УДК 519.21

Ю. Н. Линьков, д-р физ.-мат. наук
(Ин-т. прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ РАЗЛИЧЕНИЯ СЧИТАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

The general limit theorem on probability of large deviations of the logarithm of the likelihood ratio under the null hypothesis and under alternative is proved. Weaker versions of the theorem on large deviations are obtained in predictable terms for the problem of distinguishing counting processes. The case of counting processes with deterministic compensators is investigated.

Доведено загальну граничну теорему для ймовірностей великих відхилень логарифма відношення правдоподібності з нульовою гіпотезою та з альтернативою. Одержано більш слабкі варіанти теореми про великі відхилення в передбачених термінах у задачі розрізнення лічильних процесів. Досліджено випадок лічильних процесів з детермінованими компенсаторами.

1. Введение. Предельные теоремы для локальных плотностей мер играют важную роль в асимптотических методах математической статистики [1–6]. Среди этих теорем заметное место занимают теоремы о больших уклонениях для логарифма локальной плотности мер [3, 5, 6]. Для случайных процессов теоремы о больших уклонениях для логарифма локальной плотности мер рассматривались лишь в частных случаях процессов, входящих в класс квазинепрерывных слева семимартингалов [5].

Настоящая работа посвящена теоремам о больших уклонениях для логарифма локальной плотности мер, порождаемых считающими процессами. При этом допускается, что компенсаторы считающих процессов могут иметь разрывы, т. е. считающие процессы могут не быть квазинепрерывными слева. Предельные теоремы о больших уклонениях в случае квазинепрерывных слева считающих процессов ранее рассматривались и их можно найти в монографии [5].

2. Интегралы Хеллингера и процессы Хеллингера. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P}, \tilde{\boldsymbol{P}})$ — стохастический базис с фильтрацией $\boldsymbol{F} = (\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ и с двумя вероятностными мерами $\boldsymbol{P}$ и $\tilde{\boldsymbol{P}}$, а $\boldsymbol{P}^t$ и $\tilde{\boldsymbol{P}}^t$ — сужения мер $\boldsymbol{P}$ и $\tilde{\boldsymbol{P}}$ на σ-алгебру $\mathfrak{F}_t$. Пусть $\xi = (\xi_t)_{t\geq 0}$ — считающий процесс, распределение которого задается мерой $\boldsymbol{P}$ (соответственно $\tilde{\boldsymbol{P}}$), если введена гипотеза H (соответственно $\tilde{H}$). Рассмотрим задачу проверки гипотез H и $\tilde{H}$ по наблюдениям $\xi^t = (\xi_s)_{0\leq s\leq t}$ считающего процесса ξ. Обозначим через $\nu = (\nu_t)_{t\geq 0}$ (соответственно $\tilde{\nu} = (\tilde{\nu}_t)_{t\geq 0}$) компенсатор процесса ξ относительно меры $\boldsymbol{P}$ (соответственно $\tilde{\boldsymbol{P}}$). Известно [7], что если $\tilde{\boldsymbol{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \boldsymbol{P}$, то существует единственный (с точностью до $\boldsymbol{P}$-неразличимости) $\boldsymbol{P}$-мартингал $z = (z_t)_{t\geq 0}$, где $z_t = d\tilde{\boldsymbol{P}}^t/d\boldsymbol{P}^t$, называемый процессом локальной плотности меры $\tilde{\boldsymbol{P}}$ относительно меры $\boldsymbol{P}$, и

$$z = \exp\left\{ \ln\lambda\circ\xi + (1-\lambda)\circ\nu^c + \sum_{s\leq\cdot} (1-\Delta\xi_s)\ln\frac{1-\Delta\tilde{\nu}_s}{1-\Delta\nu_s} \right\}. \tag{1}$$

Здесь ν^c — непрерывная часть ν, а λ — предсказуемый процесс такой, что $\tilde{\nu} = \lambda\circ\nu$ ($\tilde{P}$-п. н.).

Пусть $Q = (\boldsymbol{P} + \tilde{\boldsymbol{P}})/2$. Обозначим через $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_t)_{t\geq 0}$ (соответственно $\tilde{\mathfrak{z}} = (\tilde{\mathfrak{z}}_t)_{t\geq 0}$) процесс локальной плотности меры $\boldsymbol{P}$ (соответственно $\tilde{\boldsymbol{P}}$) относительно меры Q. Очевидно, если $\tilde{\boldsymbol{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \boldsymbol{P}$, то $z = \tilde{\mathfrak{z}}/\mathfrak{z}$ ($\boldsymbol{P}$-п. н.). Для всех $t \in R_+$ и $\varepsilon \in R^1$ введем величину $H_t(\varepsilon) = H_t(\varepsilon; \tilde{\boldsymbol{P}}, \boldsymbol{P})$ (называемую интегралом

