УДК 517.5

С. Я. Деканов, Г. О. Михалін (Нац. пед. ун-т, Київ)

УЗАГАЛЬНЕННЯ ОДНІЄЇ ТЕОРЕМИ РОГОЗИНСЬКИХ

Necessary and sufficient conditions are indicated which are imposed on numerical functions $\alpha_j(x)$, $j \in N$, $x \in X$, for conditions $K(f_j) \subset K(f_1)$ $\forall j \geq 2$ and $\lim\limits_{U_r} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) f_j(x) = a$ to imply a condition $\lim\limits_{U_r} f_1(x) = a$. Functions $f_j(x)$ are uniformly bounded on a set X, take values in a boundedly compact space L, and $K(f_j)$ is a kernel of the function f_j. The well-known Rogosinski – Rogosinski theorem follows from the proved statements in the case where $X = N$, $\alpha_j(x) \equiv \alpha_j$, and the space L is an Euclidean m-dimensional space.

Вказано необхідні і достатні умови, які накладаються на числові функції $\alpha_j(x)$, $j \in N$, $x \in X$, для того щоб з умов $K(f_j) \subset K(f_1)$ $\forall j \geq 2$ і $\lim\limits_{U_r} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) f_j(x) = a$ випливала умова $\lim\limits_{U_r} f_1(x) = a$. Функції $f_j(x)$ рівномірно обмежені на множині X і набувають значень з обмежено компактного простору L, а $K(f_j)$ — ядро функції f_j. Відома теорема Рогозинських випливає з доведених тверджень, коли $X = N$, $\alpha_j(x) \equiv \alpha_j$, а простір L є m-вимірним евклідовим простором.

1. Нехай X — довільна непорожня множина, для якої існує система $\{U_r : r \geq 0\}$ непорожніх підмножин множини X, що задовольняють умови: $U_0 = X$, $U_{r_1} \subset U_{r_2}$ $\forall r_1 > r_2$ і $\bigcap_{r \geq 0} U_r = \varnothing$. Якщо функція f визначена на множині X і набуває значень з нормованого простору L, то елемент $a \in L$ називають границею функції f за системою U_r, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists r_0 = r_0(\varepsilon)$: $\|f(x) - a\| < \varepsilon$ $\forall x \in U_{r_0}$. При цьому записують $\lim\limits_{U_r} f = a$ або $f \to a\,(U_r)$. Зрозуміло, що $a = \lim\limits_{U_r} f \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ $\forall r_n \uparrow +\infty$ і $\forall x_n \in U_{r_n}$. Якщо $a = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ для деякої послідовності (x_n): $r_n \uparrow +\infty$ і $x_n \in U_{r_n}$, то елемент a називають частковою границею функції f за системою U_r. У випадку $L = R$ природно вводяться верхня та нижня границі функції f за системою U_r: $\varliminf\limits_{U_r} f$ і $\varlimsup\limits_{U_r} f$.

Якщо функція f обмежена на множині X, а E_f — множина її часткових границь за системою U_r, то замкнену опуклу оболонку E_f називають ядром функції f і позначають $K(f)$ [1–3].

Простір L надалі вважаємо обмежено компактним у тому розумінні, що кожна обмежена послідовність точок цього простору має часткову границю.

Основним результатом роботи є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $\alpha_j(x)$, $j \in N$, $x \in X$, — задана послідовність числових функцій така, що ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)$ збігається на множині X і $\lim\limits_{U_r} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) = 1$, а функції $f_j(x)$, $j \in N$, $x \in X$, набувають значень з обмежено компактного простору L.*

Для того щоб для всіх функціональних послідовностей $(f_j(x))$, рівномірно обмежених на X і таких, що $K(f_j) \subset K(f_1)$ $\forall j \geq 2$, а ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) f_j(x)$ збігається на X, з умови $\lim\limits_{U_r} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) f_j(x) = a$ випливала умова $\lim\limits_{U_r} f_1(x) = a$, необхідно і достатньо, щоб

$$\exists c > 1, \ \exists r_0 \geq 0 \ : \sum_{j=2}^{\infty} |\alpha_j(x)| \overset{p}{=} \alpha(x) \leq \frac{1}{c} |\alpha_1(x)| \quad \forall x \in U_{r_0},$$

де символ „p" над знаком рівності означає рівномірну збіжність функціонального ряду.

