УДК 519.248

Д. Г. Коренівський (Ін-т математики НАН України, Київ)

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК СПЕКТРАЛЬНОГО І КОЕФІЦІЄНТНОГО КРИТЕРІЇВ СТІЙКОСТІ В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

We establish the correlation (the equivalence) of spectral and algebraic coefficient criteria of asymptotic stability in mean square (the last-mentioned criterion is represented in terms of the Sylvester matrix algebraic equation) for three classes of systems of linear equations with varying random perturbations of coefficients, namely, the Ito differential stochastic equations, the difference stochastic equations equations with discrete time, and the difference stochastic equations with continuous time.

Встановлено взаємозв'язок (еквівалентність) спектрального і алгебраїчного, коефіцієнтного (вираженого в термінах матричного алгебраїчного рівняння Сільвестра) критеріїв асимптотичної стійкості в середньому квадратичному для трьох класів систем лінійних рівнянь із змінними випадковими збуреннями коефіцієнтів – диференціальних стохастичних рівнянь Іто, різницевих стохастичних рівнянь з дискретним часом та різницевих стохастичних рівнянь з неперервним часом.

1. Вступ. В математичній теорії стійкості розв'язків детермінованих систем лінійних автономних диференціальних рівнянь взаємозв'язок між різними критеріями асимптотичної стійкості був предметом дослідження в багатьох роботах. Наприклад, для диференціальних рівнянь в статтях П. Паркса [1] і П. А .Кузьміна [2] встановлено зв'язок між коефіцієнтним критерієм Рауса – Гурвіца та коефіцієнтним критерієм, сформульованим в термінах матричного алгебраїчного рівняння Ляпунова. В статті В. Яромінека [3] досліджено зв'язок між визначниками Гурвіца і визначниками Маркова, що несуть інформацію про стійкість, і, таким чином, доведено еквівалентність відповідних критеріїв асимптотичної стійкості. Для детермінованих систем лінійних автономних різницевих рівнянь в роботі П. Паркса [4] показано, що шляхом відповідного застосування методу функцій Ляпунова можна одержати необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості їх розв'язку, які еквівалентні критерію Шура – Кона. В книзі Р. Ріхтмаєра і К. Мортона [5, с. 82 – 89] наведено доведення еквівалентності трьох критеріїв стійкості сім'ї матриць (теорема Крайса).

Мета даної роботи — показати зв'язок відомого спектрального (вперше отриманого Й. І. Гіхманом в 1964 р.) і алгебраїчного коефіцієнтного (розробленого автором даної статті в 1984 – 1989 рр. і сформульованого в термінах матричного алгебраїчного рівняння Сільвестра) критеріїв асимптотичної стійкості в середньому квадратичному розв'язків систем лінійних стохастичних (типу Іто) диференціальних рівнянь, а також зв'язок спектрального і алгебраїчного коефіцієнтного критеріїв такої ж стійкості для двох класів стохастичних різницевих рівнянь — лінійних різницевих рівнянь з дискретним часом та різницевих рівнянь з неперервним часом.

В літературі зі стійкості стохастичних динамічних систем відсутнє доведення еквівалентності спектрального і коефіцієнтного критеріїв асимптотичної стійкості в середньому квадратичному для згаданих вище стохастичних рівнянь. В даній роботі ця прогалина заповнюється. При доведеннях суттєво використовуються властивості розв'язків спряжених систем рівнянь [6].

2. Стохастичні диференціальні рівняння. Й. І. Гіхман [7] для системи лінійних диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями коефіцієнтів (стохастичних рівнянь Іто)

$$dx(t) = Ax(t)dt + Bx(t)dw(t), \quad t_0 \le t, \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

де вектор-стовпець $x \in \mathbb{R}^n$; x_0 — детермінована початкова умова; сталі матриці

$A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $w(t)$ — скалярний, стандартний вінерівський процес, побудував для матриці моментів другого порядку $Q(t) = [q_{ij}(t)]_1^n = \mathbf{M}\{x(t)x^T(t)\}$ ($\mathbf{M}$ — символ математичного сподівання) диференціальне рівняння

$$\frac{dQ}{dt} = AQ + QA^T + BQB^T \tag{2}$$

і після зображення його в векторно-матричному вигляді

$$\frac{dq}{dt} = \mathcal{A}q, \quad q = [q_{11}, \ldots, q_{1n}, q_{21}, \ldots, q_{nn}]^T \tag{3}$$

сформулював спектральний критерій асимптотичної стійкості в середньому квадратичному (див. також роботу [8]). Пізніше цей результат було наведено в книзі Й. І. Гіхмана і А. В. Скорохода [9, с. 319 – 320] та в книгах зі стійкості стохастичних систем інших авторів (див., наприклад, [10], гл. VI, § 2).