Хеллингера порядка ε для мер $\tilde{P}^t$ и P^t), положив

$$H_t(\varepsilon; \tilde{P}, P) = H(\varepsilon; \tilde{P}^t, P^t) = E_Q\, Y_t(\varepsilon), \tag{2}$$

где $Y_t(\varepsilon) = \tilde{\mathfrak{z}}_t^{\varepsilon}\, \mathfrak{z}_t^{1-\varepsilon}$. Если $\varepsilon < 0$ и $\tilde{\mathfrak{z}}_t = 0$, то полагаем $Y_t(\varepsilon) = 0$ (соответственно $Y_t(\varepsilon) = \infty$), если $\mathfrak{z}_t = 0$ (соответственно $\mathfrak{z}_t > 0$). Если $\varepsilon = 0$, то полагаем $Y_t(\varepsilon) = \mathfrak{z}_t I\ (\tilde{\mathfrak{z}}_t > 0)$. Случай $\varepsilon > 1$ и $\varepsilon = 1$ аналогичен. Здесь символ E_Q означает математическое ожидание по мере Q. Через E и $\tilde{E}$ будем обозначать математическое ожидание по мерам P и $\tilde{P}$ соответственно.

Введем следующие условия:

H_0) существует $\varepsilon_0 < 0$ такое, что $H_t(\varepsilon_0) < \infty$ для всех $t \in R_+$;

H_1) существует $\varepsilon_1 > 1$ такое, что $H_t(\varepsilon_1) < \infty$ для всех $t \in R_+$;

H) выполняются оба условия H_0 и H_1.

Заметим, что $H_t(\varepsilon) \le 1$ для $\varepsilon \in (0, 1)$ при всех $t \in R_+$. Если же выполняется условие H_0, то $P \overset{\text{loc}}{\ll} \tilde{P}$, и, значит, $H_t(0) = 1$ для всех $t \in R_+$. А если выполняется условие H_1, то $\tilde{P} \overset{\text{loc}}{\ll} P$, и, значит, $H_t(1) = 1$ для всех $t \in R_+$.

Для любых ε, для которых интеграл Хеллингера $H_t(\varepsilon)$ конечен при всех $t \in R_+$, ведем предсказуемый неубывающий процесс $h(\varepsilon) = h(\varepsilon; \tilde{P}, P)$, $h_0(\varepsilon) = 0$, называемый процессом Хеллингера порядка ε для мер $\tilde{P}$ и P [7, 8]. Заметим, что процесс $h(\varepsilon)$ определяется с помощью разложения Дуба–Мейера для процесса $Y(\varepsilon)$. При этом, если выполняется условие H_0 то $h(0) = 0$, а если выполняется условие H_1, то $h(1) = 0$.

Следующие две леммы описывают связь между интегралами Хеллингера $H_t(\varepsilon)$ и процессами Хеллингера $h(\varepsilon)$.

Лемма 1. *Если выполняется условие* H_0, *то для любых* $\varepsilon \in (\varepsilon_0, 1)\setminus\{0\}$ *справедлива оценка*

$$H_t(\varepsilon) \le \left(E\, \mathcal{E}_t^{q/p}(-(\operatorname{sign}\delta)\, h(\delta))\right)^{1/q}, \tag{3}$$

где $p = \delta/\varepsilon$, $q = \delta/(\delta - \varepsilon)$, δ *— любая постоянная такая, что* $\delta \in (\varepsilon, 1)$ *при* $\varepsilon \in (0, 1)$ *и* $\delta \in (\varepsilon_0, \varepsilon)$ *при* $\varepsilon \in (\varepsilon_0, 0)$, а $\mathcal{E}_t(G)$ *— экспонента Долеан–Дэд*

$$\mathcal{E}_t(G) = e^{G_t} \prod\nolimits_{0<s\le t} (1 - \Delta G_s) e^{-\Delta G_s}. \tag{4}$$

***Замечание* 1.** Условие H_0 используется лишь для получения оценки (3) при $\varepsilon < 0$. Если выполняется условие H_1, то можно получить оценку (3) и при $\varepsilon > 1$ (мы ее не приводим, так как ниже она не используется). Кроме того, ее можно вывести из (3), используя очевидное равенство $H_t(\varepsilon; \tilde{P}, P) = H_t(1-\varepsilon; P, \tilde{P})$.

Лемма 2. *Если выполняется условие* H *и компенсаторы* ν *и* $\tilde{\nu}$ *являются детерминированными функциями, то для любого* $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ *выполняется равенство*

$$H_t(\varepsilon) = \mathcal{E}_t(-s(\varepsilon) h(\varepsilon)), \quad t \in R_+, \tag{5}$$

где $s(\varepsilon) = 1$ *при* $\varepsilon \in [0, 1]$ *и* $s(\varepsilon) = -1$ *при* $\varepsilon \overline{\in} [0, 1]$.

