УДК 517.983.24+517.986.7

Ю. М. Арлинский

Об одном классе сжатий в гильбертовом пространстве

Пусть H — комплексное гильбертово пространство, I — тождественный оператор в H, $\alpha \in (0, \pi/2]$.

Определение. *Оператор $T \in \mathcal{L}(H)$* будем относить к классу $C(\alpha)$, если выполнено неравенство*

$$\| \sin\alpha\, T \pm \mathrm{i} \cos\alpha\, I \| \leqslant 1. \tag{1}$$

Ясно, что класс $C(\alpha)$ является слабо замкнутым выпуклым подмножеством $\mathcal{L}(H)$ и вместе с оператором T классу $C(\alpha)$ принадлежат операторы $-T$, $\pm T^*$.

Легко видеть, что неравенства (1) эквивалентны условию

$$\| f \|^2 - \| Tf \|^2 \geqslant 2\mathrm{ctg}\, \alpha\, |\, \mathrm{Im}\,(Tf, f) | \quad \forall f \in H. \tag{2}$$

Последнее означает, что $T \in C(\alpha) \Rightarrow \| T \| \leqslant 1$. Классом $C(0)$ будем считать множество всех самосопряженных сжатий.

Заметим, что а) $C(\alpha_1) \subset C(\alpha_2)$ при $\alpha_1 < \alpha_2$; б) $C(0) = \bigcap\limits_{\alpha > 0} C(\alpha)$; б) $C(\pi/2)$ — множество всех сжатий в H; в) если изометрический оператор принадлежит $C(\alpha)$ при $\alpha < \pi/2$, то он самосопряжен; г) если $\| T \| = \rho < 1$, то $T \in C(\alpha_\rho)$, где $\alpha_\rho = 2\mathrm{arctg}\, \rho$. Из г) следует, что всякое сжатие является равномерным пределом операторов из множества $\bigcup\limits_{\alpha \in [0, \pi/2)} C(\alpha)$.

Пусть S — максимальный секториальный оператор с вершиной в нуле и полууглом α [1]. Это означает, что а) $\mathrm{Re}\,(Sf, f) \geqslant \mathrm{ctg}\, \alpha\, |\, \mathrm{Im}\,(Sf, f) | \ \forall f \in \mathfrak{D}(S)$; б) $\rho(S) \neq \varnothing$.

Тогда нетрудно убедиться, что дробно-линейное преобразование $T = (I - S)(I + S)^{-1}$ есть оператор класса $C(\alpha)$.

Секториальные операторы и связанные с ними формы рассматривались в [1—3]. Так, в [2] доказано, что такие операторы и только они являются генераторами голоморфных в секторе $|\arg z| < \pi/2 - \alpha$ сжимающих полугрупп $T(z) = \exp(-zS)$. В работах [4—6] изучались секториальные и классов $C(\alpha)$ расширения операторов.

Настоящая работа посвящена исследованию операторов класса $C(\alpha)$. Установлен ряд свойств таких операторов, получен новый критерий голоморфности в секторе сжимающей полугруппы и доказано существование унитарных некасательных предельных значений $s\text{-}\lim\limits_{z \to -1} \Theta_T(z)$, $s\text{-}\lim\limits_{z \to 1} \Theta_T(z)$ характеристической функции [3] оператора T класса $C(\alpha)$, где $\alpha \in [0, \pi/2)$.

1. Пусть $D(\alpha)$ — множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих неравенствам $|\sin\alpha\, z \pm \mathrm{i}\cos\alpha| \leqslant 1$, если $\alpha \in (0, \pi/2]$. В случае $\alpha = \pi/2$ $D(\pi/2)$ — замкнутый единичный круг. Пусть $D(0) = [-1, 1]$, $T_R = (T + T^*)/2$, $T_I = (T - T^*)/2i$. Из определения немедленно следует, что если $T \in C(\alpha)$, то его числовой образ $W(T) = \{(Tf, f),\ \| f \| = 1\}$ есть подмножество $D(\alpha)$. Поскольку $\max\limits_{z \in D(\alpha)} |\, \mathrm{Im}\, z | = \mathrm{tg}\,(\alpha/2)$, то справедлива импликация $T \in C(\alpha) \Rightarrow \| T_I \| \leqslant \mathrm{tg}\,(\alpha/2)$.

