УДК 517.5

В. А. Кофанов (Днепропетров. ун-т)

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ЛАНДАУ – КОЛМОГОРОВА – ХЕРМАНДЕРА НА ОТРЕЗКЕ И ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ

We prove inequalities of the Landau–Kolmogorov–Hörmander type for uniform norms (on some subinterval) of positive and negative parts of intermediate derivatives of functions defined on a finite interval. By using the limiting transition, we obtain a new proof of the well-known Hörmander result.

Доведено нерівності типу Ландау–Колмогорова–Хермандера для рівномірних норм (на деякому підінтервалі) додатних та від'ємних частин проміжних похідних функцій, що задані на скінченному інтервалі. Граничним переходом одержано нове доведення відомого результату Хермандера.

1. Введение. Пусть $I = [a, b] \subset R = (-\infty, \infty)$, $I = R$ или $I = R_+ = [0, \infty)$. Символом $L_\infty(I)$ будем обозначать пространство измеримых и существенно ограниченных на I функций $x\colon I \to R$ с нормой

$$\|x\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in I} |x(t)|.$$

В случае необходимости указать отрезок $I = [a, b]$, вместо $\|x\|_\infty$ будем писать $\|x\|_{[a,b]}$. Через $L^r_\infty(I)$, $r \in N$, обозначим пространство функций $x \in L_\infty(I)$, имеющих на I локально абсолютно непрерывную производную $x^{(r-1)}$ ($x^{(0)} = x$) и таких, что $x^{(r)} \in L_\infty(I)$.

Пусть заданы числа $A, B > 0$ и $k = 1, 2, \ldots, r-1$. Для функций $x \in L^r_\infty(I)$ хорошо известна следующая, восходящая к Э. Ландау [1], экстремальная задача:

$$\|x^{(k)}\|_\infty \to \sup, \quad \|x\|_\infty \le A, \quad \|x^{(r)}\|_\infty \le B. \tag{1}$$

В случае $I = R$ или $I = R_+$ задача (1) эквивалентна отысканию точной константы в неравенстве

$$\|x^{(k)}\|_\infty \le c\|x\|_\infty^{1-k/r}\|x^{(r)}\|_\infty^{k/r}.$$

В дальнейшем эту точную константу будем обозначать через $c_{r,k}(I)$, т. е.

$$c_{r,k}(I) = \sup_{x \in L^r_\infty,\ x^{(r)} \ne 0} \frac{\|x^{(k)}\|_\infty}{\|x\|_\infty^{1-k/r}\|x^{(r)}\|_\infty^{k/r}}.$$

Э. Ландау [1] доказал, что $c_{2,1}(R_+) = 2$. В работах Ж. Адамара [2] и Г. Е. Шилова [3] найдены величины $c_{r,k}(R)$ при $r \le 4$ и $k < r$. А. Н. Колмогоров [4, 5] дал полное решение этой задачи в случае $I = R$: при всех r, k, $k < r$,

$$c_{r,k}(R) = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}},$$

где φ_r — r-й периодический интеграл, имеющий нулевое среднее значение на периоде, от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$ (φ_r обычно называют эйлеровым сплайном).

© В. А. КОФАНОВ, 2000

Л. Хермандер [6] для функций из $L_\infty^r(R)$ дал решение следующей, более общей, чем (1), задачи:

$$\|x_\pm^{(k)}\|_\infty \to \sup, \quad E_0(x)_\infty \le A,$$
$$\|x_+^{(r)}\|_\infty \le \alpha, \quad \|x_-^{(r)}\|_\infty \le \beta, \tag{2}$$

где $k = 1, 2, \ldots, r-1$, числа $A, \alpha, \beta > 0$ фиксированы, $E_0(x)_\infty$ — наилучшее равномерное приближение функции x константой, а $x_\pm(t) = \max\{\pm x(t), 0\}$.

Пусть $\varphi_r(\cdot\,; \alpha, \beta)$ — r-й периодический интеграл с нулевыми средними значением на периоде от 2π-периодической функции $\varphi_0(x; \alpha, \beta)$, которая для $t \in [0, 2\pi)$ определяется соотношениями

$$\varphi_0(t; \alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } t \in \left[0, \dfrac{2\pi\beta}{\alpha+\beta}\right); \\ -\beta, & \text{если } t \in \left[\dfrac{2\pi\beta}{\alpha+\beta}, 2\pi\right). \end{cases}$$

Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t; \alpha, \beta) = \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t; \alpha, \beta)$. Результат Л. Хермандера можно сформулировать в одной из следующих двух эквивалентных форм:

1) если число $\lambda > 0$ выбрано из условия

$$E_0(\varphi_{\lambda,r}(\cdot\,; \alpha, \beta))_\infty = E_0(x)_\infty,$$

то

$$\|x_\pm^{(k)}\|_\infty \le \|\varphi_{\lambda,r-k}(\cdot\,; \alpha, \beta)_\pm\|_\infty;$$

2) для любой функции $x \in L_\infty^r(R)$ справедливо неулучшаемое неравенство

$$\|x_\pm^{(k)}\|_\infty \le \frac{\|\varphi_{r-k}(\cdot\,; \|x_+^{(r)}\|_\infty, \|x_-^{(r)}\|_\infty)_\pm\|_\infty}{E_0(\varphi_r(\cdot\,; \|x_+^{(r)}\|_\infty, \|x_-^{(r)}\|_\infty))_\infty^{1-k/r}} E_0(x)_\infty^{1-k/r}. \tag{3}$$

А. П. Маторин [7] доказал, что при всех r, k, $k < r$,

$$c_{r,k}(R_+) \le \frac{T_r^{(k)}(1)}{\|T_r\|_\infty^{1-k/r}} = (2^{r-1}r!)^{1-k/r}\,T_r^{(k)}(1),$$

где $T_r(t) = (2^{r-1}r!)^{-1}\cos r \arccos t$, $t \in [-1, 1]$, — полином Чебышева 1-го рода. При этом в случаях $r = 2$, $k = 1$ и $r = 3$, $k = 1, 2$ это неравенство обращается в равенство.

Асимптотические оценки для констант $c_{r,k}(R_+)$ даны С. Б. Стечкиным [8].

Для $r \ge 4$ задача о точных константах $c_{r,k}(R_+)$ решена И. Шенбергом и А. Кавареттой [9, 10]. Для формулировки их результата понадобятся следующие определения и обозначения.