З теореми 1 випливає теорема 2.

Теорема 2. *Нехай* $\alpha(x)$, $x \in X$, *— задана числова функція. Для того щоб з рівності* $\lim\limits_{U_r} (\alpha(x) f(x) + (1-\alpha(x)) g(x)) = a$, *де* f *і* g *— обмежені* L*-значні* (*L — простір теореми* 1) *функції, для яких* $K(g) \subset K(f)$, *кожного разу випливала рівність* $\lim\limits_{U_r} f = a$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$\exists c > 1, \ \exists r_0 \geq 0 : |1-\alpha(x)| \leq \frac{1}{c} |\alpha(x)| \quad \forall x \in U_{r_0},$$

а це у випадку $\alpha(x) \in R \ \forall x \in X$ *рівносильно умові*

$$\frac{1}{2} < \underline{\lim_{U_r}} \alpha(x) \leq \overline{\lim_{U_r}} \alpha(x) < +\infty.$$

Якщо в умовах теорем 1 і 2 множина $X = N^m$, де $m \in N$ — фіксоване число, а система U_r визначається рівностями $U_r = \{ x = (n_1, n_2, \ldots, n_m) \in N^m : n_k > r$ для кожного $k \in \overline{1, m} \}$, то для кожного $j \in N$ функції $\alpha_j(x) = \alpha_j(n_1, n_2, \ldots$ $\ldots, n_m)$ і $f_j(x) = f_j(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ перетворюються у m-кратні послідовності з границями або частковими границями у розумінні Прингсхейма. Зокрема, якщо $X = N$, L — m-вимірний евклідів простір, а $\alpha_j(x) = \alpha_j$ для кожного $x \in X = N$, то теорема 1 дає відому теорему Рогозинських [4].

Зауваження. Умова обмеженої компактності простору L є суттєвою для правильності теорем 1 і 2. Дійсно, якщо L — простір, елементами якого є многочлени, розглядувані як функції, неперервні на відрізку $[a, b]$, то L є підпростором простору $C[a, b]$ з нормою $\|f\| = \max\limits_{[a, b]} |f(x)|$. Розглянемо послідовність $f_n = f_n(x) \in L : f_n(x) \rightrightarrows e^x$, $x \in [a, b]$. Тоді (f_n) — обмежена послідовність у просторі L, яка не має жодної часткової границі, тобто $K(f) = \varnothing$. Зрозуміло, що і $K(\alpha f) = \varnothing$, $\alpha \neq 0$. Візьмемо $\alpha = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$, $g_n = -3 f_n$ і одержимо $1 - \alpha = \frac{1}{4}$, $K(g) = K(f) = \varnothing$ і $\alpha f_n + (1-\alpha) g_n \equiv \theta$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha f_n + (1-\alpha) g_n) = \theta$, де θ — нуль простору L, або многочлен, що є тотожним нулем. У той же час $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \neq \theta$, тобто у побудованому просторі L твердження теореми 2, а тому і теореми 1, неправильні.

2. Для доведення теореми 1 знадобляться деякі допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай* $\alpha_j(x)$, $j \in N$, $x \in X$, *— числові функції, для яких* $\sum_{j=2}^{\infty} |\alpha_j(x)| = \alpha(x)$, $x \in X$, *і виконуються такі умови:* А) $\exists c > 1 \ \ \exists r_0 \geq 0 :$ $\alpha(x) \leq \frac{1}{c} |\alpha_1(x)| \ \forall x \in U_{r_0}$, В) $\exists \ r_0 \geq 0 : \alpha(x) = 0 \ \forall x \in U_{r_0}$ або $U_r^* = \{ x \in U_r :$ $\alpha(x) \neq 0 \} \neq \varnothing \ \forall r \geq 0$ і $\underline{\lim\limits_{U_r^*}} \dfrac{|\alpha_1(x)|}{\alpha(x)} > 1.$

Тоді умови А *і* В *рівносильні.*

Лема 2. *Якщо для функцій* $\alpha_j(x)$ *з леми* 1 *крім умови* B *існує* $\lim\limits_{U_r}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(x)=1$, *то* $\alpha_1(x)=O(1)(U_r)$, *тобто* $\exists\, H>0$ *і* $\exists\, r_0: |\alpha_1(x)|\leq H$ $\forall\, x\in U_{r_0}$.