Обозначим $D_T = (I - T^*T)^{1/2}$, $D_{T^*} = (I - TT^*)^{1/2}$ ($\| T \| \leqslant 1$). Если $T \in C(\alpha)$ и $\alpha \in [0, \pi/2)$, то из (2) получаем

$$2\,\mathrm{ctg}\, \alpha\, T_I = D_T F D_T = D_{T^*} F_* D_{T^*}, \tag{3}$$

где F, F_* — самосопряженные сжатия в подпространствах $H_T = \overline{D_T H}$ и $H_{T^*} = \overline{D_{T^*} H}$ (в дальнейшем будет доказано, что $H_T = H_{T^*}$). Из (3) следуют неравенства $\forall f,\ g \in H$

$$2\,\mathrm{ctg}\, \alpha\, |(T_I f, g)| \leqslant \| D_T f \| \| D_T g \|,\ 2\,\mathrm{ctg}\, \alpha\, |(T_I f, g)| \leqslant \| D_{T^*} f \| \| D_{T^*} g \|. \tag{4}$$

* $\mathcal{L}(H)$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов в H.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $T_1,\ T_2 \in C(\alpha)$, *тогда* $(T_1T_2+T_2T_1)/2 \in C(\alpha)$, $(T_1T_2-T_2T_1)/2i \in C(\alpha)$.

Если $T \in C(\alpha)$, *то* а) *для любого сжатия* B *оператор* $BTB^* \in C(\alpha)$; б) *для любого* $B \in C(\alpha)$ *оператор* $TBT \in C(\alpha)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T=(T_1T_2+T_2T_1)/2$, тогда $2T_I = T_{1I}T_2 + T_1^*T_{2I} + T_{2I}T_1 + T_2^*T_{1I}$. С учетом (4) имеем

$$2\operatorname{ctg}\alpha\,|(T_If,f)| \leqslant 2\operatorname{ctg}\alpha\,|(T_{1I}T_2f,f)| + 2\operatorname{ctg}\alpha\,|(T_{2I}T_1f,f)| \leqslant$$

$$\leqslant (\|D_{T_1}T_2f\|^2 + \|D_{T_1}f\|^2 + \|D_{T_2}T_1f\|^2 + \|D_{T_2}f\|^2)/2 =$$

$$= \|f\|^2 - (\|T_1T_2f\|^2 + \|T_2T_1f\|^2)/2 \leqslant \|f\|^2 - \|Tf\|^2 \quad \forall f \in H.$$

Следовательно, $T \in C(\alpha)$. Аналогично доказывается $(T_1T_2 - T_2T_1)/2i \in C(\alpha)$.

Пусть $\|B\| \leqslant 1$, $T \in C(\alpha)$. Тогда на основании (2) $2\operatorname{ctg}\alpha\,|(BT_IB^*f,f)| \leqslant \leqslant \|D_TB^*f\|^2 \leqslant \|f\|^2 - \|BTB^*f\|^2 \ \ \forall f \in H$. Поэтому $BTB^* \in C(\alpha)$.

Если $B,\ T \in C(\alpha)$, то для $Q = TBT$ имеем $Q_I = T_IBT + T^*B_IT + T^*B^*T_I$. Отсюда с учетом (4) и (2)

$$2\operatorname{ctg}\alpha\,|(Q_If,f)| \leqslant 4\operatorname{ctg}\alpha\,|(T_IBTf,f)| + 2\operatorname{ctg}\alpha\,|(B_ITf,Tf)| \leqslant$$

$$\leqslant \|D_TBTf\|^2 + \|D_Tf\|^2 + \|D_BTf\|^2 = \|D_Qf\|^2.$$

Значит, $Q \in C(\alpha)$. Предложение доказано.

Из предложения 1 следует, что если $T \in C(\alpha)$, то и $T^n \in C(\alpha)$ при любом натуральном n. Кроме того, классу $C(\alpha)$ принадлежат операторы $T^{n_1}T^{*n_2}$, $T^{n_1}T^{*n_2}T^{n_3}$, $T^{n_1}T^{*n_2}T^{n_3}T^{*n_4}, \ldots$, где $n_1, n_2, \ldots$ — произвольные натуральные числа.

