$d_1/\sqrt{2}$ и $d_2/\sqrt{2}$ соответственно. Тогда легко видеть, что $0 \in \overline{\operatorname{con} A} \cap \overline{\operatorname{con} B}$ и для $x \in A$ и $y \in B$ будет $g(x-y, x-y) = \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2)$ и, следовательно, $d^2(A, B) = \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. При выполнении неравенства (3) расстояние между $\operatorname{con} A$ и $\operatorname{con} B$ можно сделать сколь угодно малым. В самом деле, возьмем два бесконечномерных ортогональных подпространства L_1 и L_2 и вектор x такой, что $g(x, x) = \varepsilon^2$ и ортогональный к L_1 и L_2. Возьмем в L_1 и L_2 множества A и B, построенные при доказательстве теоремы 2. Тогда $d^2(A, B + x) = \varepsilon^2 + \frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2)$ и $d^2(\operatorname{con} A, \operatorname{con} B + x) = \varepsilon^2$. Последнее равенство показывает, что неравенство (4) также точное. Аналогично можно показать точность неравенства (2).

З а м е ч а н и е 2. Легко видеть, что при $d_1 = 0$ теорема 1 эквивалентна теореме Юнга об описанном шаре (см. [3]).

З а м е ч а н и е 3. Результаты заметки легко обобщаются на случай действительного векторного пространства с заданной в нем билинейной формой.

1. *Ту Дж., Гонсалес Р.* Принципы распознавания образов.— М. : Мир, 1978.— 412 с.
2. *Rivlin T. J., Shapiro H. S.* A unified approach to certain problems of approximation and minimization // J. Soc. Ind. Appl. Math.— 1961.— **4**.— P. 670—699.
3. *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли и ее применения.— М : Мир, 1968.— 160 с.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1972.— 496 с.

Днепропетр. ун-т

Получено 02.08.85

УДК 517.5

С. Г. Дронов, А. А. Лигун

Двойственность для L-сплайнов

Пусть L_p, $p \in [1, \infty)$, — пространство измеримых, суммируемых с p-й степенью на $[0, 1]$ функций f с нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$; L_∞ — пространство измеримых, существенно ограниченных на $[0, 1]$ функций f с нормой $\|f\|_\infty = \operatorname{vrai} \sup \{|f(t)| \mid t \in [0, 1]\}$ и $p' : 1/p + 1/p' = 1$.

Обозначим через L_p^r, $p \in [1, \infty]$, $r = 1, 2, \ldots$, множество всех функций f, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} = f$) абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и $f^{(r)} \in L_p$, а через C^r, $r = 0, 1, 2, \ldots$, множество всех r раз непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций.

Пусть $\Delta_N = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1\}$ — произвольное разбиение отрезка $[0, 1]$ и $Q_N^r = \{\rho_i\}_{i=1}^{N-1}$, $1 \leqslant \rho_i \leqslant r - 1$. Положим $\Theta_N^r = (\Delta_N, Q_N^r)$. Обозначим $I_i = \{0, 1, 2, \ldots, p_i - 1\}$, $1 \leqslant p_i \leqslant r$, $i = 0, 1$, и $\mathcal{J}_i = \{0, 1, 2, \ldots, r - p_i - 2\}$, $i = 0, 1$. Наряду с набором Θ_N^r зададим набор $\Theta_L^r = (\Delta_L, Q_L^r)$, где $\Delta_L = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{L-1} < \tau_L = 1\}$ и $Q_L^r = \{\sigma_j\}_{j=1}^{L-1}$, $1 \leqslant \sigma_j \leqslant r - 1$.

Пусть $D^k = (d/dt)^k$, $a_k(t) \in C^k$, $k = \overline{0, r}$, $a_r(t) > 0$ $(\forall t)$ и $L_r(f, t) = \sum_{k=0}^r a_k(t) \times D^k f(t)$ — дифференциальный оператор. Оператор, формально сопряженный к оператору $L_r(f, t)$ обозначим через $L_r^*(f, t)$, т. е. положим $L_r^*(f, t) = \sum_{k=0}^r (-1)^k D^k [a_k(t) f(t)]$.

Функцию $s(t)$ будем называть L-сплайном по набору Θ_N^r, если на каждом из интервалов (t_{i-1}, t_i), $i=\overline{1,N}$, выполняется равенство $L_r(s,t)=0$ и $s^{(\nu)}(t_i+0)=s^{(\nu)}(t_i-0)=s^{(\nu)}(t_i)$, $\nu=\overline{0,r-\rho_i-2}$, $i=\overline{1,N-1}$. Множество всех таких сплайнов обозначим $S_{L_r}(\Theta_N^r)$.

Будем говорить, что сплайн $s(t)=s_{L_r}(g,\Theta_N^r,\Theta_L^r,I)\in S_{L_r}(\Theta_N^r)$ интерполирует функцию g по набору (Θ_L^r, I), если $s^{(\nu)}(\tau_j+0)=s^{(\nu)}(\tau_j-0)=g^{(\nu)}(\tau_j)$, $\nu=\overline{0,\sigma_j-1}$, $j=\overline{1,L-1}$, и $s^{(\nu)}(i)=g^{(\nu)}(i)$, $\nu\in I_i$, $i=0,1$.