Доказательства лемм 1 и 2 проводятся аналогично доказательствам аналогичных утверждений из [7, 8] с соответствующими изменениями и поэтому опускаются.

Следующая лемма дает версию процесса Хеллингера $h(\varepsilon)$ при условиях локальной абсолютной эквивалентности мер $\boldsymbol{P}$ и $\tilde{\boldsymbol{P}}$.

Лемма 3. *Если выполняется условие* $\boldsymbol{H}$, *то одна из версий процесса Хеллингера* $h(\varepsilon)$ *порядка* $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ *имеет вид*

$$h(\varepsilon) = s(\varepsilon)\left\{[\varepsilon(\lambda-1)-(\lambda^{\varepsilon}-1)]\circ\nu^c + \sum\nolimits_{s\leq\cdot} f(\varepsilon; \Delta\nu_s, \Delta\tilde{\nu}_s)\right\}, \tag{6}$$

где

$$f(\varepsilon; x, y) = 1 - x\left(\frac{y}{x}\right)^{\varepsilon} - (1-x)\left(\frac{1-y}{1-x}\right)^{\varepsilon}. \tag{7}$$

Доказательство. При $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$ равенство (6) тривиально. Поэтому пусть сначала $\varepsilon \in (0, 1)$. Тогда из [7] имеем

$$h(\varepsilon) = \varphi_\varepsilon(\tilde{f}, f)\bullet\bar{\nu} + \sum\nolimits_{s\leq\cdot} \varphi_\varepsilon(1-\Delta\tilde{\nu}_s, 1-\Delta\nu_s). \tag{8}$$

где $\bar{\nu} = \nu + \tilde{\nu}$, $\nu = f\bullet\bar{\nu}$, $\tilde{\nu} = \tilde{f}\bullet\bar{\nu}$, и

$$\varphi_\varepsilon(x, y) = \varepsilon x + (1-\varepsilon)y - x^{\varepsilon}y^{1-\varepsilon}. \tag{9}$$

Поскольку в силу условий леммы $\tilde{\boldsymbol{P}} \overset{\text{loc}}{\sim} \boldsymbol{P}$, то $\bar{\nu} = (1/f)\bullet\nu$, $\lambda = \tilde{f}/f$ ($\boldsymbol{Q}$-п. н.), и, значит, справедливо равенство

$$\varphi_\varepsilon(\tilde{f}, f)\bullet\bar{\nu} = [\varepsilon(\lambda-1)-(\lambda^{\varepsilon}-1)]\bullet\nu \quad (\boldsymbol{Q}\text{-п. н.}). \tag{10}$$

Кроме того, очевидно,

$$\sum_{s\leq\cdot}\left\{[\varepsilon(\lambda_s-1)-(\lambda_s^{\varepsilon}-1)]\Delta\nu_s + \varphi_\varepsilon(1-\Delta\tilde{\nu}_s, 1-\Delta\nu_s)\right\} = \sum_{s\leq\cdot} f(\varepsilon; \Delta\nu_s, \Delta\tilde{\nu}_s). \tag{11}$$

Теперь из равенств (8)–(11) следует искомое равенство (6) при $\varepsilon \in (0, 1)$.

Пусть теперь $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_1)\setminus[0, 1]$. Тогда, используя рассуждения из [8], имеем

$$h(\varepsilon) = -\left\{\varphi_\varepsilon(\tilde{f}, f)\bullet\bar{\nu} + \sum\nolimits_{s\leq\cdot} \varphi_\varepsilon(1-\Delta\tilde{\nu}_s, 1-\Delta\nu_s)\right\}, \tag{12}$$

где $\tilde{f}$, f и $\bar{\nu}$ определены выше, а $\varphi_\varepsilon(x, y)$ задано равенством (9). Аналогично случаю $\varepsilon \in (0, 1)$ из (12) выводим (6) при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)\setminus[0, 1]$. Лемма 3 доказана.

3. Предельная теорема о больших уклонениях. Введем следующее условие:

$\boldsymbol{H}^*$) существует интервал $(\varepsilon_-, \varepsilon_+)$, содержащий отрезок $[0, 1]$ и такой, что для каждого $\varepsilon \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$ существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1}\ln H_t(\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{13}$$

где $\psi_t \to \infty$ при $t \to \infty$, а $c(\varepsilon)$ — строго выпуклая и дифференцируемая функция на $(\varepsilon_-, \varepsilon_+)$.