Так как $TT^* - T^*T = 2i(T_IT_R - T_RT_I)$, $(T^2)_I = T_RT_I + T_IT_R$, то $\|T_RT_I \pm T_IT_R\| \leqslant \operatorname{tg}(\alpha/2)$ для любого $T \in C(\alpha)$.

Пусть F — множество функций $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_nz^n$, где $\operatorname{Im} a_n = 0 \ \ \forall n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n| < \infty$. Обозначим $A_f = \Big(\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n|\Big)^{-1}$. Поскольку $C(\alpha)$ — выпуклое подмножество операторов, то на основании предыдущих рассмотрений верны следующие утверждения:

а) $T \in C(\alpha) \Rightarrow A_ff(T) \in C(\alpha) \quad \forall f(z) \in F$;

б) $T \in C(\alpha) \Rightarrow A_{f_1}A_{f_2}f_1(T)f_2(T^*)$, $A_{f_1}A_{f_2}A_{f_3}f_1(T)f_2(T^*)f_3(T), \ldots \in C(\alpha)$, $\forall f_1(z),\ f_2(z), \ldots \in F$.

Отсюда следует, что в классе $C(\alpha)$ вместе с T лежат, например, операторы $(1-|a|)(I-aT)^{-1}$ при $-1<a<1$, $\exp(-|a|(I \pm T))$ при $\operatorname{Im} a = 0$, $2/\pi \arcsin T$, $2\operatorname{sh}^{-1} 2\sin T\cos T^*$, $I-(I+T)^r$, $r \in [0,1]$. Нетрудно также проверить, что оператор $(aI - T)(I-aT)^{-1} \in C(\alpha)$ при $a \in (-1, 1)$.

В работе [6] доказано следующее утверждение: если $f(z)$ аналитична внутри единичного круга, $f(z) = \overline{f(\bar z)}$ и $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$, то верна импликация $T \in C(\alpha) \Rightarrow f(T) \in C(\alpha)$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* $T \in C(\alpha)$, $\alpha \in [0, \pi/2)$. *Тогда* 1) $\overline{D_TH} = \overline{D_{T^*}H} \overset{\mathrm{def}}{=} H_0$; 2) *подпространства* H_0, $H \ominus H_0$ *приводят* T, $T|_{H\ominus H_0}$ — *самосопряженный унитарный оператор*, $T|_{H_0}$ — *вполне неунитарное сжатие класса* C_{00} [3].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f \in \operatorname{Ker} D_T$, то из (3) $T_If = 0$, и, значит, $\|Tf\| = \|T^*f\| = \|f\|$, т. е. $f \in \operatorname{Ker} D_{T^*}$. Верно и обратное. Следовательно, $\overline{D_TH} = \overline{D_{T^*}H}$. Поскольку $TD_T = D_{T^*}T$, $T^*D_{T^*} = D_TT^*$ [3], то H_0 и $H \ominus H_0$ приводят T и $T|_{H\ominus H_0}$ — самосопряженный унитарный оператор, $T|_{H_0}$ — чистое сжатие ($\|Th\| < \|h\| \ \ \forall h \in H_0$). Так как спектр $T|_{H_0}$ содержится в $D(\alpha)$, то мера пересечения $\sigma(T)$ с единичной окружностью равна нулю.

Поэтому на основании предложения II 6.7 из [3] $T \in C_{00}$, т. е. $s - \lim\limits_{n\to\infty} T^n = s - \lim\limits_{n\to\infty} T^{*n} = 0$. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть $T \in \mathcal{L}(H)$ и при некотором $\alpha \in (0, \pi/2)$ для любых $f \in H$ выполняется равенство*

$$\|f\|^2 - \|Tf\|^2 = 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,|(T_I f, f)|. \tag{5}$$

Тогда T — обратимый нормальный диссипативный или аккумулятивный оператор и $\|T^{-1}\| \leqslant \mathrm{ctg}(\alpha/2)$.