Сформулюємо ***спектральний критерій*** в несуттєво зміненому вигляді: *для асимптотичної стійкості в середньому квадратичному нульового розв'язку* ($x = 0$) *системи рівнянь* (1) *необхідно і достатньо, щоб дійсні частини власних значень матриці* $\mathcal{A}$ *розміру* $n^2 \times n^2$,

$$\mathcal{A} = A \otimes E + E \otimes A + B \otimes B, \tag{4}$$

були від'ємними. Тут E — одинична матриця відповідного розміру, $\otimes$ — символ кронекерового добутку матриць.

В книзі автора [11] (теорема 1.2) з допомогою стохастичної функції Ляпунова ***критерій*** асимптотичної стійкості в середньому квадратичному для (1) подано в іншому вигляді — ***в термінах матричного алгебраїчного рівняння Сільвестра***: *нульовий розв'язок системи рівнянь* (1) *асимптотично стійкий в середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли матриця* A *гурвіцева і існує додатно визначений розв'язок* H ($H = H^T > 0$) *матричного алгебраїчного рівняння Сільвестра*

$$A^T H + HA + B^T HB = -G, \tag{5}$$

де G *— довільно вибрана, додатно визначена, стала матриця* ($G = G^T > 0$); матрицею G може бути одинична матриця E.

Як видно, даний критерій має алгебраїчний, коефіцієнтний вигляд.

Покажемо, що ці критерії еквівалентні. З цією метою побудуємо спряжене до (3) рівняння, ввівши n^2-вимірний вектор-стовпець $\tilde{q} = [\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n, \tilde{q}_{n+1}, \ldots, \tilde{q}_{n^2}]^T$ (фазову змінну спряженої системи), і використаємо властивість розв'язків спряжених систем:

$$q^T \tilde{q} = \text{const}. \tag{6}$$

Диференціюючи (6), одержуємо рівність

$$q^T \left[(A^T \otimes E + E \otimes A^T + B^T \otimes B^T)\, \tilde{q} + \frac{d\tilde{q}}{dt} \right] = 0. \tag{7}$$

Завдяки довільності вектор-стовпця q із (7) одержимо диференціальне рівняння для спряженої змінної $\tilde{q}$:

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} + (A^T \otimes E + E \otimes A^T + B^T \otimes B^T)\, \tilde{q} = 0. \tag{8}$$

Вводячи до розгляду матрицю $\tilde{Q}(t)$ розміру $n \times n$:

$$\tilde{Q}(t) = [\tilde{q}_{ij}]_1^n, \quad \tilde{q}_{11} = \tilde{q}_1, \ \tilde{q}_{12} = \tilde{q}_2, \ \ldots, \ \tilde{q}_{1n} = \tilde{q}_n,$$

$$\tilde{q}_{21} = \tilde{q}_{n+1}, \ldots, \ \tilde{q}_{2n} = \tilde{q}_{n+n}, \ \tilde{q}_{n1} = \tilde{q}_{n^2-n+1}, \ \ldots, \ \tilde{q}_{nn} = \tilde{q}_{n^2},$$

векторно-матричне рівняння (8) редукуємо до матричного рівняння

$$\frac{d\tilde{Q}}{dt} + A^T\tilde{Q} + \tilde{Q}A + B^T\tilde{Q}B = 0. \tag{9}$$

Рівняння (9) є спряженим до рівняння (2) і співпадає з однорідною частиною матричного диференціального рівняння

$$\frac{d\tilde{Q}}{dt} + A^T\tilde{Q} + \tilde{Q}A + B^T\tilde{Q}B = -G, \tag{10}$$

для якого рівняння Сільвестра (5) є рівнянням для визначення його стаціонарного розв'язку $\tilde{Q}_{\text{ст}} = H$.

Очевидно, що стаціонарний розв'язок $\tilde{Q}_{\text{ст}}$ рівняння (10) при $G = G^T > 0$ — додатно визначена матриця лише тоді, коли матриця A гурвіцева.