Лема 3. *Якщо для функцій* $\alpha_j(x)$ *з леми* 1 *ряд* $\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j(x)|$ *на множині* U_r *збігається, але нерівномірно* $\forall\, r\geq 0$, то $\exists\,\varepsilon>0$, $\exists\,(x_k)$, (r_k) і (s_k): $s_k<r_k<s_{k+1}$, $r_k\uparrow+\infty$, $x_k\in U_{r_k}\setminus U_{r_{k+1}}$ і $\sum_{j=s_k+1}^{\infty}|\alpha_j(x_k)|\geq\varepsilon$ $\forall\, k$.

Лема 4. *Нехай* $z_0\in L$, $\|z_0\|=1$ і $\{\beta_k\}$ — *зчисленна множина, скрізь щільна у замкненій одиничній кулі простору* C *комплексних чисел, а* (γ_k) — *комплекснозначна послідовність, усі часткові границі якої лежать у замкненій одиничній кулі. Тоді*: 1) *кожна часткова границя послідовності* $(z_0\beta_k\gamma_k)$ *є частковою границею послідовності* $(z_0\beta_k)=(z_k)$ *і* 2) *кожна точка вигляду* βz_0, *де* $|\beta|\leq 1$, *є частковою границею послідовності* (z_k).

3. ***Доведення леми*** **1.** Нехай виконується умова A. Якщо $U_r^*=\{x\in U_r: \alpha(x)\neq 0\}\neq\varnothing$ $\forall\, r\geq 0$, то $\alpha(x)\leq\dfrac{1}{c}|\alpha_1(x)|$ $\forall\, x\in U_r^*$, $\forall\, r\geq r_0$. Звідси випливає умова B.

Нехай виконується умова B. Якщо $\exists\, r_0\geq 0: \alpha(x)=0$ $\forall\, x\in U_{r_0}$, то умова A виконується. Припустимо, що при $r\geq 0$ множина $U_r^*=\{x\in U_r: \alpha(x)\neq 0\}\neq\varnothing$. Якщо $\varliminf\limits_{U_r^*}\dfrac{|\alpha_1(x)|}{\alpha(x)}>1$, то $\exists\, c>1$ і $\exists\, r_0\geq 0$: $\dfrac{|\alpha_1(x)|}{\alpha(x)}\geq c>1$ $\forall\, x\in U_{r_0}^*$. Тому $\alpha(x)\leq\dfrac{1}{c}|\alpha_1(x)|$ $\forall\, x\in U_{r_0}^*$. На множині $U_{r_0}\setminus U_{r_0}^*$ остання нерівність також правильна, оскільки $\alpha(x)=0$ $\forall\, x\in U_{r_0}\setminus U_{r_0}^*$. Таким чином, умова A виконується і лему 1 доведено.

4. ***Доведення леми*** **2.** Припустимо, що $\alpha_1(x)\neq O(1)(U_r)$, тобто $\exists\, r_k\uparrow+\infty$, $x_k\in U_{r_k}: \alpha_1(x_k)\to\infty$ $(k\to\infty)$. Перша частина умови B, тобто $\exists\, r_0\geq 0$: $\alpha(x)=0$ $\forall\, x\in U_{r_0}$, при цьому не може виконуватись, оскільки тоді $\alpha_1(x)\to 1(U_r)$.

Позначимо $\gamma(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(x)$ і матимемо $\gamma(x)\to 1(U_r)$, $\alpha(x)=\sum_{j=2}^{\infty}|\alpha_j(x)|\geq\left|\sum_{j=2}^{\infty}\alpha_j(x)\right|=|\gamma(x)-\alpha_1(x)|\to\infty$, коли $x=x_k$ і $k\to\infty$. Звідси випливає, що $x_k\in U_{r_k}^*$ $\forall\, k\geq k_0$, а тому за другою частиною умови B $\varliminf\limits_{k\to\infty}\dfrac{|\alpha_1(x_k)|}{\alpha(x_k)}>1$. Але, з іншого боку,

$$\frac{|\alpha_1(x_k)|}{\alpha(x_k)}\leq\frac{|\alpha_1(x_k)|}{\left|\sum\limits_{j=2}^{\infty}\alpha_j(x_k)\right|}=\frac{\left|\gamma(x_k)-\sum\limits_{j=2}^{\infty}\alpha_j(x_k)\right|}{\left|\sum\limits_{j=2}^{\infty}\alpha_j(x_k)\right|}\to 1\ (k\to\infty).$$

Отримали суперечність, яка доводить лему 2.