Обозначим

$$\gamma_0 = c'(0), \quad \gamma_1 = c'(1), \quad \gamma_- = \lim_{\varepsilon\downarrow\varepsilon_-} c'(\varepsilon), \quad \gamma_+ = \lim_{\varepsilon\uparrow\varepsilon_+} c'(\varepsilon).$$

Справедлива следующая теорема о больших уклонениях для $\lambda_t = \ln z_t$, где

z — локальная плотность меры $\tilde{P}$ относительно меры P, задаваемая равенством (1).

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* H^*. *Тогда для любого* $\gamma \in (\gamma_0, \gamma_+)$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln P\{\psi_t^{-1}\Lambda_t > \gamma\} = -I(\gamma) \in (-\infty, 0), \tag{14}$$

а для любого $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_1)$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \tilde{P}\{\psi_t^{-1}\Lambda_t < \gamma\} = -I(\gamma) + \gamma \in (-\infty, 0), \tag{15}$$

где $I(\gamma) = \gamma\varepsilon(\gamma) - c(\varepsilon(\gamma))$, *а* $\varepsilon(\gamma)$ *— единственное решение уравнения* $c'(\varepsilon) = \gamma$.

Доказательство. Соотношение (14) хорошо известно (см. лемму 2.3.4 в [5] и лемму 1 в [9]). Для доказательства соотношения (15) применим соотношение (14) к $\tilde{\Lambda}_t = \ln \tilde{z}_t$, где $\tilde{z}$ — локальная плотность меры P относительно меры $\tilde{P}$. Для этого введем интеграл Хеллингера порядка ε в виде

$$\tilde{H}_t(\varepsilon) = \tilde{H}_t(\varepsilon; P, \tilde{P}) = E_Q\, \mathfrak{z}_t^{\varepsilon} \tilde{\mathfrak{z}}_t^{1-\varepsilon}.$$

Так как, очевидно, $\tilde{H}_t(\varepsilon) = H_t(1-\varepsilon)$, то из условия H^* следует, что для любого $\varepsilon \in (\tilde{\varepsilon}_-, \tilde{\varepsilon}_+)$, где $\tilde{\varepsilon}_- = 1 - \varepsilon_+$, $\tilde{\varepsilon}_+ = 1 - \varepsilon_-$, существует конечный предел

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \tilde{H}_t(\varepsilon) = \tilde{c}(\varepsilon).$$

В силу (13) $\tilde{c}(\varepsilon) = c(1-\varepsilon)$, а функция $\tilde{c}(\varepsilon)$ строго выпукла и дифференцируема на $(\tilde{\varepsilon}_-, \tilde{\varepsilon}_+)$. Обозначая

$$\tilde{\gamma}_0 = \tilde{c}'(0), \quad \tilde{\gamma}_1 = \tilde{c}'(1), \quad \tilde{\gamma}_- = \lim_{\varepsilon\downarrow\tilde{\varepsilon}_-} \tilde{c}'(\varepsilon), \quad \tilde{\gamma}_+ = \lim_{\varepsilon\uparrow\tilde{\varepsilon}_+} \tilde{c}'(\varepsilon),$$

из соотношения (14) для любого $\gamma \in (\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_+)$ получаем

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \tilde{P}\{\psi_t^{-1}\tilde{\Lambda}_t > \gamma\} = -\tilde{I}(\gamma) \in (-\infty, 0),$$

где $\tilde{I}(\gamma) = \gamma\tilde{\varepsilon}(\gamma) - \tilde{c}(\tilde{\varepsilon}(\gamma))$, а $\tilde{\varepsilon}(\gamma)$ — единственное решение уравнения $\tilde{c}'(\varepsilon) = \gamma$. Так как $\tilde{\Lambda}_t = -\Lambda_t$, то отсюда для любого $\gamma \in (-\tilde{\gamma}_+, -\tilde{\gamma}_0)$ имеем

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \tilde{P}\{\psi_t^{-1}\Lambda_t < \gamma\} = -\tilde{I}(-\gamma). \tag{16}$$

В силу равенства $\tilde{c}(\varepsilon) = c(1-\varepsilon)$ имеем $\tilde{c}'(\varepsilon) = -c'(1-\varepsilon)$, и, значит, $\tilde{\varepsilon}(\gamma) = 1 - \varepsilon(-\gamma)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\tilde{I}(-\gamma) &= -\gamma\tilde{\varepsilon}(-\gamma) - \tilde{c}(\tilde{\varepsilon}(-\gamma)) = -\gamma\tilde{\varepsilon}(-\gamma) - c(1-\tilde{\varepsilon}(-\gamma)) = \\ &= -\gamma(1-\varepsilon(\gamma)) - c(\varepsilon(\gamma)) = I(\gamma) - \gamma.\end{aligned} \tag{17}$$

Учитывая теперь, что $\tilde{\gamma}_+ = -\gamma_-$, а $\tilde{\gamma}_0 = -\gamma_1$, из (16) и (17) получаем искомое соотношение (15) для любого $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_1)$. Теорема 1 доказана.