Із наведеної вище властивості розв'язків спряжених рівнянь випливає **твердження**: *для того щоб розв'язок* $Q = 0$ *системи рівнянь* (2) *був асимптотично стійким при* $t \to \infty$, *необхідно і достатньо, щоб рівняння* (10) *мало асимптотично стійкий при* $t \to -\infty$ *стаціонарний, додатно визначений розв'язок* $\tilde{Q}_{\text{ст}} = H$; *для цього, в свою чергу, необхідно і достатньо, щоб всі власні значення матриці*

$$A^T \otimes E + E \otimes A^T + B^T \otimes B^T \tag{11}$$

мали від'ємні дійсні частини.

Як видно, матриця (11) є транспонованою матрицею (4); отже, її власні значення співпадають із власними значеннями матриці (4). Звідси випливає еквівалентність спектрального і коефіцієнтного критеріїв асимптотичної стійкості в середньому квадратичному розв'язків системи рівнянь (1).

3. Стохастичні різницеві рівняння з дискретним часом. Аналогічний до наведеного в п. 2 результат можна одержати і для стохастичного різницевого рівняння

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k)\xi(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad x(0) = x_0, \tag{12}$$

де вектор-стовпець $x \in \mathbb{R}^n$; сталі матриці $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $\xi(k)$ — скалярний, дискретний, стаціонарний, стандартний „білий" шум $(\mathbf{M}\{\xi(k)\} = 0, \ \mathbf{M}\{\xi^2(k)\} = 1, \ \mathbf{M}\{\xi(k)\xi(j), k \neq j\} = 0)$.

Спектральний критерій асимптотичної стійкості в середньому квадратичному розв'язку $x(k) = 0$ системи стохастичних рівнянь (12) із „білошумними" коефіцієнтами випливає безпосередньо із розгляду різницевого рівняння для матриці моментів другого порядку $Q(k) = [q_{ij}(k)]_1^n \equiv \mathbf{M}\{x(k)x^T(k)\}$:

$$Q(k+1) = A\,Q(k)A^T + B\,Q(k)B^T. \tag{13}$$

Вводячи до розгляду вектор-стовпець $q(k)$, матричне рівняння (13) можна записати у векторно-матричному вигляді

$$q(k+1) = (A \otimes A + B \otimes B)q(k). \tag{14}$$

Тоді справедливе таке твердження — ***спектральний критерій***: *для асимптотичної стійкості в середньому квадратичному нульового розв'язку* ($x(k) = 0$) *системи рівнянь* (12) *необхідно і достатньо, щоб власні значення матриці* $\mathcal{A}_1$ *розміру* $n^2 \times n^2$,

$$\mathcal{A}_1 = A \otimes A + B \otimes B, \tag{15}$$

були за модулем менші одиниці (*тобто матриця* $\mathcal{A}_1$ — *збіжна*).

Однією із перших робіт, в якій для стохастичної системи рівнянь (12) з „білим" шумом виписано рівняння для моментів другого порядку у вигляді (13), мабуть, треба вважати роботу М. Л. Свердана [12], проте наведений вище спектральний критерій асимптотичної стійкості в ній не сформульовано. В опублікованих раніше статті Р. Калмана [13] і книзі Р. З. Хасьмінського [10] (гл. VI, § 6) сформульовані спектральні критерії для стохастичних різницевих рівнянь частинного вигляду $x_n = A_n x_{n-1}$, коли A_n — послідовність незалежних, однаково розподілених матриць (так що послідовність $x_n = A_n x_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, утворює ланцюг Маркова).

Розроблені на сьогодні критерії стійкості в середньому квадратичному розв'язків лінійних стохастичних різницевих рівнянь з коефіцієнтами типу марковського ланцюга наведені в книзі [14]; зокрема, в ній алгебраїчні, коефіцієнтні критерії подаються в термінах послідовності матричних алгебраїчних рівнянь Ляпунова. Бібліографія досліджень стійкості в середньому квадратичному розв'язків стохастичних різницевих рівнянь з дискретним часом і „білошумними" коефіцієнтами до 1989 р. наведена в огляді [15] і монографії [11], за станом на 1994 р. — в книгах [16, 17].

В монографії [11] (теорема 2.2) з допомогою стохастичної функції Ляпунова ***критерій*** асимптотичної стійкості в середньому квадратичному для стохастичної різницевої системи рівнянь (12) з „білошумними" коефіцієнтами одержано в іншому вигляді — ***в термінах матричного алгебраїчного рівняння Сільвестра***: *нульовий розв'язок* ($x(k) = 0$) *системи рівнянь* (12) *асимптотично стійкий в середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли матриця* A *збіжна і існує додатно визначений розв'язок* H ($H = H^T > 0$) *матричного алгебраїчного рівняння Сільвестра*

$$H - A^T H A - B^T H B = G, \tag{16}$$

де G — *довільно вибрана, стала, симетрична, додатно визначена матриця* ($G = G^T > 0$).