5. ***Доведення леми*** **3.** Позначимо $R_n(x) = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\alpha_j(x_k)|$ $\forall\, n$. Тоді $R_n(x) \geq R_{n+1}(x)$ $\forall\, n \in N$ і $\forall\, x \in X$. Оскільки ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(x)|$ збігається на множині U_r, але нерівномірно $\forall\, r \geq 0$, то це означає, що

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \exists\, r_i^* \uparrow +\infty \text{ і } x_i^* \in U_{r_i^*} \setminus U_{r_{i+1}^*} : R_i(x_i^*) \geq \varepsilon \quad \forall\, i.$$

Зрозуміло, що і $R_s(x_i) \geq \varepsilon$ $\forall\, s \leq i$. Врахувавши це, знайдемо $i_1 > 1 : r_1 := r_{i_1}^* > > 1$ і покладемо $s_1 := 0$, $x_1 := x_{i_1}^*$. Тоді

$$\sum_{j=s_1+1}^{\infty} \left|\alpha_j(x_1)\right| \geq \sum_{j=i_1+1}^{\infty} \left|\alpha_j(x_{i_1}^*)\right| = R_{i_1}(x_{i_1}^*) \geq \varepsilon,$$

причому $x_1 \in U_{r_1} = U_{r_{i_1}^*}$ і $s_1 > r_1$. Припустимо, що вже визначено r_k, $x_k \in U_{r_k}$ та $s_k < r_k$, і знайдемо номер s_{k+1} такий, щоб $s_{k+1} > r_k$. Число i_{k+1} знайдемо таким, щоб $i_{k+1} > s_{k+1}$, а $r_{k+1} := r_{i_{k+1}}^* > s_{k+1}$ і покладемо $x_{k+1} := x_{i_{k+1}}^*$. Тоді

$$\sum_{j=s_{k+1}+1}^{\infty} \left|\alpha_j(x_{k+1})\right| \geq \sum_{j=i_{k+1}+1}^{\infty} \left|\alpha_j(x_{i_{k+1}}^*)\right| = R_{i_{k+1}}(x_{i_{k+1}}^*) \geq \varepsilon,$$

причому

$$x_{k+1} = x_{i_{k+1}}^* \in U_{r_{i_{k+1}}^*} \setminus U_{r_{i_{k+1}+1}^*} = U_{r_{k+1}} \setminus U_r \quad \forall\, r \geq r_{i_{k+1}+1}^*.$$

За принципом математичної індукції послідовності (x_k), (r_k) і (s_k) побудовані і лему 3 доведено.

6. ***Доведення леми*** **4.** 1. Якщо $z_0\beta_k\gamma_k \to a$, $k = k_i \to \infty$, то можна вважати, що $\beta_k \to \beta$, $\gamma_k \to \gamma$, $k = k_i \to \infty$. Зрозуміло, що $|\beta| \leq 1$ і $|\gamma| \leq 1$, а тому $|\beta\gamma| \leq 1$ і за умовою леми 4 $\exists\,(\beta_{n_k})$: $\beta_{n_k} \to \beta\gamma$, $k = k_i \to \infty$. Отже,

$$z_0\beta_{n_k} - z_0\beta_k\gamma_k = z_0(\beta_{n_k} - \beta_k\gamma_k) \to \theta, \quad k = k_i \to \infty.$$

Звідси випливає, що точка $a = z_0\beta\gamma$ є частковою границею послідовності $(z_0\beta_k)$.

2. Нехай $|\beta| \leq 1$. Тоді $\exists\,(\beta_{k_i})$: $\beta_{k_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} \beta$. Маємо

$$\| z_{k_i} - \beta z_0 \| = \| \beta_{k_i} z_0 - \beta z_0 \| = | \beta_{k_i} - \beta | \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,$$

тобто точка βz_0 є частковою границею послідовності (z_k).