Через $\sigma_{n,r}$ обозначим определенный на $[-1, 1]$ идеальный сплайн порядка r с n узлами, имеющий на отрезке $[-1, 1]$ минимальную L_∞-норму среди всех идеальных сплайнов вида

$$\sigma(t) = \frac{1}{r!}\left[t^r + 2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(t-\xi_i)_+^r\right] + \sum_{\nu=0}^{r-1}\alpha_i t^\nu, \quad -1 \le t \le 1. \tag{4}$$

Такой сплайн $\sigma_{n,r}$ существует, единствен и имеет $n+r+1$ точек альтернанса, причем концы отрезка $[-1, 1]$ являются точками альтернанса (см., например, [11]). Отметим, что при $n = 0$ $\sigma_{n,r}(t) = T_r(t)$. Для любого $n \in N$ число λ_n выберем из условия

$$\lambda_n^{-r}|\sigma_{n,r}(1)| = |\sigma_{0,r}(1)| \qquad \left(\text{т. е.} \quad \lambda_n^r = \frac{|\sigma_{n,r}(1)|}{|\sigma_{0,r}(1)|}\right)$$

и положим

$$s_{n,r}(t) = \lambda_n^{-r}\sigma_{n,r}(\lambda_n t), \qquad t \in [-\lambda_n^{-1}, \lambda_n^{-1}].$$

Тогда [9, 10]

$$c_{r,k}(R_+) = \lim_{n\to\infty}\frac{|s_{n,r}^{(k)}(1)|}{|s_{n,r}(1)|^{1-k/r}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|\sigma_{n,r}^{(k)}(1)|}{|\sigma_{n,r}(1)|^{1-k/r}}.$$

Кроме того, в работах [9, 10] доказано, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} s_{n,r}(t-\lambda_n^{-1}) =: s_r(t), \qquad t \in R_+ \tag{5}$$

(сходимость в (5) равномерна на каждом отрезке $[0, a] \subset R_+$), и предельная функция $s_r(t)$ является идеальным сплайном порядка r на R_+ с бесконечным числом узлов. Решение задачи (1) для функции $x \in L_\infty^r(R_+)$ теперь можно сформулировать в виде соотношения

$$\sup_{\substack{x\in L_\infty^r(R_+)\\ \|x\|_\infty\le A,\ \|x_\infty^{(r)}\|\le B}} \|x^{(k)}\|_\infty = \frac{|s_r^{(k)}(0)|}{|s_r(0)|^{1-k/r}} A^{1-k/r}B^{k/r}.$$

И. Дж. Шенберг и А. В. Каваретта предложили назвать $s_r(t)$ односторонним эйлеровым сплайном.

В работах [12, 13] дано решение задачи (2) для функций $x \in L_\infty^r(R_+)$. Тем самым получено обобщение результата И. Дж. Шенберга и А. Каваретты.

В работе [14] доказано, что для любой функции $x \in L_\infty^r[-1,1]$ и для любого $n \in N$

$$\|x^{(k)}\|_{[-1+\delta,\,1-\delta]} \le \frac{|\sigma_{n,r}^{(k)}(0)|}{\|\sigma_{n,r}\|_\infty^{1-k/r}}\|x\|_{[-1,1]}^{1-k/r}\|x^{(r)}\|_{[-1,1]}^{k/r}, \tag{6}$$

где

$$\delta := \left(\frac{\|x\|_{[-1,1]}}{\|\sigma_{n,r}\|_\infty\|x^{(r)}\|_{[-1,1]}}\right)^{1/r}.$$

Используя оценку (6), В. Чен предельным переходом (при $n\to\infty$) получил новое доказательство неравенства Колмогорова.

Целью данной работы является получение точной оценки для $\|x_\pm^{(k)}\|_{[-a,a]}$ на некотором внутреннем интервале $[-a, a] \subset [-1, 1]$ в случае несимметричных ограничений

$$E_0(x)_\infty \le A, \qquad \|x_+^{(r)}\|_{[-1,1]} \le \alpha, \qquad \|x_-^{(r)}\|_{[-1,1]} \le \beta,$$

где $k = 1, 2, \ldots, r-1$, числа A, α, $\beta > 0$ фиксированы (см. теорему 3), что является обобщением результата (6) В. Чена. С помощью полученной оценки предельным переходом будет получено новое доказательство неравенства (3) Л. Хермандера (см. теорему 5).

2. Неравенства типа Ландау – Колмогорова – Хермандера на отрезке. Для любых $r \in N$, $n \in Z_+$ и положительных α, β через $S_{n,r}^+(\alpha,\beta)$ обозначим множество определенных на $[-1, 1]$ сплайнов вида

$$\sigma(t) = \frac{1}{r!}\left[\alpha t^r + (\alpha+\beta)\sum_{i=1}^{n}(-1)^i (t-\xi_i)_+^r\right] + \sum_{\nu=0}^{r-1}\alpha_\nu t^\nu, \tag{7}$$

а через $S_{n,r}^{-}(\alpha,\beta)$ — множество сплайнов вида

$$\sigma(t) = \frac{1}{r!}\left[-\beta t^r + (\alpha+\beta)\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} (t-\xi_i)_+^r\right] + \sum_{\nu=0}^{r-1}\alpha_\nu t^\nu,$$

где $-1 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n \le 1$ $\left(\text{при } n=0 \text{ полагаем } \sum_{i=1}^{n} = 0\right)$. Отметим, что для $\sigma \in S_{n,r}^{\pm}(\alpha,\beta)$ производная $\sigma^{(r)}$ принимает два значения: α и $-\beta$, причем в интервале $(-1,\xi_1)$ $\sigma^{(r)}(x) = \alpha$, если $\sigma \in S_{n,r}^{+}(\alpha,\beta)$, и $\sigma^{(r)}(x) = -\beta$, если $\sigma \in S_{n,r}^{-}(\alpha,\beta)$. При $\alpha = \beta = 1$ класс сплайнов $S_{n,r}^{+}(\alpha,\beta)$ совпадает с совокупностью идеальных сплайнов вида (4).

Справедлива следующая теорема (см. [12, 13]).