Хорошо известная теорема о больших уклонениях для Λ_t (лемма 2.3.4 в [5] и лемма 1 в [9]) не содержит утверждения (15) и в условии H^* требует лишь, чтобы интервал $(\varepsilon_-, \varepsilon_+)$ содержал точку O. Такие теоремы и их более слабые варианты используются при исследовании асимптотического поведения критериев Неймана–Пирсона с уровнем, который не очень быстро стремится к нулю [5]. В следующем пункте рассмотрим такие теоремы и сформулируем их в предсказуемых терминах, использовав процессы Хеллингера.

4. Предельные теоремы о больших уклонениях в предсказуемых терминах. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* $\boldsymbol{H}_0$. *Если*

$$\varlimsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{\varepsilon \psi_t} \ln \boldsymbol{E}\, \mathcal{E}_t(-h(\varepsilon)) \le -1, \tag{18}$$

где ψ_t *— положительная функция такая, что* $\psi_t \to \infty$ *при* $t \to \infty$, *то*

$$\varlimsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{\varepsilon \psi_t} \ln H_t(\varepsilon) \le -1. \tag{19}$$

Если же

$$\varliminf_{\varepsilon \uparrow 0} \varliminf_{t \to \infty} \frac{1}{\varepsilon \chi_t} \ln \boldsymbol{E}\, \mathcal{E}_t(h(\varepsilon)) \ge -1, \tag{20}$$

где χ_t *— положительная функция такая, что* $\chi_t \to \infty$ *при* $t \to \infty$, *то*

$$\varliminf_{\varepsilon \uparrow 0} \varliminf_{t \to \infty} \frac{1}{\varepsilon \chi_t} \ln H_t(\varepsilon) \ge -1. \tag{21}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.3 из [8] с соответствующими изменениями. При этом необходимо учесть неравенство (3), из которого в силу неравенства Иенсена при достаточно малых ε имеем

$$H_t(\varepsilon) \le \left(\boldsymbol{E}\, \mathcal{E}_t(-(\operatorname{sign}\delta)\, h(\delta))\right)^{1/p}.$$

Из этого неравенства и из условий (18) и (20) вытекают искомые соотношения (19) и (20) соответственно.

В некоторых случаях полезна следующая теорема, которая устанавливает справедливость соотношений (19) и (21) при более детальных ограничениях на процесс Хеллингера $h(\varepsilon)$.

Теорема 3. *Пусть выполняется условие* $\boldsymbol{H}_0$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) *если* $D_{t,\varepsilon}$ *— множество из* $\mathfrak{F}_t$ *при всех* $\varepsilon \in (0, 1)$ *и* $t \in R_+$ *такое, что*

$$\varlimsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{\varepsilon \psi_t} \ln \boldsymbol{P}(D^c_{t,\varepsilon}) \le -1, \tag{22}$$

$$\varlimsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varlimsup_{t \to \infty} \frac{1}{\varepsilon \psi_t} \sup_{D_{t,\varepsilon}} \ln \mathcal{E}_t(-h(\varepsilon)) \le -1, \tag{23}$$

где $D^c_{t,\varepsilon} = \Omega \setminus D_{t,\varepsilon}$, *а* $\psi_t \to \infty$ *при* $t \to \infty$, *то справедливо соотношение* (19);

б) *если* $D_{t,\varepsilon}$ *— множество из* $\mathfrak{F}_t$ *при всех* $\varepsilon \in (\varepsilon_0, 0)$ *и* $t \in R_+$ *такое, что*

$$\varliminf_{\varepsilon \uparrow 0} \varliminf_{t \to \infty} \frac{1}{\varepsilon \chi_t} \ln \tilde{\boldsymbol{E}}^{\,t,\varepsilon} I(D^c_{t,\varepsilon})\, \mathcal{E}_t(h(\varepsilon)) \ge -1, \tag{24}$$

$$\varliminf_{\varepsilon \uparrow 0} \varliminf_{t \to \infty} \frac{1}{\varepsilon \chi_t} \sup_{D_{t,\varepsilon}} \ln \mathcal{E}_t(h(\varepsilon)) \ge -1, \tag{25}$$

где $\chi_t \to \infty$ *при* $t \to \infty$, $\tilde{\boldsymbol{E}}^{\,t,\varepsilon}$ *означает математическое ожидание по мере* $\tilde{\boldsymbol{P}}^{\,t,\varepsilon}$, $d\tilde{\boldsymbol{P}}^{\,t,\varepsilon} = N_t(\varepsilon)\, d\boldsymbol{Q}$, *а* $N(\varepsilon)$ *— локальный* $\boldsymbol{Q}$*-мартингал из мультипликативного разложения*

$$Y(\varepsilon) = N(\varepsilon)\, \mathcal{E}(h(\varepsilon)), \tag{26}$$

то справедливо соотношение (21).