Лему 4 доведено.

7. ***Доведення теореми*** **1.** *Необхідність.* Доведемо, що $\exists\, r_0 \geq 0$: ряд $\sum_{j=2}^{\infty} |\alpha_j(x)|$ збігається до деякого числа $\alpha(x)$ $\forall\, x \in U_{r_0}$. Припустимо супротивне:

$$\exists\, r_k \uparrow +\infty \text{ і } x_k \in U_{r_k} \setminus U_{r_{k+1}} : \sum_{j=2}^{\infty} |\alpha_j(x_k)| = +\infty \quad \forall\, k.$$

Тоді

$$\forall\, k\ \exists\, m_k : \frac{|\alpha_1(x_k)|}{\sum_{j=2}^{m_k} |\alpha_j(x_k)|} \leq 1. \tag{1}$$

Нехай (z_k) — послідовність, визначена у лемі 1. Визначимо функції f_j

рівностями $f_1(x)=z_k$, коли $x=x_k$ і $f_1(x)=\theta$ — в інших випадках, а $\forall j\geq 2$ покладемо $f_j(x)=-\alpha_1(x)\operatorname{sign}\alpha_j(x)f_1(x)/\sum_{i=2}^{m_k}|\alpha_i(x)|$, коли $x=x_k$ і $j\leq m_k$, та $f_j(x)=\theta$ — в інших випадках, де θ — нуль простору L. Тоді для $j\geq 2$

$$\|f_j(x)\| = \begin{cases} \dfrac{|\alpha_1(x)|}{\sum_{i=2}^{m_k}|\alpha_i(x)|}\|f_1(x)\|, & \text{якщо } x=x_k,\ j\leq m_k \text{ і } \alpha_j(x_k)\neq 0, \\ 0 & \text{— в інших випадках.} \end{cases}$$

Звідси, враховуючи нерівність (1) та означення функції f_1, маємо $\|f_j(x)\|\leq$ $\leq\|f_1\|\leq 1$ при кожному $j\geq 2$ та $x\in X$. Отже, функціональна послідовність $(f_j(x))$ рівномірно обмежена одиницею на множині X, причому за лемою 4 $K(f_j)\subset K(f_1)$, $j\geq 2$. Крім цього, з означення функцій f_j випливає, що $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(x)f_j(x)=\theta$, $x\in X$. Таким чином, $\lim\limits_{U_r}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(x)f_j(x)=\theta$ і за умовою теореми 1 необхідно, щоб $\lim\limits_{U_r}f_1(x)=\theta$, але це за твердженням 2 леми 4 неможливо. Одержали суперечність, яка доводить, що $\exists\, r_0\geq 0:\ \sum_{j=2}^{\infty}|\alpha_j(x)|=$ $=\alpha(x)$, $x\in U_{r_0}$. Можемо вважати, що $r_0=0$, оскільки в іншому разі можна звузити X до U_{r_0}.

Доведемо тепер, що виконується умова А леми 1. Припустимо, що це не так. Тоді за лемою 1 не виконується і умова В. Тому $\exists\, r_k\uparrow+\infty$, $x_k\in U_{r_k}\backslash U_{r_{k+1}}$: $\alpha(x_k)\neq 0\ \forall k\in N$ і $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|\alpha_1(x_k)|}{\alpha(x_k)}=\overline{\omega}\leq 1$. Скористаємось визначеною вище послідовністю (z_k) і покладемо $f_1(x_k)=z_k\ \forall k$ і $f_1(x)=\theta$ — в інших випадках. А коли $j\geq 2$, то $f_j(x_k)=-\alpha_1(x_k)\operatorname{sign}\alpha_j(x_k)f_1(x_k)/\alpha(x_k)$ і $f_j(x)=\theta$ — в інших випадках. Тоді

$$\forall j\geq 2 \qquad \|f_j(x)\| = \begin{cases} \dfrac{|\alpha_1(x)|}{\alpha(x)}\|f_1(x)\|, & \text{якщо } x=x_k \text{ і } \alpha_j(x)\neq 0, \\ 0 & \text{— в інших випадках.} \end{cases}$$

Звідси випливає, що коли b_j — часткова границя за системою U_r функції f_j, $j\geq 2$, то або $b_j=\theta$, або $\|b_j\|=\overline{\omega}\|b_1\|$, де $\overline{\omega}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|\alpha_1(x_k)|}{\alpha(x_k)}\leq 1$, а b_1 — деяка часткова границя за системою U_r функції f_1. Тому за лемою 4 $K(f_j)\subset$ $\subset K(f_1)$, $j\geq 2$.