Теорема 1. *Во множестве* $S_{n,r}^{\pm}(\alpha,\beta)$, $r \in N$, $n \in Z_+$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *найдется сплайн* $\sigma_{n,r}^{\pm}(\cdot) = \sigma_{n,r}^{\pm}(\cdot;\alpha,\beta)$ *с* n *различными узлами, имеющий свойства*:

1) *существуют* $n+r+1$ *точки*

$$-1 = \tau_1^{\pm} < \tau_2^{\pm} < \ldots < \tau_{n+r+1}^{\pm} = 1$$

такие, что

$$\sigma_{n,r}^{\pm}(\tau_i^{\pm}) = \pm(-1)^{i+r+1}\|\sigma_{n,r}^{\pm}\|_\infty, \qquad i = 1,\ldots,n+r+1 \tag{8}$$

(*точки* $\tau_k^{\pm}$ *называют точками альтернанса*);

2) *для любого* $k = 0, 1, \ldots, r$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_{n,r}^{+})^{(k)}(-1) = (-1)^{r-k}, \qquad \operatorname{sgn}(\sigma_{n,r}^{-})^{(k)}(-1) = (-1)^{r-k+1}. \tag{9}$$

Сплайн, удовлетворяющий соотношениям (8), *единственный во множестве* $S_{n,r}^{\pm}(\alpha,\beta)$, *причем для любого* $\sigma^{\pm} \in S_{n,r}^{\pm}(\alpha,\beta)$, $\sigma^{\pm} \ne \sigma_{n,r}^{\pm}$,

$$\|\sigma^{\pm}\|_\infty > \|\sigma_{n,r}^{\pm}\|_\infty. \tag{10}$$

Доказательство. При $n = 0$ утверждение теоремы 1 представляет собой известную теорему Чебышева об альтернансе (см., например, [15, с. 503]), а сплайн $\sigma_{0,r}^{\pm}(\cdot)$ совпадает с полиномом Чебышева 1-го рода. Поэтому будем считать, что $n \ge 1$.

В пространстве R^{n+1} рассмотрим сферу S^n радиуса 2, т. е. множество векторов $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}) \in R^{n+1}$, удовлетворяющих соотношению $\sum_{i=1}^{n+1}|\xi_i| = 2$. Каждому такому вектору $\xi \in S^n$ поставим в соответствие разбиение отрезка $[-1, 1]$ точками

$$-1,\ -1+|\xi_1|,\ -1+|\xi_1|+|\xi_2|,\ \ldots,\ -1+\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|,\ 2.$$

Положим

$$I_k = \left[-1+\sum_{i=0}^{k-1}|\xi_i|, -1+\sum_{i=0}^{k}|\xi_i|\right),$$

где $\xi_0 := -1$, $k = 1, \ldots, n+1$. По каждому из полученных разбиений B_ξ построим функцию

$$G_\xi(t) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{1}(t-u)_+^r g_\xi(u)\,du,$$

где

$$g_\xi(u) = \begin{cases} \alpha \operatorname{sgn}\xi_{2i-1}, & u \in I_{2i-1}; \\ \beta \operatorname{sgn}\xi_{2i}, & u \in I_{2i}, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Ясно, что $G_\xi(t)$ является сплайном порядка r с узлами в точках разбиения B_ξ, причем $G_\xi^{(r)} = g_\xi$ принимает значения $\pm\alpha$, $\pm\beta$. Пусть $P_{n+r-1}^{\xi}(t) = \sum_{i=0}^{n+r-1} a_i(\xi)\,t^i$ — полином, имеющий наименьшее равномерное уклонение на отрезке $[-1, 1]$ от функции $G_\xi(t)$ среди всех полиномов степени не выше $n+r-1$.

Рассмотрим отображение $\varphi : S^n \to R^n$, действующее по формуле

$$\varphi(\xi) = (a_r(\xi), a_{r+1}(\xi), \ldots, a_{n+r-1}(\xi)).$$

Из построения отображения φ и свойств полиномов наилучшего равномерного приближения следует, что отображение φ непрерывно и нечетно. Поэтому из теоремы Борсука (см., например, [15, с. 255]) вытекает существование $\hat{\xi} \in S^n$ такого, что $\varphi(\hat{\xi}) = 0$. Это означает, что полином $P_{n+r-1}^{\hat{\xi}}$ наилучшего равномерного приближения функции $G_{\hat{\xi}}$ имеет степень не выше $r-1$. Поэтому для разности $\Delta := G_{\hat{\xi}} - P_{n+r-1}^{\hat{\xi}}$ имеем $\Delta^{(r)} = g_{\hat{\xi}}$. Следовательно, функция $\Delta(t)$ является сплайном порядка r, причем $\Delta^{(r)}(t)$ принимает лишь значения $\pm\alpha$, $\pm\beta$. Более того, в силу теоремы Чебышева об альтернансе (см., например, [15, с. 503]) сплайн $\Delta(t)$ имеет $n+r+1$ точку альтернанса на $[-1, 1]$, а значит, он имеет там $n+r$ перемен знака. Поэтому в силу теоремы Ролля $\Delta^{(r)} = g_{\hat{\xi}}$ имеет n перемен знака. Таким образом, у вектора $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_{n+1})$ все компоненты $\hat{\xi}_i$ отличны от нуля. Следовательно, сплайн Δ имеет n узлов, причем $\Delta^{(r)}(t)$ меняет знак в точках

$$-1 + \sum_{i=1}^{k}|\xi_i|, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

А так как по построению $\Delta^{(r)}(t) = g_{\hat{\xi}}(t) = \alpha$ для $t \in (-1, -1+\hat{\xi}_1)$ (переходя, если нужно, к вектору $-\hat{\xi}$, можем считать $\hat{\xi}_1 > 0$), то $\Delta^{(r)}(x)$ принимает лишь два значения: α, $-\beta$. Итак, $\Delta \in S_{n,r}^{+}(\alpha, \beta)$ и имеет $n+r+1$ точку альтернанса. Обозначим сплайн Δ символом $\sigma_{n,r}^{+}(\cdot; \alpha, \beta)$. Аналогично доказывается существование в классе $S_{n,r}^{-}(\alpha, \beta)$ сплайна $\sigma_{n,r}^{-}(\cdot; \alpha, \beta)$, имеющего $n+r+1$ точку альтернанса.

Покажем, что концы отрезка являются точками альтернанса сплайна $\sigma_{n,r}^{\pm} = \sigma_{n,r}^{\pm}(\cdot; \alpha, \beta)$. Действительно, в противном случае производная $(\sigma_{n,r}^{\pm})'$

имела бы по крайней мере $n+r$ нулей. Тогда в силу теоремы Ролля производная $(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(r)}$ имела бы $n+1$ перемену знака, что невозможно.

Докажем соотношения (8) и (9). Поскольку сплайн $\sigma_{n,r}^{\pm}(\cdot;\alpha,\beta)$ имеет $n+$ $+r+1$ точку альтернанса, то соотношение (8) будет следовать из соотношений (9) (при $k=0$). Для доказательства соотношений (9) заметим, что для любого $i=1,\ldots,r$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(i-1)}(-1) = -\operatorname{sgn}(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(i)}(-1). \tag{11}$$

Действительно, из того, что сплайн $\sigma_{n,r}^{\pm}$ имеет $n+r+1$ точку альтернанса, следует в силу теоремы Ролля, что $(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(i-1)}$ имеет $n+r-i+1$ нуль внутри $(-1,1)$. С другой стороны, $(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(i-1)}$ не может иметь больше чем $n+$ $+r-i+1$ нуль в $[-1,1]$. В противном случае $(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(r)}$ имел бы $n+1$ перемену знака, что невозможно. Пусть $t_1\in(-1,1)$ — самый левый из нулей $(\sigma^{\pm})^{(i-1)}$. Если бы мы предположили, что (11) не выполняется, т. е. $\operatorname{sgn}(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(i-1)}(-1) = \operatorname{sgn}(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(i)}(-1)$, то в силу теоремы Ферма производная $(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(i)}$ имела бы нуль в интервале $(-1,t_1)$. Поэтому число нулей $(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(i)}$ в $(-1,1)$ было бы не меньше чем $n+r-i+1$, что невозможно.