Доказательство. Из (5) следует, что $T \in C(\alpha)$. Из (3) и предложения 2 имеем $|(Fx, x)| = \|x\|^2 \quad \forall x \in H_0$, поэтому либо $F = I|_{H_0}$, либо $F = -I|_{H_0}$. Следовательно, либо $2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\, T_I = D_T^2$, либо $2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\, T_I = -D_T^2$. Пусть $2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\, T_I = D_T^2$, тогда $\|(\sin\alpha T + \mathrm{i}\cos\alpha) f\| = \|f\| \quad \forall f \in H$. Так как $\sin\alpha\, T_I \geqslant 0$, то $-\mathrm{i}\cos\alpha$ — регулярная точка $\sin\alpha T$, поэтому $\sin\alpha\, T + \mathrm{i}\cos\alpha\, I$ — унитарный оператор. Значит, T — нормальный оператор. Далее $\forall f \in H$ имеем $\|f\|^2 - \|Tf\|^2 = 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,|(T_I f, f)| \leqslant 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{tg}(\alpha/2)\|f\|^2 = (1 - \mathrm{tg}^2(\alpha/2))\|f\|^2$. Следовательно, $\|T^{-1}\| \leqslant \mathrm{ctg}(\alpha/2)$. Предложение доказано.

Предложение 4. *Если $T \in C(\alpha)$, $\alpha \in [0, \pi/2)$, то $\forall f \in H$ справедливы неравенства*

$$\mathrm{ctg}(\alpha/2 + \pi/4)\|D_{T^*} f\| \leqslant \|D_T f\| \leqslant \mathrm{tg}(\alpha/2 + \pi/4)\|D_T f\|, \tag{6}$$

$$1/\sqrt{2}\,\mathrm{cosec}(\alpha/2 + \pi/4)\|D_T f\| \leqslant \|D_{T_R} f\| \leqslant$$

$$\leqslant [\mathrm{tg}(\alpha/2 + \pi/4) + 1/2\,\mathrm{tg}\,\alpha]\,\|D_T f\|, \tag{7}$$

$$\|D_T f\| \leqslant \|D_{T^n} f\| \leqslant \gamma_n \|D_T f\|, \tag{8}$$

где $\gamma_n \geqslant 1$.

Доказательство. Из (3) имеем равенства $T = T^* + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\alpha D_T F D_T$, $T^* = T - i\,\mathrm{tg}\,\alpha D_{T^*} F_* D_{T^*}$. Отсюда при $\forall f \in H$

$$\|D_T f\|^2 + \mathrm{tg}^2\alpha\,\|F D_T f\|^2 = \|(D_{T^*} - i\,\mathrm{tg}\,\alpha T F D_T) f\|^2, \tag{9}$$

$$\|D_{T^*} f\|^2 + \mathrm{tg}^2\alpha\,\|F_* D_{T^*} f\|^2 = \|(D_T + i\,\mathrm{tg}\,\alpha T^* F_* D_{T^*}) f\|^2. \tag{10}$$

В подпространстве H_0 зададим оператор M равенством $M D_T f = D_{T^*} f$. Тогда по предложению 2 M корректно определен и на $D_{T^*} H$ существует M^{-1}. Из (9) $\|(M - i\,\mathrm{tg}\,\alpha T F)\varphi\|^2 = \|(I + \mathrm{tg}^2\alpha F^2)^{1/2}\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in D_T H$. Следовательно, $\|M\| \leqslant \sec\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}(\alpha/2 + \pi/4)$. Аналогично из (10) следует $\|M^{-1}\| \leqslant \mathrm{tg}(\alpha/2 + \pi/4)$, а из (3) — $T_R = T^* + i/2\,\mathrm{tg}\,\alpha D_T F D_T$. Отсюда $\|D_{T_R} f\|^2 = \|(D_{T^*} - i/2\,\mathrm{tg}\,\alpha T F D_T) f\|^2 - 1/4\,\mathrm{tg}^2\alpha\,\|F D_T f\|^2$. Поскольку $D_{T^*} = M D_T$, где M — ограниченный оператор, то

$$\|D_{T_R} f\| \leqslant \|(M - i/2\,\mathrm{tg}\,\alpha T F) D_T f\| \leqslant [\mathrm{tg}(\alpha/2 + \pi/4) + 1/2\,\mathrm{tg}\,\alpha]\,\|D_T f\|.$$