Зрозуміло також, що послідовність $(f_j(x))$ рівномірно обмежена на множині X і $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(x)f_j(x)=\theta$, $x\in X$. Тому $\lim\limits_{U_r}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(x)f_j(x)=\theta$ і за умовою теореми 1 повинна виконуватись рівність $\lim\limits_{U_r}f_1(x)=\theta$, що, згідно з твердженням 2 леми 4, неможливо. Одержали суперечність, яка доводить, що умова А виконується.

Доведемо, нарешті, що $\exists\, r_0\geq 0:\ \sum_{j=2}^{\infty}|\alpha_j(x)|\overset{p}{=}\alpha(x)$, коли $x\in U_{r_0}$. Припустимо, що це не так. Тоді за лемою 3

$$\exists\,\varepsilon>0,\ r_k\uparrow+\infty,\ x_k\in U_{r_k}\backslash U_{r_{k+1}},\ s_k: s_k<r_k<s_{k+1} \text{ і } \sum_{j=s_k+1}^{\infty}|\alpha_j(x_k)|\geq\varepsilon\ \forall k. \qquad (2)$$

Визначимо функцію f_1, як і раніше, а для $j \geq 2$ покладемо $f_j(x_k) = -\alpha_1(x_k) \operatorname{sign} \alpha_j(x_k) f_1(x_k) / \sum_{j=s_k+1}^{\infty} |\alpha_j(x_k)|$, якщо $j > s_k$, і $f_j(x) = \theta$ — в інших випадках. Зауважимо, що за лемою 4 ядро $K(f_1)$ містить точку θ. Якщо число $j \geq 2$ фіксоване, то $f_j(x) = \theta$, коли $x \neq x_k \ \forall k$ або $x = x_k$ і k настільки велике, щоб $s_k \geq j$. Тому $\lim_{U_r} f_j(x) = \theta$, тобто $K(f_j) = \{\theta\} \subset K(f_1) \ \forall j \geq 2$. За лемою 2 $\exists H > 0$ і $r_0 \geq 0 : |\alpha_1(x)| \leq H \ \forall x \in U_{r_0}$, причому можна вважати $U_{r_0} = X$. Оскільки при $j \geq 2$

$$\|f_j(x)\| = \begin{cases} \dfrac{|\alpha_1(x)|}{\sum_{j=s_k+1}^{\infty} |\alpha_j(x)|} \|f_1(x)\|, & \text{якщо } x = x_k, \ j > s_k \ \text{ і } \ \alpha_j(x) \neq 0, \\ 0 & \text{— в інших випадках,} \end{cases}$$

то, враховуючи (2), маємо $\|f_j(x)\| \leq \dfrac{H}{\varepsilon} \ \forall j \geq 2$ і $\forall x \in X$. Тому послідовність $(f_j(x))$ рівномірно обмежена на X. Крім цього, за побудовою функцій f_j маємо $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) f_j(x) = \theta \ \forall x \in X$. Отже, $\lim_{U_r} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x) f_j(x) = \theta$, а тому за умовою теореми 1 і $\lim_{U_r} f_1(x) = \theta$, що суперечить твердженню 2 леми 4. Одержали суперечність, яка закінчує доведення необхідності.