Для завершения доказательства теоремы осталось убедиться в том, что если некоторый сплайн из $S_{n,r}^{\pm}(\alpha,\beta)$ удовлетворяет соотношениям (8), то его норма строго меньше нормы любого другого сплайна из $S_{n,r}^{\pm}(\alpha,\beta)$.

Предположим противное. Пусть некоторый сплайн из множества $S_{n,r}^{\pm}(\alpha,\beta)$ (сохраним за ним обозначение $\sigma_{n,r}^{\pm}$) удовлетворяет соотношениям (8) и во множестве $S_{n,r}^{\pm}(\alpha,\beta)$ найдется сплайн $\sigma^{\pm}\neq\sigma_{n,r}^{\pm}$ такой, что

$$\|\sigma^{\pm}\|_\infty \le \|\sigma_{n,r}^{\pm}\|_\infty. \tag{12}$$

Через $t_k^{\pm}$ (соответственно $u_k^{\pm}$) обозначим узлы сплайна $\sigma_{n,r}^{\pm}$ (соответственно $\sigma^{\pm}$). Покажем, что из предположения (12) следуют неравенства

$$u_k^{\pm} < t_k^{\pm}, \qquad k=1,2,\ldots,n. \tag{13}$$

Для этого заметим, что разность $\delta := \sigma_{n,r}^{\pm}-\sigma^{\pm}$ имеет в $(-1,1)$ $n+r$ нулей с учетом их кратностей (это следует из предположения (12) и того, что сплайн $\sigma_{n,r}^{\pm}$ имеет в $[-1,1]$ $n+r+1$ точку альтернанса). Поэтому в силу теоремы Ролля производная $\delta^{(r)}$ имеет в $(0,1)$ n перемен знака.

С другой стороны, $\delta^{(r)}$ не может иметь перемен знака внутри интервалов $(t_k^{\pm},t_{k+1}^{\pm})$, $k=0,1,\ldots,n$, $t_0^{\pm}:=1$, $t_{n+1}^{\pm}:=1$. Следовательно, производная $\delta^{(r)}$ имеет в интервале $(-1,1)$ ровно n перемен знака, причем она не тождественна нулю ни в одном из интервалов $(t_k^{\pm},t_{k+1}^{\pm})$.

Вернемся к доказательству неравенства (13). Проведем это доказательство индукцией по k. Пусть вначале $k=1$. Предположим, что $u_1^{\pm}\ge t_1^{\pm}$. Тогда производная $\delta^{(r)}$ тождественна нулю в интервале $(-1,t_1^{\pm})$, что, как было отмечено выше, невозможно.

Предположим, что неравенство (13) справедливо для всех $k=1,2,\ldots,m-1$, $m\le n$, и покажем, что тогда оно справедливо для $k=m$. Действительно, предположим противное: $u_m^{\pm} \geq t_m^{\pm}$. Из этого неравенства и индуктивного предположения ($u_k^{\pm} < t_k^{\pm}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$) вытекает, что производная $\delta^{(r)}$ тождественна нулю в интервале $(t_{m-1}^{\pm}, t_m^{\pm})$, что невозможно.

Итак, мы убедились в том, что из предположения (12) следуют неравенства (13). Но тогда в интервале $(t_{n-1}^{\pm}, t_n^{\pm})$ производная $\delta^{(r)}$ тождественна нулю, что невозможно.

Таким образом, предположение (12) приводит к противоречию. Тем самым неравенство (10) доказано.

Теорема доказана.

В настоящей работе сплайны $\sigma_{n,r}^{\pm}(\cdot; \alpha, \beta)$ будут играть роль функций сравнения, так же как сплайн $\sigma_{n,r}$, наименее уклоняющийся от нуля в метрике пространства $C[-1, 1]$ среди всех идеальных сплайнов вида (4), играл роль функции сравнения в работах И. Дж. Шенберга и А. Каваретты [9, 10].

Для любого $n \in Z_+$ выберем $\lambda_n^{\pm}$ из условия

$$(\lambda_n^{\pm})^{-r} |\sigma_{n,r}^{\pm}(1; \alpha, \beta)| = |\sigma_{0,r}^{\pm}(1; \alpha, \beta)|,$$

т. е.

$$(\lambda_n^{\pm})^r = \left| \frac{\sigma_{n,r}^{\pm}(1; \alpha, \beta)}{\sigma_{0,r}^{\pm}(1; \alpha, \beta)} \right|, \tag{14}$$

и положим

$$s_{n,r}^{\pm}(t; \alpha, \beta) = (\lambda_n^{\pm})^{-r} \sigma_{n,r}^{\pm}(\lambda_n^{\pm} t; \alpha, \beta), \qquad t \in \left(-(\lambda_{n,r}^{\pm})^{-1}, (\lambda_{n,r}^{\pm})^{-1}\right). \tag{15}$$

Лемма. *Для любых* $r \in R$, $n \in Z_+$

$$\sigma_{n,r}^{\pm}(-t) = (-1)^r \sigma_{n,r}^{\pm}(t), \quad \textit{если} \;\; n \text{ — } \textit{четно}, \tag{16}$$

и

$$\sigma_{n,r}^{\pm}(-t) = (-1)^r \sigma_{n,r}^{\mp}(t), \quad \textit{если} \;\; n \text{ — } \textit{нечетно}.$$

Доказательство. Докажем (16) для $\sigma_{n,r}^{+}$ (Остальные формулы доказываются аналогично). Пусть $-1 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n < 1$ — узлы сплайна $\sigma_{n,r}^{+}$. Имеем

$$r!\,\sigma_{n,r}^{+}(t) = \alpha t^r + (\alpha + \beta) \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (t - \xi_i)_+^r + \sum_{\nu=0}^{r-1} \alpha_\nu t^\nu.$$