Як видно, даний критерій має алгебраїчний, коефіцієнтний вигляд.

Покажемо, що ці критерії еквівалентні. Схема доведення повторює хід міркувань із п. 2. Спряженим до рівняння (13) є таке рівняння:

$$\tilde{Q}(k+1) - A^T \tilde{Q}(k) A - B^T \tilde{Q}(k) B = 0. \tag{17}$$

Рівняння (17) — однорідна частина різницевого рівняння

$$\tilde{Q}(k+1) - A^T \tilde{Q}(k) A - B^T \tilde{Q}(k) B = G, \tag{18}$$

для якого матричне рівняння Сільвестра (16) є рівнянням для визначення його стаціонарного розв'язку $\tilde{Q}_{\text{ст}} = H$.

Стаціонарний розв'язок рівняння (18) при $G = G^T > 0$ є додатно визначеним лише тоді, коли матриця A збіжна (власні значення за модулем менші одиниці). Із властивості розв'язків спряжених систем рівнянь випливає таке **твердження**: *для того щоб нульовий розв'язок* $Q = 0$ *рівняння* (13) *був асимптотично стійким при* $k \to \infty$, *необхідно і достатньо, щоб рівняння* (18) *мало* *асимптотично стійкий при $k \to -\infty$ стаціонарний, додатно визначений розв'язок $\tilde{Q}_{\text{ст}} = H$; для цього, в свою чергу, необхідно і достатньо, щоб всі власні значення матриці*

$$A^T \otimes A^T + B^T \otimes B^T \tag{19}$$

були за модулем менші одиниці.

Як видно, матриця (19) є транспонованою матрицею (15); отже, її власні значення співпадають із власними значеннями матриці (15). Звідси випливає еквівалентність спектрального і коефіцієнтного критеріїв асимптотичної стійкості в середньому квадратичному для стохастичної системи різницевих рівнянь з дискретним часом (12).

4. Стохастичні різницеві рівняння з неперервним часом. Розглянемо початкову задачу для системи лінійних стохастичних різницевих рівнянь з неперервним часом

$$x(t+\tau) = [A + B\xi(t)]x(t), \quad t_0 \le t, \quad x(t_0) = x_0, \tag{20}$$

де вектор-стовпець $x \in \mathbb{R}^n$; сталі матриці коефіцієнтів $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, x_0 — детермінована початкова умова; $\xi(t)$ — скалярний, стаціонарний, випадковий процес типу стандартного „білого" шуму (так що $\mathbf{M}\{\xi(t)\} = 0$, $\mathbf{M}\{\xi^2(t)\} = 1$, $\mathbf{M}\{\xi(t)\xi(t_1), t \ne t_1\} = 0$); τ — додатна стала.

Рівняння для моментів другого порядку $Q(t)$ розв'язку стохастичного рівняння (20) має вигляд

$$Q(t+\tau) = A\,Q(t)A^T + B\,Q(t)B^T. \tag{21}$$

Формулювання спектрального і алгебраїчного коефіцієнтного критеріїв асимптотичної стійкості в середньому квадратичному співпадає з формулюванням відповідних критеріїв для стохастичних різницевих рівнянь з дискретним часом із п. 3 і наведене в роботах [18–20]: взаємозв'язок критеріїв встановлюється також аналогічно п. 3.

5. Висновки. В даний час визнається необхідність розвитку теорії стійкості для аналізу і синтезу стохастичних динамічних систем в зрозумілому і доступному для чисельних розрахунків вигляді. Встановлені і викладені в даній статті факти є невеликою частинкою цього цілеспрямованого потоку наукових досліджень. Підсумовуючи, можна зробити деякі висновки:

1. Настільки різні за змістом та формулюванням спектральні і алгебраїчні коефіцієнтні критерії асимптотичної стійкості в середньому квадратичному для лінійних стохастичних динамічних систем, як виявилось, мають простий взаємозв'язок. Цей взаємозв'язок є наслідком взаємної спряженості матриці коефіцієнтів рівняння для моментів другого порядку і матричної конструкції, що складає матричне алгебраїчне рівняння Сільвестра.