С другой стороны, $\|D_{T_R} f\|^2 \geqslant (\|D_T f\|^2 + \|D_{T^*} f\|^2)/2 \quad \forall f \in H$. Поскольку верно (6), то $\|D_{T_R} f\|^2 \geqslant \mathrm{coses}^2(\pi/4 + \alpha/2)/2\,\|D_T f\|^2$. Доказаны неравенства (7). Ясно, что при любом n $\|D_{T^n} f\|^2 = \|D_{T^{n-1}} T f\|^2 + \|D_T f\|^2$ $f \in H$. Далее $\|D_T T f\| = \|M^{-1} D_{T^*} T f\| = \|M^{-1} T D_T f\| \leqslant \mathrm{tg}(\pi/4 + \alpha/2)\,\|D_T f\|$. Следовательно, $\|D_{T^2} f\|^2 \leqslant (1 + \mathrm{tg}^2(\pi/4 + \alpha/2))\,\|D_T f\|^2$. Отсюда по индукции получаем неравенства (8) при $1 \leqslant \gamma_n^2 \leqslant (\mathrm{tg}^{2n}(\pi/4 + \alpha/2) - 1)/(\mathrm{tg}^2(\pi/4 + \alpha/2) - 1)$. Предложение доказано.

Следствие. *Если $T \in C(\alpha)$, где $\alpha \in [0, \pi/2)$, то 1) $D_T H = D_{T^*} H = \ldots = D_{T^n} H = D_{T^*_n} H = D_{T_R} H$; 2) если $\|T\| = 1$, то $\|T^n\| = 1$ при любом натуральном n.*

2. Пусть $T(t)$ — сильно непрерывная полугруппа линейных операторов при $t \geqslant 0$ в гильбертовом пространстве, $S = \lim\limits_{t \downarrow 0} t^{-1}(I - T(t))$ — ее генератор. Как известно [1—3], для того чтобы $T(t)$ была сжимающей

полугруппой, необходимо и достаточно, чтобы ее генератор был максимальным аккретивным оператором. $T(t)$ допускает голоморфное сжимающее продолжение в сектор $|\arg z| < \pi/2 - \alpha$, $\alpha \in [0, \pi/2)$ тогда и только тогда, когда ее генератор является максимальным секториальным оператором с вершиной в нуле и полууглом α [2].

Теорема 1. *Для того чтобы сильно непрерывная полугруппа $T(t)$ допускала голоморфное сжимающее продолжение в сектор $|\arg z| < \pi/2 - \alpha$, где $\alpha \in (0, \pi/2)$, необходимо, чтобы при всех $t \geqslant 0$, и достаточно, чтобы при $t \in [0, \delta]$, где $\delta > 0$, $T(t) \in C(\alpha)$.*

Доказательство. Пусть $T(t) \in C(\alpha)$ $\forall t \in [0, \delta]$, $\delta > 0$. Тогда для оператор-функций $B_\pm(t) = \sin\alpha\, T(t) \pm i\cos\alpha I$ имеем $\|B_\pm(t) f\| \leqslant \|f\| = \|B_\pm(0) f\|$ $\forall f \in H$, $t \in [0, \delta]$. Если $f \in \mathfrak{D}(S)$, то отсюда получаем $\frac{d}{dt}\|B_\pm(t) f\|^2_{t=0} \leqslant 0$. Поскольку

$$\frac{d}{dt}\|B_\pm(t) f\|^2_{t=0} = -2\sin^2\alpha\,[\operatorname{Re}(Sf, f) \pm \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{Im}(Sf, f)],$$

то тогда $\operatorname{Re}(Sf, f) \geqslant \operatorname{ctg}\alpha\,|\operatorname{Im}(Sf, f)|$ $\forall f \in \mathfrak{D}(S)$. Так как S — генератор, то $\rho(S) \neq \varnothing$. Таким образом, S — максимальный α-секториальный оператор, поэтому $T(t) = \exp(-tS)$ допускает продолжение в сектор $|\arg z| < \pi/2 - \alpha$ до голоморфной сжимающей полугруппы.