Используя равенство

$$(-t - \xi_i)_+^r = (-1)^r (t + \xi_i)^r - (-1)^r (t + \xi_i)_+^r,$$

получаем

$$r!\,\sigma_{n,r}^{+}(-t) = (-1)^r \left[\alpha t^r + (\alpha + \beta) \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left((t + \xi_i)^r - (t + \xi_i)_+^r\right) \right] +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{r-1} \alpha_\nu t^\nu.$$

Положим $\eta_{n+1-i} := -\xi_i$. Применяя формулу бинома Ньютона к слагаемому $(t + \xi_i)^r$ и учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i = 0$, так как n — четно, находим

$$(-1)^r r!\,\sigma^+_{n,r}(-t) = \alpha t^r + (\alpha+\beta)\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(t-\eta_{n+1-i})^r_+ +$$

$$+ (\alpha+\beta)t^r\sum_{i=1}^{n}(-1)^i + (\alpha+\beta)\sum_{k=0}^{r-1}t^k\sum_{i=1}^{n}C_r^k(-1)^i\xi_i^{r-k} + \sum_{\nu=0}^{r-1}\alpha_\nu t^\nu =$$

$$= \alpha t^r + (\alpha+\beta)\sum_{j=1}^{n}(-1)^j(t-\eta_j)^r_+ + P_{r-1}, \tag{17}$$

где P_{r-1} — многочлен степени не выше $n-1$.

Таким образом,

$$\sigma(t) = \frac{(-1)^r}{r!}\left[\alpha t^r + (\alpha+\beta)\sum_{j=1}^{n}(-1)^j(t-\eta_j)^r_+ + P_{r-1}\right]$$

— сплайн вида (7), причем $\|\sigma^\pm_{n,r}\|_\infty = \|\sigma\|_\infty$. Поэтому ввиду единственности $\sigma^+_{n,r}$ из (17) имеем $\sigma(t) = \sigma^+_{n,r}(t)$ и $\xi_i = \xi_{n+1-i}$, $i=1,\ldots,n$.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $r\in N$, $\alpha,\beta>0$ *и* $x\in L^r[-1,1]$ *таковы, что*

$$\|x_+^{(r)}\| \le \alpha, \quad \|x_-^{(r)}\| \le \beta$$

и

$$E_0(x)_\infty \le E_0(\sigma^+_{n,r})_\infty \tag{18}$$

или

$$E_0(x)_\infty \le E_0(\sigma^-_{n,r})_\infty. \tag{19}$$

Тогда для четных n *и любого* $k\in N$, $1\le k\le r-1$, *такого, что* $r+k$ — *четно, выполняется неравенство*

$$x_+^{(k)}(0) \le (\sigma^+_{n,r})_+^{(k)}(0)$$

в случае (18) *и неравенство*

$$x_-^{(k)}(0) \le (\sigma^-_{n,r})_-^{(k)}(0)$$

в случае (19). *Константы* 1 *в правых частях этих неравенств неулучшаемы.*

Доказательство. Пусть для определенности оба числа r и k нечетны. Тогда ввиду леммы 1 сплайн $\sigma^\pm_{n,r}$ также нечетный. Положим

$$y(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}.$$

Тогда

$$E_0(y)_\infty \le E_0(x)_\infty, \tag{20}$$

и для нечетных i

$$y^{(i)}(t) = \frac{x^{(i)}(t)+x^{(i)}(-t)}{2}.$$

Поэтому

$$\|y_+^{(r)}\| \le \alpha, \quad \|y_-^{(r)}\| \le \beta \tag{21}$$

и

$$y^{(k)}(0) = x^{(k)}(0).$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить неравенство

$$y_+^k(0) \le (\sigma_{n,r}^+)_+^{(k)}(0) \tag{22}$$

в случае (18) и неравенство

$$y_-^k(0) \le (\sigma_{n,r}^-)_-^{(k)}(0) \tag{23}$$

в случае (19).

Без ограничения общности можно считать $y^{(k)}(0) \neq 0$. Пусть, например, $y^{(k)}(0) > 0$. Предположим, что одно из неравенств (22) или (23), например первое, нарушается. Тогда, учитывая соотношения $(\sigma_{n,r}^+)^{(k)}(0) > 0$, $(\sigma_{n,r}^-)^{(k)}(0) < 0$, заключаем, что существует $\gamma > 1$ такое, что

$$y^{(k)}(0) = \gamma(\sigma_{n,r}^+)^{(k)}(0). \tag{24}$$

Через $c(c_1)$ обозначим константу наилучшего равномерного приближения функции y (соответственно сплайна $\sigma_{n,r}^+$). В силу (20) имеем

$$\|(y-c)_+\|_\infty \le \|(\sigma_{n,r}^+ - c_1)_+\|_\infty, \quad \|(y-c)_-\|_\infty \le \|(\sigma_{n,r}^+ - c_1)_-\|_\infty.$$

Положим $h(x) := \gamma(\sigma_{n,r}^+ - c_1) - (y-c)$. Учитывая, что $\sigma_{n,r}^+$ имеет в силу теоремы 1 $n+r+1$ точку альтернанса, заключаем, что $h(x)$ имеет не менее $n+r$ нулей в $[-1,1]$. Покажем, что $h^{(r-1)}$ имеет в $(-1,1)$ по крайней мере $n+2$ нуля. Пусть $k>1$ (при $k=1$ рассуждения аналогичны). Тогда $h^{(k-1)}$ имеет по теореме Ролля не менее $n+r+1-k$ нулей в $(-1,1)$. Заметим, что $h^{(k-1)}$ нечетная, поэтому $h^{(k-1)}(0) = 0$. Следовательно, по теореме Ролля $h^{(k)}$ имеет в $(-1,0)\cup(0,1)$ не менее $n+r-k$ нулей. С другой стороны, в силу (24) $h^{(k)}(0) = 0$. Поэтому $h^{(k)}$ имеет в $(-1,1)$ не менее $n+r-k+1$ нуль. Тогда снова в силу теоремы Ролля $h^{(r-1)}$ имеет в $(-1,1)$ по крайней мере $n+2$ нуля. Поэтому в некотором интервале $[\xi_{i_0}, \xi_{i_0+1}]$, $1 \le i_0 \le n-1$ (где ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, — узлы сплайна $\sigma_{n,r}^+$), $h^{(r-1)}$ имеет по крайней мере два нуля: η_1 и η_2. Предположим, что $\eta_1 < \eta_2$. Имеем

$$0 = h^{(r-1)}(\eta_2) = h^{(r-1)}(\eta_2) - h^{(r-1)}(\eta_1) =$$

$$= \int_{\eta_1}^{\eta_2} [\gamma(\sigma_{n,r}^+)^{(r)}(t) - x^{(r)}(t)]\,dt.$$

Но из (21) следует, что подынтегральная функция строго положительна в (η_1, η_2). Полученное противоречие доказывает неравенства (22) и (23). Если мы положим $x = \sigma_{n,r}^+$ $(x = \sigma_{n,r}^-)$, то неравенство (22) (соответственно (23)) обращается в равенство.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $r \in N$, $x \in L_\infty^r[-1,1]$. *Для четных* n *и любого* $k \in N$, $1 \le k \le r-1$, *такого, что* $r+k$ *четно, выполняются неравенства*

$$\|x_\pm^{(k)}\|_{[-1+\delta_\pm, 1-\delta_\pm]} = \frac{(\sigma_{n,r}^\pm)_\pm^{(k)}(0, \|x_+^{(r)}\|_\infty, \|x_-^{(r)}\|_\infty)}{E_0(\sigma_{n,r}^\pm(\cdot\,; \|x_+^{(r)}\|_\infty, \|x_-^{(r)}\|_\infty))_\infty^{1-k/r}} E_0(x)_\infty^{1-k/r}, \tag{25}$$