2. Це дослідження дає поштовх для постановки задач стійкості для більш складних класів систем лінійних стохастичних рівнянь — систем стохастичних диференціально-різницевих рівнянь із сталим запізненням аргументу, стохастичних нескінченновимірних (і перш за все, зліченних) систем та ін. Відмітимо, що для систем диференціально-різницевих рівнянь спектральний і коефіцієнтні критерії мають трансцендентну структуру і тому в загальній постановці задачі про асимптотичну стійкість знайти аналогічний зв'язок між критеріями, мабуть, неможливо. Проте, для більш звуженої постановки задачі про асимптотичну стійкість — так званої задачі про абсолютну за запізненням (іншими словами, рівномірну за запізненням) асимптотичну стійкість [21] — деякі результати в рамках постановки задачі і способу розв'язку, аналогічних наведеним в цій статті, можна одержати.

На закінчення відмітимо, що тема і метод даного дослідження анонсовані автором в [22].

1. *Паркс П.* Новое доказательство критерия Рауса – Гурвица, основанное на применении второго метода Ляпунова // Механика: Период. сб. пер. иностр. ст. – 1964. – № 4. – С. 22 – 31.
2. *Кузьмин П. А.* Теорема Гурвица в прямом методе Ляпунова // Математика и механика: Тр. Казан. авиац. ин-та. – 1962. – Вып. 71. – С. 3 – 11.
3. *Яроминек В.* Об эквивалентности критерия устойчивости по Раусу – Гурвицу и по Маркову // Докл. АН СССР. – 1960. – **130**, № 6. – С. 1224 – 1227.
4. *Parks P. C.* Liapunov and Shur – Cohn stability criterion // IEEE Trans. Automat. Control. – 1964. – AC-9, № 1. – P. 121.
5. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач: Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 418с.
6. *Сопряженное* дифференциальное уравнение // Математическая энциклопедия: В 5-ти т. – М.: Сов. энциклопедия, 1984. – Т. 5. – С. 83 – 85.
7. *Гихман И. И.* Дифференциальные уравнения со случайными функциями // Зимняя школа по теории вероятностей и мат. статистике (Ужгород, 1964 г.): Труды. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1964. – С. 41 – 85.
8. *Гихман И. И.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Предельные теоремы и статистические выводы: Сб. тр. – Ташкент: Фан, 1966. – С. 14 – 45.
9. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
10. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
11. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
12. *Свердан М. Л.* Устойчивость тривиального решения линейных систем со случайными параметрами // Дополнение № 1 в кн.: Д. И. Мартынюк. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1972. – С. 166 – 196.
13. *Калман Р. Е.* Управление линейными динамическими системами со случайными изменениями // Гидродинамическая неустойчивость: Тр. симп. по прикл. математике (1960 г.): Пер. с англ. – М.: Мир, 1964. – С. 338 – 351.
14. *Валеев К. Г., Карелова О. Л., Горелов В. И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Рос. ун-т дружбы народов, 1996. – 258 с.
15. *Пакшин П. В.* Устойчивость линейных и специальных нелинейных стохастических систем с параметрическими шумами // Динамика неоднородных систем: Материалы семинара. – М.: ВНИИ систем. исслед. – 1983. – С. 26 – 40.
16. *Пакшин П. В.* Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. – М.: Наука, 1994. – 303 с.
17. *Свердан М. Л., Царьков Е. Ф.* Устойчивость стохастических импульсных систем. – Рига: Рижс. техн. ун-т, 1994. – 300 с.
18. *Кореневский Д. Г.* К асимптотической устойчивости решений систем линейных стохастических разностных уравнений с непрерывным временем и запаздыванием // Дослідження мат. моделей: Зб. наук. праць, присв. пам'яті проф. В. П. Рубаника. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – С. 131 – 137.
19. *Кореневский Д. Г.* Критерии асимптотической устойчивости в среднем квадратичном решений систем линейных стохастических разностных уравнений с непрерывным временем и запаздыванием // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 8. – С. 1073 – 1081.
20. *Кореневский Д. Г.* Асимптотическая устойчивость решений систем линейных разностных уравнений с непрерывным временем и запаздыванием при случайных возмущениях коэффициентов // Докл. РАН. – 1999. – **365**, № 1. – С. 13 – 16.
21. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений (алгебраические критерии). – Киев: Наук. думка, 1992. – 148 с.
22. *Кореневский Д. Г.* Эквивалентность спектрального и коэффициентного критериев асимптотической устойчивости в среднем квадратичном решений линейных стохастических дифференциальных и разностных уравнений // Мат. методы исслед. прикладных задач динамики тел, несущих жидкость: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 47 – 52.

Одержано 06.01.99