Наоборот, пусть $T(t)$ допускает голоморфное сжимающее продолжение в сектор $|\arg z| < \pi/2 - \alpha$. Тогда ее генератор S является максимальным секториальным оператором с вершиной в нуле и полууглом α.

Нетрудно проверить, что при $\lambda > 0$ оператор $(I + \lambda S)^{-1}$ принадлежит классу $C(\alpha)$, поэтому $\forall t \geqslant 0$ $\left(I + \frac{t}{n} S\right)^{-n} \in C(\alpha)$, где n — натуральное число. Поскольку справедливо равенство [1] $T(t) = s - \lim\limits_{n\to\infty}(I + t/nS)^{-n}$ $\forall t \geqslant 0$ и $C(\alpha)$ — сильно замкнутое множество опраторов, то $T(t) \in C(\alpha)$ $\forall t \geqslant 0$. Теорема доказана.

По терминологии [3] оператор $T = (I - S)(I + S)^{-1}$ называется когенератором сжимающей полугруппы $T(t) = \exp(-tS)$. Если $T \in C(\alpha)$ и $\operatorname{Ker}(I + T) = \{0\}$, то $S = (I - T)(I + T)^{-1}$ — максимальный секториальный оператор с вершиной в нуле и полууглом α. Таким образом, по существу, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы полугруппа $T(t)$, $t \geqslant 0$, принадлежала при каждом t классу $C(\alpha)$, необходимо и достаточно, чтобы ее когенератор принадлежал классу $C(\alpha)$, $\alpha \in [0, \pi/2]$.*

Предложение 5. *Если $T(z)$ — сжимающая голоморфная в секторе $|\arg z| < \pi/2 - \alpha$ полугруппа, то при любом $\varphi \in [0, \pi/2 - \alpha]$ и $t \geqslant 0$ оператор $T(te^{\pm i\varphi}) \in C(\alpha + \varphi)$.*

Доказательство. Пусть S — генератор $T(z)$. Тогда для любого $\varphi \in [0, \pi/2 - \alpha]$ $e^{\pm i\varphi}S$ является максимальным секториальным оператором с вершиной в нуле и полууглом $\alpha + \varphi$. Так как $T(te^{\pm i\varphi}) = \exp(-te^{\pm i\varphi}S)$, то по теореме 2 $T(te^{\pm i\varphi}) \in C(\alpha + \varphi)$.

В [3] установлена связь между полугруппой $T(t)$ и ее когенератором: $\forall h \in H$

$$\lim_{t\to\infty}\|T(t) h\| = \lim_{n\to\infty}\|T^n h\|, \quad \lim_{t\to\infty}\|T^*(t) h\| = \lim_{n\to\infty}\|T^{*n} h\|. \tag{11}$$

В связи с этим получим одно условие асимптотической устойчивости дифференциального уравнения $\dot{x} = -Sx$ (уравнение называется асимптотически устойчивым, если для решения задачи Коши $\dot{x} = -Sx$, $x(0) = x_0 \in \mathfrak{D}(S)$ справедливо равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ $\forall x_0 \in \mathfrak{D}(S)$).

Предложение 6. *Пусть S — максимальный секториальный оператор с вершиной в нуле и полууглом α, $\alpha \in [0, \pi/2)$. Если $\operatorname{Ker} S = \{0\}$, то дифференциальные уравнения $\dot{x} = -Sx$, $\dot{x} = -S^*x$ асимптотически устойчивы.*

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Ker} S = \{0\}$, то для $T = (I - S) \times (I + S)^{-1}$ имеем $\operatorname{Ker}(I \pm T) = \{0\}$, поэтому $\operatorname{Ker}(I \pm T^*) = \{0\}$ и $\operatorname{Ker} S^* = \{0\}$. Кроме того, по предложению 2 $\overline{D_T H} = \overline{D_{T^*} H} = H$ и $T \in C_{00}$. Поскольку решением задачи Коши $\dot{x} = -Sx$, $x(0) = x_0 \in \mathfrak{D}(S)$ является вектор-функция $x(t) = T(t) x_0$, где $T(t) = \exp(-tS)$, то, согласно равенствам (10), $\lim\limits_{t \to +\infty} \| x(t) \| = 0$. Предложение доказано.