где

$$\delta_{\pm} = \delta_{\pm}(x) := \left(\frac{E_0(x)_\infty}{E_0(\sigma^{\pm}_{n,r}(\cdot, \|x^{(r)}_+\|_\infty, \|x^{(r)}_-\|_\infty))_\infty} \right)^{1/r}.$$

Доказательство. Для $x \in L^r_\infty[-1,1]$ и $t_0 \in [-1+\delta_\pm, 1-\delta_\pm]$ определим функцию

$$y^{\pm}(t) := \frac{E_0(\sigma^{\pm}_{n,r})_\infty}{E_0(x)_\infty} x(t_0 + \delta_\pm t), \qquad t \in [-1, 1].$$

Тогда

$$E_0(y^{\pm})_\infty \le E_0(\sigma^{\pm}_{n,r})_\infty$$

и

$$(y^{\pm}(t))^{(i)} = \frac{E_0(\sigma^{\pm}_{n,r})_\infty}{E_0(x)_\infty} \delta^i_\pm x^{(i)}(t_0 + \delta_\pm t), \qquad i = 1, \dots, r.$$

Отсюда

$$\|(y^{\pm})^{(r)}_+\|_\infty \le \|x^{(r)}_+\|_\infty \quad \text{и} \quad \|(y^{\pm})^{(r)}_-\|_\infty \le \|x^{(r)}_-\|_\infty.$$

Применяя теорему 2 с $\alpha = \|x^{(r)}_+\|_\infty$ и $\beta = \|x^{(r)}_-\|_\infty$ к функции $y^\pm$, получаем

$$(y^{\pm})^{(k)}_\pm(0) \le (\sigma^{\pm}_{n,r})^{(k)}_\pm(0)$$

или

$$\frac{E_0(\sigma^{\pm}_{n,r})_\infty}{E_0(x)_\infty} \delta^k_\pm x^{(k)}_\pm(t_0) \le (\sigma^{\pm}_{n,r})^{(k)}_\pm(0).$$

Отсюда

$$x^{(k)}_\pm(t_0) \le \frac{E_0(x)_\infty}{E_0(\sigma^{\pm}_{n,r})_\infty} \left(\frac{E_0(\sigma^{\pm}_{n,r})_\infty}{E_0(x)_\infty} \right)^{k/r} (\sigma^{\pm}_{n,r})^{(k)}_\pm(0),$$

что равносильно (25).

Теорема 3 доказана.

3. Неравенства типа Ландау – Колмогорова – Хермандера на вещественной прямой. Следующая теорема представляет собой аналог теоремы 3 из [13].

Теорема 4. *При любых фиксированных* $r \in N$, $\alpha, \beta > 0$, *существует определенный на* $(-\infty, \infty)$ *сплайн* $s^{\pm}_r = s^{\pm}_r(\cdot, \alpha, \beta)$ *порядка* r *с бесконечным числом узлов* $y^{\pm}_k$ *и* $y^{\pm}_{-k} = -y^{\pm}_k$, $k \in N$,

$$0 \le y^{\pm}_1 < y^{\pm}_2 < \dots < y^{\pm}_k < \dots, \qquad y^{\pm}_k \to \infty, \quad k \to \infty,$$

четный при четных r *и нечетный при нечетных* r, *имеющий свойства*:

1) *на каждом интервале* $[y^{\pm}_{k-1}, y^{\pm}_k)$, $y_0 := 0$, $s^{\pm}_r(\cdot, \alpha, \beta) = \alpha$ *или* $s^{\pm}_r(\cdot, \alpha, \beta) = -\beta$;

2) *для любого* $c > 0$ *последовательность* $\{s^{\pm}_{2l,r}(\cdot, \alpha, \beta)\}_{l=1}^\infty$ *(все элементы которой определены на* $[-c, c]$ *при всех достаточно больших* l*) сходится к* $s^{\pm}_r(\cdot, \alpha, \beta)$ *вместе со всеми производными до порядка* $r-1$ *включительно равномерно на* $[-c, c]$.

Доказательство. Пусть для определенности r — четно. Тогда ввиду леммы 1 сплайн $s_{2l,r}$ четный. Через $t^{\pm}_{2l,k}$, $k=-l,-l+1,\dots,-1,1,\dots,l-1,l$, обозначим узлы сплайна $s^{\pm}_{2l,r}$. Покажем, что для любого $k\in N$

$$|t^{\pm}_{2l+2,k}| < |t^{\pm}_{2l,k}|, \qquad l=k,k+1,\dots . \tag{26}$$

Для доказательства (26) нам потребуются некоторые свойства разности $\Delta :=$ $:= s^{\pm}_{2l+2,r} - s^{\pm}_{2l,r}$. Заметим, во-первых, что она определена в интервале $\delta^{\pm}_{2l} :=$ $:= ((-\lambda^{\pm}_{2l})^{-1},(\lambda^{\pm}_{2l})^{-1})$. Чтобы в этом убедиться, покажем, что для любого $l\in$ $\in N$ выполняется неравенство $\lambda^{\pm}_{2l+2} < \lambda^{\pm}_{2l}$. Действительно, из (10) следует, что $\|\sigma^{\pm}_{2l+2,r}\|_\infty < \|\sigma^{\pm}_{2l,r}\|_\infty$. Тогда в силу (8) $|\sigma^{\pm}_{2l+2,r}(1)| < |\sigma^{\pm}_{2l,r}(1)|$. Теперь неравенство $\lambda^{\pm}_{2l+2} < \lambda^{\pm}_{2l}$ следует из определения (14).