Достатність. З умов теореми 1 випливає, що ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)(f_j(x) - a)$ збігається на множині X,

$$\lim_{U_r} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)(f_j(x) - a) = \theta \tag{3}$$

і послідовність $(f_j(x) - a)$ рівномірно обмежена на множині X. Звідси і з умови $\sum_{j=2}^{\infty} |\alpha_j(x)| \overset{p}{=} \alpha(x)$, $x \in U_{r_0}$, маємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(x)(f_j(x) - a) \overset{p}{=} y(x), \qquad x \in U_{r_0}, \tag{4}$$

або навіть $x \in X$, тому що інакше можна звузити X до U_{r_0}. Нехай Y_j — множина часткових границь функції f_j за системою $U_r \ \forall j \in N$. Необхідно довести, що $Y_1 = \{a\}$. Припустимо, що це не так, і позначимо $\sup_{y \in Y_1} \|y - a\| = H > 0$. Тоді $\exists H_1 > H : \dfrac{H_1}{c} < H$ і

$$\exists b_1 \in Y_1 : \frac{H}{c} < \frac{H_1}{c} < \|b_1 - a\| \leq H. \tag{5}$$

Оскільки $K(f_j) \subset K(f_1) \ \forall j \geq 2$, то

$$\|y - a\| \leq H \qquad \forall y \in \bigcup_{j=2}^{\infty} Y_j. \tag{6}$$

Точка b_1 є частковою границею функції f_1 за системою U_r, тому $\exists r_k \uparrow +\infty$, $x_k \in U_{r_k} \ \forall k$ і $a_1 : \alpha_1(x_k) \to a_1$ і $f_1(x_k) \to b_1$, $k \to \infty$. Припустимо, що $a_1 = 0$. Тоді $\sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j(x_k) \to 1$, $k \to \infty$. Згадуючи умови теореми 1, одержуємо

$$1 < c \le \frac{|\alpha_1(x_k)|}{\sum_{j=2}^{\infty}|\alpha_j(x_k)|} \le \frac{|\alpha_1(x_k)|}{\left|\sum_{j=2}^{\infty}\alpha_j(x_k)\right|} \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Ця суперечність доводить, що $|a_1| > 0$.

Покладемо $\varepsilon = \frac{|\alpha_1|}{c}\left(\frac{H_1}{H} - 1\right) > 0$. З умови

$$\sum_{j=2}^{\infty}|\alpha_j(x)| \overset{p}{=} \alpha(x) \le \frac{1}{c}|\alpha_1(x)|, \qquad x \in U_{r_0},$$

зокрема, випливає

$$\forall\, m \ge 2 \text{ і } \forall\, x \in U_{r_0} \quad \sum_{j=2}^{m}|\alpha_j(x)| \le \frac{1}{c}|\alpha_1(x)|. \tag{7}$$

З умови (3) випливає існування

$$r_* > r_0 : \left\|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(x)(f_j(x) - a)\right\| < \frac{H\varepsilon}{2} \qquad \forall\, x \in U_{r_*},$$

а з умови (4) — існування

$$m_* \ge 2 : \left\|\sum_{j=1}^{m_*}\alpha_j(x)(f_j(x) - a) - y(x)\right\| = \left\|\sum_{j=m_*+1}^{\infty}\alpha_j(x)(f_j(x) - a)\right\| < \frac{H\varepsilon}{2} \quad \forall\, x \in U_{r_*}.$$

Тому

$$\left\|\sum_{j=1}^{m_*}\alpha_j(x)(f_j(x) - a)\right\| < H\varepsilon \qquad \forall\, x \in U_{r_*}. \tag{8}$$

Оскільки простір L обмежено компактний, то існує підпослідовність послідовності (x_k) така, що $\forall\, j \in \overline{2, m_*}$ $f_j(x) \to f_j$ і $\alpha_j(x) \to a_j$, коли $x = x_{k_s}$ і $s \to \infty$, причому за лемою 2 та нерівністю (7) усі числа a_j скінченні. З нерівності (8) випливає

$$\left\|\sum_{j=1}^{m_*}a_j(b_j - a)\right\| \le H\varepsilon \Rightarrow |a_1|\,\|b_1 - a\| - \left\|\sum_{j=2}^{m_*}a_j(b_j - a)\right\| \le H\varepsilon.$$

Звідси та з (5) і (6) отримуємо

$$\frac{H_1}{c}|a_1| < |a_1|\,\|b_1 - a\| \le \left\|\sum_{j=2}^{m_*}a_j(b_j - a)\right\| + H\varepsilon \le$$

$$\le \sum_{j=2}^{m_*}|a_j|\,\|b_j - a\| + H\varepsilon \le H\sum_{j=2}^{m_*}|a_j| + H\varepsilon.$$