3. Пусть T — сжатие. В [3] определена характеристическая функция оператора T

$$\Theta_T(z) = [-T + z D_{T^*} (I - zT^*)^{-1} D_T] \mid \overline{D_T H}.$$

Оператор-функция $\Theta_T(z)$ действует из $\overline{D_T H}$ в $\overline{D_{T^*} H}$ и является голоморфной и сжимающей в единичном круге; $\Theta_T(z)$ определяет вполне неунитарную часть T с точностью до унитарной эквивалентности [3].

Пусть $T \in C(\alpha)$, $P(\alpha) = \{z : |\sin \alpha z + i \cos \alpha| < 1 \cup |\sin \alpha z - i \cos \alpha| < 1\}$. Тогда $\Theta_T(z)$ голоморфна в области $P(\alpha)$ и при $\alpha < \pi/2$ $\Theta_T(z) \in \mathcal{L}(H_0)$ $\forall z \in P(\alpha)$, где $H_0 = \overline{D_T H} = \overline{D_{T^*} H}$ (предложение 2).

Кроме того, если $z \in P(\alpha)/D(\alpha)$, то $\bar{z}^{-1} \in P(\alpha)/D(\alpha)$. Поэтому при $z \in P(\alpha)/D(\alpha)$ $\Theta_T(z)$ ограничено обратима, а в точках единичной окружности, исключая быть может $z = \pm 1$, принимает унитарные значения [3].

Тем не менее справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $T \in C(\alpha)$, $\alpha < \pi/2$. Тогда характеристическая функция $\Theta_T(z)$ имеет унитарные предельные значения по некасательным направлениям $s - \lim\limits_{z \to 1} \Theta_T(z)$, $s - \lim\limits_{z \to -1} \Theta_T(z)$.*

Доказательство. Согласно предложению 3 в H_0

$$D_T = D_{T^*} L, \tag{12}$$

где $L, L^{-1} \in \mathcal{L}(H_0)$. Покажем справедливость равенств $\operatorname{Ker}(I \pm L^* T) = \operatorname{Ker}(I \pm T^* L) = \operatorname{Ker}(L^* \pm T^*) = \operatorname{Ker}(L \pm T) = \{0\}$. Умножая равенство $T - T^* = i \operatorname{tg} \alpha D_T F D_T$ слева на D_T, учитывая (12), а также соотношения $T D_T = D_{T^*} T$, $T^* D_{T^*} = D_T T^*$, $\operatorname{Ker} D_T \cap H_0 = \{0\}$, получаем $(L^* T - T^* L^{*-1}) f = i \operatorname{tg} \alpha D_T^2 F f$ $\forall f \in H_0$. Если $L^* T f = f$, где $f \in H_0$, то отсюда $D_T^2 (I - i \operatorname{tg} \alpha F) f = 0$. Поскольку F — самосопряженный оператор, то $f = 0$. Таким образом $\operatorname{Ker}(I - L^* T) = \{0\}$. Аналогично доказываются остальные равенства.

Теперь из (12) следует, что операторы $(L - T)(I - T^* L)^{-1}$, $-(L + T)(I + T^* L)^{-1}$ допускают расширения по непрерывности на H_0 до унитарных операторов соответственно $U_\pm$.

Так как $\| (I - zT^*)^{-1} \| \leqslant 1/(1 - |z|)$ при $|z| < 1$ и $\operatorname{Ker}(I \pm T^*) = \{0\}$ в H_0, то для любого $h \in H_0$ по некасательным направлениям внутри единичного круга $\lim\limits_{z \to \pm 1} (I - zT^*)^{-1} (I \mp T^*) h = h$. Отсюда, учитывая (12), получаем $\forall h \in H_0$

$$\lim_{z \to \pm 1} \Theta_T(z) (I \mp T^* L) h = \pm (L \mp T) h = U_\pm (I \mp T^* L) h.$$

Поскольку $\| \Theta_T(z) \| \leqslant 1$ при $|z| < 1$, то $\lim\limits_{z \to \pm 1} \Theta_T(z) f = U_\pm f$ $\forall f \in H_0$. Теорема доказана.