Доказательство. Используя мультипликативное разложение $Y(\varepsilon)$ при $\varepsilon \in (0, 1)$ (см. утверждение 5.4.16 из [7]), имеем

$$H_t(\varepsilon) = \boldsymbol{E}_Q I(D_{t,\varepsilon}) N_t(\varepsilon) \mathcal{E}_t(-h(\varepsilon)) + \boldsymbol{E} I(D_{t,\varepsilon}^c) z_t^\varepsilon \le \sup_{D_{t,\varepsilon}} \mathcal{E}_t(-h(\varepsilon)) + (\boldsymbol{P}(D_{t,\varepsilon}^c))^{1-\varepsilon}, \tag{27}$$

где учтено, что $\boldsymbol{E}_Q N_t(\varepsilon) \le 1$ и $\boldsymbol{E} z_t = 1$. Используя теперь элементарное неравенство

$$\ln(x+y) \le \ln 2 + (\ln x) \vee (\ln y), \quad x > 0,\ y > 0, \tag{28}$$

из (22), (23) и (27) получаем (19).

Аналогично оценке (27) с помощью мультипликативного разложения (26) при $\varepsilon \in (\varepsilon_0, 0)$ получаем

$$H_t(\varepsilon) \le \sup_{D_{t,\varepsilon}} \mathcal{E}_t(h(\varepsilon)) + \tilde{\boldsymbol{E}}^{t,\varepsilon} I(D_{t,\varepsilon}^c)\, \mathcal{E}_t(h(\varepsilon)).$$

Отсюда в силу условий (24), (25) и неравенства (28) вытекает соотношение (21). Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Справедливость условий (22) и (23) ранее была установлена для процессов восстановления с непрерывными компенсаторами в работе [10] (см. также теорему 3.5.9 из [5]).

5. Считающие процессы с детерминированными компенсаторами. Пусть выполняется условие $\boldsymbol{H}$ и компенсаторы ν и $\tilde{\nu}$ детерминированы. Обозначим $D(\nu) = \{t \in R_+ \colon \Delta\nu_t > 0\}$ и предположим, что $0 < \lambda_t < \infty$ для всех $t \in R_+$. Тогда очевидно, что $D(\tilde{\nu}) = D(\nu)$. В силу леммы 3 при $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ имеем

$$\ln \mathcal{E}_t(-s(\varepsilon) h(\varepsilon)) = -s(\varepsilon)\,[\varepsilon(\lambda - 1) - (\lambda^\varepsilon - 1)] \circ \nu_t^c + \sum_{s \le t} \ln[1 - f(\varepsilon; \Delta\nu_s, \Delta\tilde{\nu}_s)], \tag{29}$$

при $t \in R_+$. Предположим, что существуют пределы

$$\lim_{\substack{t \in R_+ \setminus D(\nu),\\ t \to \infty}} \lambda_t = \lambda, \qquad \lim_{\substack{t \in D(\nu),\\ t \to \infty}} \Delta\nu_t = x, \qquad \lim_{\substack{t \in D(\nu),\\ t \to \infty}} \Delta\tilde{\nu}_t = y.$$

Обозначим через ζ_t число точек в множестве $D(\nu) \cap [0, t]$. Очевидно, ζ_t — число скачков компенсатора ν (а значит, и компенсатора $\tilde{\nu}$) на отрезке времени $[0, t]$.

Следующая теорема содержит условия справедливости соотношения (13) и указывает вид нормировки ψ_t и предельной функции $c(\varepsilon)$.

Теорема 4. *Пусть выполняются указанные выше в этом пункте условия,* $0 < x < 1$ *и* $0 < y < 1$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Пусть* $\lambda = \infty$, $\tilde{\nu}_t^c \to \infty$ *при* $t \to \infty$ *и существует предел* $\lim_{t \to \infty} \zeta_t^{-1} \tilde{\nu}_t^c = M_1$. *Тогда при* $\varepsilon \in (\varepsilon_0, 1)$ *выполняется соотношение* (13), *в котором* $\psi_t = \tilde{\nu}_t^c$ *в случае* $M_1 = \infty$ *и* $\psi_t = \zeta_t$ *в случае* $M_1 \in [0, \infty)$, *а функция* $c(\varepsilon)$ *имеет вид*

$$c(\varepsilon) = \begin{cases} -\varepsilon, & \text{если} \quad M_1 = \infty, \\ -\varepsilon M_1 + \ln[1 - f(\varepsilon; x, y)], & \text{если} \quad M_1 \in [0, \infty). \end{cases}$$