Покажем, что производная $\Delta^{(r)}$ имеет в $\delta^{\pm}_{2l}$ не менее $2l$ перемен знака. Действительно, принимая во внимание равенство

$$\|s^{\pm}_{2l+2,r}\|_\infty = \|s^{\pm}_{2l,r}\|_\infty, \qquad l\in N \tag{27}$$

(вытекающее из (8), (9) и (15)), и то обстоятельство, что сплайн $s^{\pm}_{2l,r}$ имеет $2l+r+1$ точку альтернанса (в силу теоремы 1 и определения (15)), заключаем, что разность Δ имеет в интервале $\delta^{\pm}_{2l}$ $2l+r$ нулей с учетом их кратностей. Тогда в силу теоремы Ролля производная $\Delta^{(r)}$ имеет в $\delta^{\pm}_{2l}$ $2l$ перемен знака.

С другой стороны, $\Delta^{(r)}$ не может иметь перемен знака внутри интервалов $((-\lambda^{\pm}_{2l})^{-1}, t^{\pm}_{2l,-l})$, $(t^{\pm}_{2l,-l}, t^{\pm}_{2l,-l+1})$, $\dots$, $(t^{\pm}_{2l,-2}, t^{\pm}_{2l,-1})$, $(t^{\pm}_{2l,-1}, t^{\pm}_{2l,1})$, $(t^{\pm}_{2l,1}, t^{\pm}_{2l,2})$, $\dots$ $\dots$, $(t^{\pm}_{2l,l-1}, t^{\pm}_{2l,l})$, $((t^{\pm}_{2l,l},(\lambda^{\pm}_{2l})^{-1})$. Следовательно $\Delta^{(r)}$ имеет внутри $\delta^{\pm}_{2l}$ ровно $2l$ перемен знака, причем она не тождественна нулю ни в одном из перечисленных выше интервалов.

Вернемся к доказательству неравенства (26). Проведем это доказательство индукцией по k. Пусть вначале $k=1$. Предположим, что $t^{\pm}_{2l+2,1} \ge t^{\pm}_{2l,1}$. Тогда производная $\Delta^{(r)}$ тождественна нулю в интервале $(-t^{\pm}_{2l,1}, t^{\pm}_{2l,1})$, что, как было отмечено выше, невозможно.

Предположим, что неравенство (26) справедливо для всех $k=1,2,\dots,m-1$, $m\le 2l$, и покажем, что оно справедливо для $k=m$. Действительно, предположим противное: $t^{\pm}_{2l+2,m} \ge t^{\pm}_{2l,m}$. Из этого неравенства и индуктивного предположения ($t^{\pm}_{2l+2,k} < t^{\pm}_{2l,k}$, $k=1,\dots,m-1$) вытекает, что производная $\Delta^{(r)}$ тождественна нулю в интервале $(t^{\pm}_{2l,-m}, t^{\pm}_{2l,m})$, что невозможно. Тем самым неравенство (26) доказано.

Из (26) следует существование пределов у каждой из последовательностей $\{t^{\pm}_{2l,k}\}$, $k=1,2,\dots$. Пусть $0=: y^{\pm}_0 < y^{\pm}_1 < y^{\pm}_2 < \dots < y^{\pm}_i < \dots$ — все различные пределы этих последовательностей, упорядоченные в порядке возрастания. Для любого $i\in N$ и для любого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует номер $n=n(i,\varepsilon)$ такой, что для любого $l\ge n(i,\varepsilon)$ $(s^{\pm}_{2l,r})^{(r)}(x)=\alpha$ при всех $x\in I^{\pm}_i(\varepsilon) := (y^{\pm}_{i-1}+\varepsilon, y^{\pm}_i-\varepsilon)$ или $(s^{\pm}_{2l,r})^{(r)}(x) = -\beta$ при всех $x\in I^{\pm}_i(\varepsilon)$. Другими словами, начиная с некоторого номера $n=n(i,\varepsilon)$ сужение сплайнов $s^{\pm}_{2l,r}$ на интервале $I^{\pm}_i(\varepsilon)$ является многочленом степени r со старшей производной, равной α или $-\beta$. Ввиду произвольности ε отсюда следует, что в каждом из интервалов $I^{\pm}_i := (y^{\pm}_{i-1}, y^{\pm}_i)$ существует предел

$$\lim_{l\to\infty} s_{2l,r}^{\pm}(x;\alpha,\beta) =: s_r^{\pm}(x;\alpha,\beta), \tag{28}$$

причем $(s_r^{\pm})^{(r)}(x;\alpha,\beta) = \alpha$ для всех $x \in I_i^{\pm}$ или $(s_r^{\pm})^{(r)}(x;\alpha,\beta) = -\beta$ для всех $x \in I_i^{\pm}$.

Зафиксируем $c > 0$. Так как $|\sigma_{2l,r}^{\pm}(0;\alpha,\beta)| \to 0$ при $l \to \infty$, то в силу (14) $\lambda_{2l}^{\pm} \to 0$ при $l \to \infty$. Поэтому начиная с некоторого номера последовательность сплайнов $\{s_{2l,r}^{\pm}\}_{l=1}^{\infty}$ определена на $[-c, c]$. Далее, из равенства (27) следует ее равномерная ограниченность, а из неравенств

$$-\beta \le (s_{2l,r}^{\pm})^{(r)}(x;\alpha,\beta) \le \alpha, \quad x \in [-c, c], \tag{29}$$

— ее равностепенная непрерывность, а также равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность на этом отрезке последовательностей k-х производных $\{(s_{2l,r}^{\pm})^{(k)}\}_{l=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots, r-1$. Поэтому сходимость в (28) будет равномерной на $[-c, c]$ вместе со всеми производными до порядка $r-1$ включительно.

Покажем, что $y_k^{\pm} \to \infty$ при $k \to \infty$. Действительно, предположим противное. Тогда существует $c > 0$ такое, что сплайн $s_r^{\pm}$ на $[c, \infty)$ совпадает с некоторым многочленом степени r и, следовательно, неограничен, что противоречит равенствам (27) и (28).

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать включение

$$s_r^{\pm} \in L_{\infty}^{r}(R_+). \tag{30}$$

Чтобы убедиться в справедливости (30), заметим, что для любых x_1, $x_2 \in R_+$ существует $c > 0$ такое, что x_1, $x_2 \in [-c, c]$ и при всех достаточно больших l

$$|(s_{2l,r}^{\pm})^{(r-1)}(x_1;\alpha,\beta) - (s_{n,r}^{\pm})^{(r-1)}(x_2;\alpha,\beta)| \le K|x_1 - x_2|,$$

где $K = \max\{\alpha, \beta\}$. Это следует из (29). Переходя к пределу при $l \to \infty$, имеем

$$|(s_r^{\pm})^{(r-1)}(x_1;\alpha,\beta) - (s_r^{\pm})^{(r-1)}(x_2;\alpha,\beta)| \le K|x_1 - x_2|.$$

Отсюда следует включение (30).