Замечание. Можно доказать, что операторы $U_\pm$ осуществляют унитарную эквивалентность операторов F и F_*, т. е. $U_\pm F U_\pm^{-1} = F_*$.

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1967.— 464 с.
3. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.— М. : Мир, 1970.— 431 с.
4. *Цекановский Э. Р.* Расширения Фридрихса и Крейна положительных операторов и голоморфные полугруппы сжатий // Функцион. анализ и его прил.—1981.— 15, вып. 4.— С. 91—92.

5. *Арлинский Ю. М., Цекановский Э. Р.* О секториальных расширениях положительных эрмитовых операторов и их резольвентах // Докл. АН АрмССР.—1984.— **79**, № 5.— С. 199—203.
6. *Колманович В. Ю., Маламуд М. М.* О расширениях секториальных операторов и дуальных пар сжатий.— Донецк, 1985.— 57 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 4428-85.

Ворошиловград. машиностроит. ин-т Получено 08.08.85

УДК 519.21

Е. Б. Баховец

О связи целочисленных марковских мер и мер с независимыми значениями

Понятие марковской меры ввел А. В. Скороход, который получил [1] представления некоторых классов марковских мер.

Пусть $(X, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство, $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ — вероятностное пространство, $\mathbb{Z}^+$ — множество неотрицательных целых чисел.

Определение 1. *Функцию* $\mu\colon \mathfrak{A}\times\Omega\to\mathbb{Z}^+$ *назовем целочисленной марковской мерой, если:*

1) $\forall A\in\mathfrak{A}$ $\mu(A;\cdot)$ *является случайной величиной;*
2) $\mu(\cdot;\omega)$ — *конечно-аддитивная мера п. н.;*
3) $\mu(A_1),\ldots,\mu(A_n)$ — *цепь Маркова, как только* $A_1\subset A_2\subset\ldots\subset A_n$.

Заметим, что целочисленные меры с независимыми значениями (случайные меры, удовлетворяющие условиям 1 и 2 определения 1 и условию независимости $\mu(A_1),\ldots,\mu(A_n)$ для непересекающихся множеств $A_1,\ldots,A_n$ из $\mathfrak{A}$) являются частным случаем марковских мер. В качестве менее тривиального примера марковской меры можно привести случайную целочисленную меру, конечномерные распределения которой удовлетворяют соотношению

$$P\{\mu(A_1)=k_1,\ldots,\mu(A_n)=k_n\}=\frac{f^{(k_1)}(A_1;0)}{k_1!}\ldots$$

$$\ldots\frac{f^{(k_n)}(A_n;0)}{k_n!}\sum_r\varphi^{(k_1+\ldots+k_n+r)}(0)\,\frac{f^{(r)}\left(\overline{\sum_1^n A_i};0\right)}{r!},\quad A_i\cap A_j=\varnothing. \tag{1}$$

Здесь $\varphi(z)$, $f(A;z)$, $A\in\mathfrak{A}$ — семейство аналитических при $|z|<c$ функций, у которых производные всех порядков в нуле неотрицательны, $f(A;0)=1$, причем $f(A_1+A_2;z)=f(A_1;z)f(A_2;z)$, $A_1\cap A_2=\varnothing$, и $\sum_k\varphi^{(k)}(0)\frac{f^{(k)}(X;0)}{k!}=1$.

В дальнейшем будем считать, что $\mathfrak{A}$ — счетная алгебра, $\mathfrak{A}=\bigcup\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_n$ конечные алгебры с атомами $A_1^n,\ldots,A_{r_n}^n$, $\mathfrak{A}_n\subset\mathfrak{A}_{n+1}$.

Определение 2. *Целочисленную марковскую меру, для которой* $\lim_n\max_{1\leqslant i\leqslant r_n}\mu(A_i^n)\leqslant 1$ *с вероятностью* 1, *будем называть считающей марковской мерой.*

Целью настоящей работы является получение представления характеристического функционала считающей марковской меры при некоторых дополнительных условиях.

Приведем, прежде всего, некоторые вспомогательные определения и результаты, которые понадобятся в дальнейшем.

Определение 3. *Будем говорить, что целочисленная марковская мера* μ *принадлежит классу* M_0, $\mu\in M_0$, *если из того, что*