Отже,

$$\frac{H_1}{Hc}|a_1| < \sum_{j=2}^{m_*}|a_j| + \varepsilon. \tag{9}$$

Якщо в нерівності (7) покласти $m = m_*$ a $x = x_{k_s}$ і перейти до границі при $s \to \infty$, то одержимо $\sum_{j=2}^{m_*}|a_j| \le \frac{|a_1|}{c}$. Звідси та з нерівності (9) випливає

$$\frac{H_1}{H}\frac{|a_1|}{c} < \sum_{j=2}^{m_*}|a_j| + \varepsilon \le \frac{|a_1|}{c} + \varepsilon \Rightarrow \frac{|a_1|}{c}\left(\frac{H_1}{H}-1\right) < \varepsilon.$$

В той же час $\varepsilon = \frac{|a_1|}{c}\left(\frac{H_1}{H}-1\right)$. Отримали суперечність, яка доводить достатність, а з нею і теорему 1.

8. ***Доведення теореми 2.*** Покладемо у теоремі 1 $\alpha_1(x) \equiv \alpha(x)$, $\alpha_2(x) \equiv 1 - \alpha(x)$, $f_1(x) \equiv f(x)$, $f_2(x) \equiv g(x)$, а $\forall j > 2$ $\alpha_j(x) \equiv 0$, $f_j(x)$ — довільні функції: $K(f_j) \subset K(f_1)$ і одержимо, що умови теореми 1 перетворюються в умови теореми 2. Тому залишилось довести, що умова А, яка набуває вигляду

$$\exists\, c > 1 \text{ і } \exists\, r_0 \ge 0 : |1-\alpha(x)| \le \frac{1}{c}|\alpha(x)| \quad \forall x \in U_{r_0}, \tag{10}$$

рівносильна умові

$$\frac{1}{2} < \varliminf_{U_r}\alpha(x) \le \varlimsup_{U_r}\alpha(x) < +\infty, \tag{11}$$

якщо $\alpha(x) \in R$ $\forall x \in X$. Маємо

$$|1-\alpha(x)| \le \frac{1}{c}|\alpha(x)| \Leftrightarrow (1-\alpha(x))^2 \le \frac{1}{c^2}\alpha^2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\alpha(x) + \alpha^2(x) \le \frac{1}{c^2}\alpha^2(x) \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{c^2}\right)\alpha^2(x) - 2\alpha(x) + 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+1/c} \le \alpha(x) \le \frac{1}{1-1/c}.$$

Отже, умова (10) рівносильна умові

$$\exists\, c > 1 \text{ і } \exists\, r_0 \ge 0 : \frac{1}{1+1/c} \le \alpha(x) \le \frac{1}{1-1/c} \quad \forall x \in U_{r_0}. \tag{12}$$

Зрозуміло, що з умови (12) відразу випливає умова (11). Нехай виконується умова (11). Тоді

$$\exists\, r_0 \ge 0,\ a \in \left(\frac{1}{2};1\right) \text{ і } b \in (1;+\infty) : \frac{1}{2} < a \le \alpha(x) \le b \quad \forall x \in U_{r_0}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 1/2+}\frac{1}{2-1/x} = +\infty$, то

$$\exists\, c^* \in \left(\frac{1}{2};a\right) : \frac{1}{2-1/c^*} \ge b \Rightarrow \frac{1}{2} < c^* \le \alpha(x) \le \frac{1}{2-1/c^*} \quad \forall x \in U_{r_0}.$$

Покладемо $c = \frac{1}{1/c^*-1} \Rightarrow c^* = \frac{1}{1+1/c}$, $\frac{1}{2-1/c^*} = \frac{1}{1-1/c}$, причому $c > 1$, оскільки $c^* \in (1/2;1)$. Цим доведено, що з умови (11) випливає умова (12), а відтак теорему 2 доведено.

1. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М.: Физматгиз, 1960. – 472 с.
2. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 504 с.
3. *Ревенко А. В.* Вложение ядер регулярными преобразованиями // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, №5. – С. 662 – 666.
4. *Rogosinski W. W., Rogosinski H. P. Jr.* An elementary companion to a theorem of J. Mercer // Anal. math. – 1965. – **14**. – P. 311 – 322.

Одержано 03.07.97