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть* $r \in N$, $x \in L_{\infty}^{r}(R)$. *Тогда для любого* $k \in N$, $1 \le k \le$ $\le r-1$, *такого, что* $r+k$ *— четно, справедливы неравенства*

$$\|(x^{(k)})_{\pm}\|_{\infty} \le \frac{(s_r^{\pm})_{\pm}^{(k)}(0;\|x_+^{(r)}\|_{\infty}, \|x_-^{(r)}\|_{\infty})}{E_0((s_r^{\pm})_{\pm}(0;\|x_+^{(r)}\|_{\infty}, \|x_-^{(r)}\|_{\infty}))^{1-k/r}} E_0(x)_{\infty}^{1-k/r}. \tag{31}$$

Неравенства (31) *являются точными и обращаются в равенство для* $x(t) =$ $= \mu s_r^{\pm}(\lambda t;\alpha,\beta)$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Доказательство. Зафиксируем $x \in L_{\infty}^{r}(R)$. Для доказательства (31) достаточно установить для любого $t_0 \in R$ неравенство

$$(x^{(k)})_{\pm}(t_0) \le \frac{(s_r^{\pm})_{\pm}^{(k)}(0;\|x_+^{(r)}\|_{\infty}, \|x_-^{(r)}\|_{\infty})}{E_0((s_r^{\pm})_{\pm}(0;\|x_+^{(r)}\|_{\infty}, \|x_-^{(r)}\|_{\infty}))^{1-k/r}} E_0(x)_{\infty}^{1-k/r}. \tag{32}$$

Для этого, в свою очередь, достаточно установить неравенство (32) для $t_0 = 0$ (чтобы установить (32) для любого t_0, достаточно применить его с $t_0 = 0$ к функции $x(t - t_0)$).

Чтобы доказать (32) при $t_0 = 0$, для любого $a > 0$ рассмотрим функцию

$x(at)$. Через y обозначим ее сужение на $[-1, 1]$ и применим к нему неравенство (25). Заметим, что $\|y_{\pm}^{(r)}\|_{\infty} = a^r \|x_{\pm}^{(r)}\|_{\infty}$ и, следовательно,

$$\sigma_{n,r}^{\pm}(\cdot, \|y_{+}^{(r)}\|_{\infty}, \|y_{-}^{(r)}\|_{\infty}) = a^r \sigma_{n,r}^{\pm}(\cdot, \|x_{+}^{(r)}\|_{\infty}, \|x_{-}^{(r)}\|_{\infty})$$

и

$$\delta_{\pm}(y) = \frac{1}{a}\delta_{\pm}(x).$$

Поэтому при достаточно больших a, $\delta_{\pm}(y) < 1$ и из (25) следует

$$a^k x_{\pm}^{(k)}(0) \le \frac{a^r (\sigma_{n,r}^{\pm})_{\pm}^{(k)}(0, \|x_{+}^{(r)}\|_{\infty}, \|x_{-}^{(r)}\|_{\infty})}{\left(a^r E_0(\sigma_{n,r}^{\pm}(\cdot; \|x_{+}^{(r)}\|_{\infty}, \|x_{-}^{(r)}\|_{\infty}))_{\infty}\right)^{1-k/r}} E_0(x)_{\infty}^{1-k/r},$$

или

$$x_{\pm}^{(k)}(0) \le \frac{(\sigma_{n,r}^{\pm})_{\pm}^{(k)}(0, \|x_{+}^{(r)}\|_{\infty}, \|x_{-}^{(r)}\|_{\infty})}{\left(E_0(\sigma_{n,r}^{\pm}(\cdot; \|x_{+}^{(r)}\|_{\infty}, \|x_{-}^{(r)}\|_{\infty}))_{\infty}\right)^{1-k/r}} E_0(x)_{\infty}^{1-k/r} =$$

$$= \frac{(s_{n,r}^{\pm})_{\pm}^{(k)}(0, \|x_{+}^{(r)}\|_{\infty}, \|x_{-}^{(r)}\|_{\infty})}{\left(E_0(s_{n,r}^{\pm}(\cdot; \|x_{+}^{(r)}\|_{\infty}, \|x_{-}^{(r)}\|_{\infty}))_{\infty}\right)^{1-k/r}} E_0(x)_{\infty}^{1-k/r}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$ (по четным n) с помощью теоремы 4 получаем (32) при $t_0 = 0$.

Теорема доказана.

1. *Landau E.* Einige Ungleichungen fur zweimal differenzierbare Funktion // Proc. London Math. Soc. – 1913. – **13**. – P. 43–49.
2. *Hadamard J.* Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées // C. r. Soc. math. France. – 1914. – **41**. – P. 68–72.
3. *Боссэ Ю. Г.* (*Шилов Г. Е.*) О неравенствах между производными // Сб. работ студенческих кружков Моск. ун-та. – М., 1937. – С. 17–27.
4. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Уч. зап. Моск. ун-та. – 1939. – **30**. – С. 3–16.
5. *Kolmogoroff A.* Une généralisation de J. Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées successives d'une fonction // C. r. Acad. sci. – 1938. – **207**. – P. 764–765.
6. *Hörmander L.* New proof and generalization of inequality of Bohr // Math. scand. – 1954. – **2**. – P. 33–45.
7. *Маторин А. П.* О неравенствах между наибольшими значениями абсолютных величин функции и ее производных на полупрямой // Укр. мат. журн. – 1955. – **7**, № 7. – С. 262–266.
8. *Стечкин С. Б.* О неравенствах между верхними гранями производных произвольной функции на полуоси // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 6. – С. 665–674.
9. *Shoenberg I. J., Cavaretta A.* Solution of Landau's problem, conserning heiger derivatives on halfline // M. R. C. Techn. Sum. Rept. – 1970.
10. *Shoenberg I. J., Cavaretta A.* Solution of Landau's problem, conserning heiger derivatives on halfline // Proc. Conf. Approxim. Theory. – Varna. – 1970. – P. 297–308. – Sofia, 1972.
11. *Pinkus A.* *N*-widts in approximation theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1985.
12. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О точных неравенствах типа Ландау–Адамара–Колмогорова на полуоси // Допов. НАН України. – 1997. – **4**. – С. 34–38.
13. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О точных неравенствах типа Ландау–Колмогорова–Хермандера на полуоси // Мат. заметки. – 1999. – **65**, № 2. – С. 175–185.
14. *Chen W.* Landau–Kolmogorov inequality on a finite interval // Bull. Austral. Math. Soc. – 1993. – **48**. – P. 485–494.
15. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

Получено 23.09.98