Теорема. *Пусть функции $f, g\in L_1^r$ таковы, что сплайны $s_{L_r}(g,\Theta_N^r,\Theta_L^r,I)$ и $s_{L_r^*}(f,\Theta_L^r,\Theta_N^r,\mathcal{J})$ существуют. Тогда*

$$\int_0^1 [g(t)-s_{L_r}(g,\Theta_N^r,\Theta_L^r,I,t)]\,L_r^*(f,t)\,dt=$$
$$=\int_0^1 [f(t)-s_{L_r^*}(f,\Theta_L^r,\Theta_N^r,\mathcal{J},t)]\,L_r(g,t)\,dt. \tag{1}$$

Доказательство теоремы (как и доказательства приведенных в [1—3] результатов) проводится по схеме, предложенной в [4] (см. также [5, 6], с. 201-202).

В случае, когда $L_r=D^r$, теорема приведена в работах [1, 4, 5]. Если оператор L_r самосопряженный, в случаях интерполяции эрмитовыми сплайнами и простой интерполяции сплайнами минимального дефекта теорема содержится также в работах [2, 3].

Доказательство. Положим $\mu(t)=g(t)-s_{L_r}(g,\Theta_N^r,\Theta_L^r,I,t)$ и $\eta(t)=f(t)-s_{L_r^*}(f,\Theta_L^r,\Theta_N^r,\mathcal{J},t)$. Тогда

$$\mu^{(\nu)}(t_i+0)=\mu^{(\nu)}(t_i-0),\quad \nu=\overline{0,r-\rho_i-2},\ i=\overline{1,N-1}, \tag{2}$$

$$\mu^{(\nu)}(\tau_j+0)=\mu^{(\nu)}(\tau_j-0)=0,\quad \nu=\overline{0,\sigma_j-1},\ j=\overline{1,L-1}, \tag{3}$$

$$\mu^{(\nu)}(i)=0,\quad \nu\in I_i,\quad i=0,1, \tag{4}$$

$$\eta^{(r-\nu-1)}(\tau_j+0)=\eta^{(r-\nu-1)}(\tau_j-0),\quad \nu=\overline{\sigma_j,r-1},\ j=\overline{1,L-1}, \tag{5}$$

$$\eta^{(r-\nu-1)}(t_i+0)=\eta^{(r-\nu-1)}(t_i-0)=0,\quad \nu=\overline{r-\rho_i-1,r-1},\ i=\overline{1,N-1}, \tag{6}$$

$$\eta^{(r-\nu-1)}(i)=0,\quad \nu=\overline{p_i,r-1},\ i=0,1. \tag{7}$$

Положим $R_\nu(t)=\sum_{k=0}^{r-\nu-1}(-1)^k\{a_{\nu+k+1}(t)\,\eta(t)\}^{(k)}$, $\nu=\overline{0,\ r-1}$. Тогда в силу (5)

$$R_\nu(\tau_j+0)=R_\nu(\tau_j-0),\qquad \nu=\overline{\sigma_j,r-1},\qquad j=\overline{1,L-1}, \tag{8}$$

в силу (6)

$$R_\nu(t_i+0)=R_\nu(t_i-0)=0,\quad \nu=\overline{r-\rho_i-1,r-1},\ i=\overline{1,N-1}, \tag{9}$$

и в силу (7)

$$R_\nu(i)=0,\quad \nu=\overline{p_i,r-1},\quad i=0,1. \tag{10}$$

Пусть $\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_M$ — различные точки множества $\left(\bigcup_{j=0}^L\tau_j\right)\cup\left(\bigcup_{i=0}^N t_i\right)$ и $\Delta_M=\{0=\xi_0<\xi_1<\dots<\xi_{M-1}<\xi_M=1\}$. Тогда в силу равенства [7, с. 188] $\mu L_r^*(\eta)=\eta L_r(\mu)-D^1\sum_{\nu=0}^{r-1}\mu^{(\nu)}R_\nu$ получим $\int_0^1\mu(t)\,L_r^*(f,t)\,dt=A+\int_0^1\eta(t)\times L_r(g,t)\,dt$, где $A=A_0+A_M+\sum_{k=1}^{M-1}A_k$, $A_0=\sum_{\nu=0}^{r-1}\mu^{(\nu)}(0)\,R_\nu(0)$, $A_M=-\sum_{\nu=0}^{r-1}\mu^{(\nu)}(1)\,R_\nu(1)$, $A_k=\sum_{\nu=0}^{r-1}[\mu^{(\nu)}(\xi_k+0)\,R_\nu(\xi_k+0)-\mu^{(\nu)}(\xi_k-0)\times R_\nu(\xi_k-0)]$. В силу (4) и (10) $A_0=A_M=0$.

