983.— 17 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.33).
4. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные задачи для голоморфных функций и отображений. — Киев, 1983.— 50 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.65).
5. *Тамразов П. М., Алиев Т. Г.* Учет нулей и неоднолистности голоморфных функций в контурно-телесных теоремах // Теория функций и приближений: Тр. 2-й Саратов. зим. шк. (24 января—5 февраля 1984 г.).— Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1986.— Ч. 3.— С. 109—112.
6. *Тамразов П. М., Алиев Т. Г.* Контурно-телесные теоремы для голоморфных функций с нулями и для мероморфных функций // Комплексные методы в мат. физике : Тез. докл. Всесоюз. шк. мол. ученых (Донецк, 24 мая—3 июня 1984 г.).— Донецк, 1984.— С. 180.
7. *Тамразов П. М., Алиев Т. Г.* Контурно-телесная задача для мероморфных функций и с учетом нулей и неоднолистности.— Киев, 1984.— 16 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.78).
8. *Алиев Т. Г., Тамразов П. М.* Мероморфные функции в контурно-телесной задаче с учетом нулей и неоднолистности.— Киев, 1985.— 15 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.46).
9. *Брело М.* Основы классической теории потенциала.— М. : Мир, 1964.— 213 с.
10. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциалов.— М. : Наука, 1966.— 515 с.
11. *Тамразов П. М.* Локальная контурно-телесная задача для субгармонических функций. — Киев, 1984. — 17 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.52).
12. *Tamrazov P. M.* Local Contour—and—solid problem for Subharmonic functions // Complex Variables.— 1986.— 7.— P. 235—246.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 20.03.86