2. *Пусть* $\lambda \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $\nu_t^c \to \infty$ *при* $t \to \infty$ *и существует предел*

$\lim\limits_{t\to\infty} \zeta_t^{-1} \nu_t^c = M_2$. *Тогда при* $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ *выполняется соотношение* (13), *в котором* $\psi_t = \nu_t^c$ *в случае* $M_2 = \infty$ *и* $\psi_t = \zeta_t$ *в случае* $M_2 \in [0, \infty)$, *а функция* $c(\varepsilon)$ *имеет вид*

$$c(\varepsilon) = \begin{cases} -\left[\varepsilon(\lambda-1) - (\lambda^{\varepsilon}-1)\right], & \text{если} \quad M_2 = \infty, \\ -\left[\varepsilon(\lambda-1) - (\lambda^{\varepsilon}-1)\right] M_2 + \ln[1-f(\varepsilon; x, y)], & \text{если} \quad M_2 \in [0, \infty). \end{cases}$$

3. *Пусть* $\lambda = 1$, $I(|\ln\lambda| \le 1)\ln^2\lambda \circ \nu_t^c \to \infty$ *при* $t\to\infty$ *и существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} \zeta_t^{-1} I(|\ln\lambda| \le 1)\ln^2\lambda \circ \nu_t^c = M_3 .$$

Тогда при $\varepsilon \in (\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ *выполняется соотношение* (13), *в котором* $\psi_t = I(|\ln\lambda| \le 1)\ln^2\lambda \circ \nu_t^c$ *в случае* $M_3 = \infty$ *и* $\psi_t = \zeta_t$ *в случае* $M_3 \in [0, \infty)$, *а функция* $c(\varepsilon)$ *имеет вид*

$$c(\varepsilon) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\varepsilon(1-\varepsilon), & \text{если} \quad M_3 = \infty, \\ -\frac{1}{2}\varepsilon(1-\varepsilon) M_3 + \ln[1-f(\varepsilon; x, y)], & \text{если} \quad M_3 \in [0, \infty). \end{cases}$$

Доказательство. В силу леммы 2 для доказательства соотношения (13) достаточно установить соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathcal{E}_t(-s(\varepsilon)h(\varepsilon)) = c(\varepsilon). \tag{30}$$

1. Если $M_1 = \infty$, то при $\varepsilon \in (\varepsilon_0, 1)$ равенство (29) влечет

$$\ln \mathcal{E}_t(-s(\varepsilon)h(\varepsilon)) = -\varepsilon\tilde{\nu}_t^c + o(\tilde{\nu}_t^c), \quad t\to\infty.$$

Отсюда следует, что соотношение (30) выполняется с $\psi_t = \tilde{\nu}_t^c$ и $c(\varepsilon) = -\varepsilon$. Если $0 \le M_1 < \infty$, то при $\varepsilon \in (\varepsilon_0, 1)$ из (29) имеем

$$\ln \mathcal{E}_t(-s(\varepsilon)h(\varepsilon)) = [-\varepsilon M_1 + \ln(1-f(\varepsilon; x, y))]\,\zeta_t + o(\zeta_t).$$

Отсюда вытекает справедливость соотношения (30) с $\psi_t = \zeta_t$ и $c(\varepsilon) = -\varepsilon M_1 + \ln[1-f(\varepsilon; x, y)]$.

Утверждение 2 доказывается аналогично.

3. Пусть $\lambda = 1$. Зафиксируем $\delta > 0$ так, чтобы $1-\delta > 1/e$. Так как $\lambda = 1$, то существует $s_0 = s_0(\delta)$ такое, что $|\lambda_s - 1| < \delta$ для всех $s > s_0$. Для всех $t > s_0$ имеем

$$h_t^c(\varepsilon) = h_{s_0}^c(\varepsilon) + s(\varepsilon)\int_{s_0}^{t}[\varepsilon(\lambda_s-1)-(\lambda_s^{\varepsilon}-1)]\,d\nu_s^c = h_{s_0}^c(\varepsilon) +$$

$$+ s(\varepsilon)\left\{\varepsilon\int_{s_0}^{t}(\lambda_s - 1 - \ln\lambda_s)\,d\nu_s^c - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_{s_0}^{t}\ln^2\lambda_s\,d\nu_s^c - \frac{\varepsilon^3}{6}\int_{s_0}^{t}\lambda_s^{\tilde{\varepsilon}}\ln^3\lambda_s\,d\nu_s^c\right\}, \tag{31}$$