Пусть $\xi_k = t_i \in \Delta_N \setminus \Delta_L$. Тогда $R_\nu(t_i+0) = R_\nu(t_i-0) = R_\nu(t_i)$, следовательно, $A_k = \sum_{\nu=0}^{r-1} R_\nu(t_i)[\mu^{(\nu)}(t_i+0) - \mu^{(\nu)}(t_i-0)]$. Отсюда и из (2), (9) вытекает, что в этом случае $A_k = 0$. Аналогично проверяется, что $A_k = 0$, если $\xi_k = \tau_j \in \Delta_L \setminus \Delta_N$. Пусть $\xi_k = t_i = \tau_j \in \Delta_N \cap \Delta_L$. Тогда в силу (8), (9), (2) $A_k = \sum_{\nu=0}^{r-\rho_i-2} \mu^{(\nu)}(\xi_k)[R_\nu(\xi_k+0) - R_\nu(\xi_k-0)]$. Из (3) следует, что $A_k = 0$, $k = \overline{1, M-1}$. Тем самым теорема доказана.

Следствие 1. *Если наборы Θ_N^r, Θ_L^r, I и $\mathcal{J}$ таковы, что для любой функции $g \in L_1^r$ сплайн $s_{L_r}(g, \Theta_N^r, \Theta_L^r, I)$ существует и единствен, то для любой функции $f \in L_1^r$ сплайн $s_{L_r^*}(f, \Theta_L^r, \Theta_N^r, \mathcal{J})$ существует и единствен (и наоборот) и выполняется равенство* (1).

Доказательство. Предположим, что для любой функции $g \in L_1^r$ сплайн $s_{L_r}(g, \Theta_N^r, \Theta_L^r, I)$ существует и единствен. Тогда пространство $S_{L_r^*}(\Theta_L^r)$ является $\sum_{i=1}^{N-1} \rho_i + 2r - p_0 - p_1$-мерным, что влечет равенство $\sum_{j=1}^{L-1} \sigma_j + p_0 + p_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \rho_i + 2r - p_0 - p_1$. Из этого равенства следует, что размерность пространства $S_{L_r^*}(\Theta_L^r)$ равна $\sum_{j=1}^{L-1} \sigma_j + p_0 + p_1$. Поэтому, для того чтобы доказать, что для любой функции $f \in L_1^r$ интерполяционный сплайн $S_{L_r^*}(f, \Theta_L^r, \Theta_N^r, \mathcal{J})$ существовал и был единствен, достаточно показать, что не существует отличного от тождественного нуля сплайна $s_* \in S_{L_r^*}(\Theta_L^r)$ такого, что $s_*(t) \equiv s_{L_r^*}(0, \Theta_L^r, \Theta_N^r, \mathcal{J}, t)$. Предположим противное. Тогда в силу равенства (1) для любой функции $g \in L_1^r$ выполняется равенство $\int_0^1 s_*(t) L_r(g, t)\, dt \equiv 0$, что невозможно.

Обозначим через $W_p(L_r)$, $p \in [1, \infty]$, множество всех функций $g \in L_p^r$ таких, что $\| L_r(g) \|_p \leqslant 1$. Из теоремы и равенства $\sup \left\{ \int_0^1 g(t) f(t)\, dt \mid \| g \|_p \leqslant 1 \right\} = \| f \|_{p'}$ непосредственно вытекает такое следствие.

Следствие 2. *Пусть для любой функции $g \in L_1^r$ интерполяционный сплайн $s_{L_r}(g, \Theta_N^r, \Theta_L^r, I)$ существует и единствен* (а следовательно, для любой функции $f \in L_1^r$ интерполяционный сплайн $s_{L_r^*}(f, \Theta_L^r, \Theta_N^r, \mathcal{J})$ также существует и единствен). *Тогда для любых $p, q \in [1, \infty]$ выполняется равенство* $\sup \{ \| g - s_{L_r}(g, \Theta_N^r, \Theta_L^r, I) \|_q \mid g \in W_p(L_r) \} = \sup \{ \| f - s_{L_r^*}(l, \Theta_L^r,$

$$\Theta_N^r, \mathcal{J}) \|_{p'} \mid f \in W_{q'}(L_r^*) \}.$$

Замечание. Результаты, аналогичные теореме и следствию 1, справедливы также в случае интерполирования периодических функций периодическими сплайнами.

1. *Лигун А. А.* Об уклонении интерполяционных сплайнов на классах дифференцируемых функций // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям.— Днепропетровск : Днепропетр. ун-т, 1985.— С. 25—31.
2. *Шумейко А. А.* Интерполирование функций эрмитовыми L-сплайнами // Там же.— 1979.— С. 126—131.
3. *Шумейко А. А.* О приближении функций локальными L-сплайнами // Там же.— 1982.— С. 72—79.
4. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А.* Об оценке погрешности сплайн-интерполяции в интегральной метрике // Укр. мат. журн.— 1981.— **33**, № 3.— С. 391—394.
5. *Лигун А. А.* Об одном свойстве интерполяционных сплайн-функций // Укр. мат. журн.— 1980.— **32**, № 4.— С. 507—514.
6. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.— М. : Наука, 1984.— 352 с.
7. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения.— М. : Мир, 1972.— 316 с.

Днепродзерж. индустр. ин-т

Получено 08.07.85,
после доработки — 27.01.86