где $h^c(\varepsilon)$ — непрерывная часть $h(\varepsilon)$, $\tilde{\varepsilon}$ — средняя точка между 0 и ε. Так как $\lambda_s \to 1$ при $s\to\infty$, то при $t\to\infty$

$$\int_{s_0}^{t}(\lambda_s - 1 - \ln\lambda_s)\,d\nu_s^c = \frac{1}{2}\int_{s_0}^{t}(\lambda_s-1)^2\,d\nu_s^c\,(1+o(1)), \tag{32}$$

$$\int_{s_0}^{t} \ln^2 \lambda_s \, d\nu_s^c = \int_{s_0}^{t} (\lambda_s - 1)^2 d\nu_s^c \, (1 + o(1)), \tag{33}$$

$$\int_{s_0}^{t} \lambda_s^{\tilde{\varepsilon}} \ln^3 \lambda_s \, d\nu_s^c = o\left(\int_{s_0}^{t} \ln^2 \lambda_s \, d\nu_s^c \right). \tag{34}$$

Объединяя теперь (29), (31)–(34), как и при доказательстве утверждения 1, доказываем утверждение 3. Теорема 4 доказана.

***Замечание* 3.** Из теоремы 4 легко получаем справедливость утверждений (19) и (21) из теорем 2 и 3. Утверждения 2 и 3 теоремы 4 позволяют установить справедливость теоремы о больших уклонениях в условиях H^* (теорема 1).

6. Асимптотическое поведение критерия Неймана–Пирсона. Пусть δ_t — критерий Неймана–Пирсона уровня $\alpha_t \in (0, 1)$ для различения гипотез H и $\tilde{H}$ по наблюдению ξ^t [5]. Обозначим через β_t вероятность ошибки 2-го рода этого критерия. Исследование поведения β_t при $t \to \infty$, когда $\alpha_t \to 0$, в условиях выполнения соотношений (19) и (21) проводится известным способом [5]. Рассмотрим здесь применение теоремы 1.

Теорема 5. *Пусть выполняется условие* H^*, *а уровень* α_t *удовлетворяет соотношению* $\lim\limits_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \alpha_t = -a$, *где* $a \in (0, \infty)$ *таково, что* $a = I(\gamma(a))$ *при некотором* $\gamma(a) \in (\gamma_0, \gamma_1)$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = -b(a), \tag{35}$$

где $b(a) = a - \gamma(a) \in (0, \infty)$.

Доказательство. Так как в силу условия H^* функция $I(\gamma)$ непрерывна, то справедливы также соотношения (14) и (15), в которых неравенства $> \gamma$ и $< \gamma$ можно заменить на неравенства $\geq \gamma$ и $\leq \gamma$. Учитывая, что $\gamma(a) \in (\gamma_0, \gamma_+) \cap \cap (\gamma_-, \gamma_1)$, отсюда и из теоремы 1 легко выводим требуемое соотношение (35).

Теорема 5 доказана.

***Замечание* 4.** Теорема 5 является обобщением на общие схемы наблюдений известного результата для схемы независимых наблюдений, полученного Л. Бирже [11].

1. *Le Cam L.* Locally asymptotically normal families of distributions // Univ. Calif. Publs Stat. – 1960. – **3**, № 2. – P. 37 – 98.
2. *Русас Дж.* Контигуальность вероятностных мер. – М.: Мир, 1975. – 256 с.
3. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
4. *Greenwood P. E., Shiryaev A. N.* Contiguity and the statistical invariance principle. – New York etc.: Gordon and Breach, 1985. – 236 p.
5. *Линьков Ю. Н.* Асимптотические методы статистики случайных процессов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 256 с.
6. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Большие уклонения и проверка статистических гипотез. – Новосибирск: Наука, 1992. – 222 с.
7. *Jacod J., Shiryaev A. N.* Limit theorems for stochastic processes. – Berlin etc.: Springer, 1987. – 601 p.
8. *Коломиец Э. И.* Об асимптотическом поведении вероятностей ошибок второго рода в критерии Неймана–Пирсона // Теория вероятностей и ее применения. – 1987. – **32**, № 3. – С. 503–522.
9. *Cox J. T., Griffeath D.* Large deviations for Poisson systems of independent random walks // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1984. – **66**, № 4. – P. 543–558.
10. *Линьков Ю. Н.* Асимптотические свойства локальных плотностей мер, порождаемых семимартингалами // Теория случайных процессов. – 1986. – Вып. 14. – С. 48–55.
11. *Birgé L.* Vitesses maximales de décroissance des erreurs et tests optimaux associés // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1981. – **55**, № 2. – P. 261–273.

Получено 26.04.93