УДК 517.3

П. І. Когут (Дніпропетров. техн. ун-т залізн. трансп.),
Т. М. Рудянова (Дніпропетров. фін.-економ. ін-т)

V-ГРАНИЧНИЙ АНАЛІЗ ВЕКТОРНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

For arbitrary direction of mappings which are defined on subsets of the Hausdorff space (X, τ) and act onto a vector topological space (Y, τ) semiordered by a solid cone Λ, we introduce a notion of V-boundary. We investigate topological and sequential properties of V-mappings and establish sufficient conditions for their existence. The results presented can be used as the basis for the homogenization procedure in the problems of vector optimization.

Для довільної напрямленості відображень, які означені на підмножинах хаусдорфового простору (X, τ) і діють в напіввпорядкований тілесним конусом Λ векторний топологічний простір (Y, τ), вводиться поняття V-границі. Досліджено топологічні та секвенційні властивості V-граничних відображень, встановлено достатні умови їх існування. Наведені результати можуть бути покладені в основу процедури усереднення задач векторної оптимізації.

Мета даної статті — започаткувати математичні основи процедури усереднення загальних задач векторної оптимізації. Будемо виходити з того, що основним об'єктом, який підлягає усередненню, є оптимізаційна задача

$$\left\langle \Lambda - \operatorname*{Inf}_{x \in X_\varepsilon} F^\varepsilon(x) \right\rangle, \tag{1}$$

де відображення $F^\varepsilon\colon X_\varepsilon \to Y$ набувають значень з векторного топологічного простору Y, який в свою чергу напівупорядковано тілесним конусом Λ. Тут через $\Lambda - \operatorname*{Inf}_{x \in X_\varepsilon} F^\varepsilon(x)$ позначено сукупність всіх точних нижніх (за конусом Λ) граней множини $\left\{ y = F^\varepsilon(x) \mid \forall\, x \in X_\varepsilon \right\}$.

Будемо вважати, що компоненти математичного опису задачі (1) можуть довільним чином залежати від деякого „малого" параметра ε. Зокрема, залежність від параметра ε допускається як для векторнозначного відображення $F^\varepsilon\colon X_\varepsilon \to Y$, за яким оцінюється якість системи, так і для X_ε — множини допустимих значень параметрів та функцій керувань. Ця залежність може бути обумовлена різними причинами: нечіткістю в постановці задачі, наявністю неконтрольованих малих збурень, моделюванням процесів в суттєво неоднорідних середовищах. Наприклад, при проектуванні конструкцій, які виготовлені з композитних матеріалів, параметр ε переважно пов'язують з масштабом неоднорідності композиту (зокрема це може бути період мікроструктури таких матеріалів). Як правило, обчислювальні методи в дослідженні такого класу задач при „малих" значеннях ε стають непридатними [1, 2]. Проте, з точки зору практичних застосувань, на етапі оптимального проектування таких систем за багатьма критеріями важливо вміти визначити їх поведінку при $\varepsilon \to 0$ і побудувати в деякому розумінні граничну (усереднену) задачу оптимального проектування.

Отже, мова йде про необхідність введення поняття граничного переходу на такій множині об'єктів, як задачі векторної оптимізації, а також про дослідження структури та варіаційних властивостей граничної задачі. Зауважимо, що в науковій періодиці практично немає робіт з дослідження проблем усереднення задач векторної оптимізації. Разом з тим наведена вище постановка досліджень багато в чому аналогічна типовим проблемам з теорії усереднення задач умовної мінімізації та оптимального керування (див., наприклад, [1 – 5]). Як відомо, в основі процедури усереднення задач умовної мінімізації та оптимального керування лежить концепція S - збіжності напрямленості функціоналів

$\left\{F^{\varepsilon}: X_{\varepsilon} \to \overline{R}\right\}_{\varepsilon \to 0}$, яка була започаткована в роботах [3–5]. Проте наявність в (1) критерію у вигляді відображення із значеннями у векторному топологічному просторі вносить нову якість і робить неможливим пряме перенесення відомих „однокритеріальних" результатів. Тому в даній статті для довільних напрямленостей відображень $\left\{F^{\varepsilon}: X_{\varepsilon} \to Y\right\}_{\varepsilon \to 0}$ запропоновано „векторнозначний" аналог концепції S-збіжності, яку названо V-збіжністю. Зокрема, показано, що із V-збіжності, як частинний випадок, випливають Γ- і S-збіжність функціоналів та G-збіжність операторів.

Нехай (X, τ) — довільний хаусдорфовий простір, (Y, μ) — дійсний векторний топологічний простір, який напівупорядковано конусом Λ (тобто бінарне відношення $x \overset{(\Lambda)}{\leq} y$ означено тільки для тих елементів $x, y \in Y$, які задовольняють умову $y - x \in \Lambda$). Конус Λ будемо вважати тілесним і замкненим. Нехай $\overset{(\Lambda)}{<}$ — відношення строгого порядку на Y, тобто $x \overset{(\Lambda)}{<} y$, якщо $x \overset{(\Lambda)}{\leq}$ $\overset{(\Lambda)}{\leq} y$ і $x \neq y$. Для довільної підмножини Ω напівупорядкованого векторного простору $\left(Y, \overset{(\Lambda)}{\leq}\right)$ позначимо через $\operatorname{Min}(\Omega \mid \Lambda)$ сукупність всіх її $\overset{(\Lambda)}{\leq}$-мінімальних елементів, тобто $x^* \in \Omega$ є $\overset{(\Lambda)}{\leq}$-мінімальним, якщо не існує $y \in \Omega$ такого, що $y \overset{(\Lambda)}{<} x^*$. Аналогічним чином можна означити множину $\operatorname{Max}(\Omega \mid \Lambda)$. Далі, через $\Lambda - \operatorname{Inf}(\Omega)$ будемо позначати сукупність всіх точних нижніх граней для Ω, тобто $x^* \in Y$ належить $\Lambda - \operatorname{Inf}(\Omega)$, якщо не існує $y \in \Omega$ такого, що $y \overset{(\Lambda)}{<}$ x^* і для будь-якого μ-відкритого околу V точки x^* виконується умова $V \cap$ $\Omega \neq \neq \varnothing$. Відповідно множину точних верхніх граней для Ω позначатимемо як $\Lambda - \operatorname{Sup}(\Omega)$.

Означення 1. *Елемент $x^* \in Y$ будемо називати мажорантою (мінорантою) множини Ω в $\left(Y, \overset{(\Lambda)}{\leq}\right)$, якщо $x^* \in \operatorname{Min}(D \mid \Lambda)$ (відповідно $x^* \in$ $\in \operatorname{Max}(B \mid \Lambda)$), де множини D і B означені за правилами*

$$D = \left\{a \in Y \,\middle|\, y \overset{(\Lambda)}{\leq} a \ \ \forall y \in \Omega\right\}, \quad B = \left\{a \in Y \,\middle|\, a \overset{(\Lambda)}{\leq} y \ \ \forall y \in \Omega\right\}.$$

Надалі мажоранту та мінoранту для Ω будемо позначати як $\operatorname{Major}_{\Lambda}(\Omega)$ та $\operatorname{Minor}_{\Lambda}(\Omega)$ відповідно.

Означення 2. *Нехай K — довільний конус в Y. Тоді множину*

$$\operatorname{conv}_K \Omega = \operatorname{Minor}_{\Lambda}(\Omega) + K$$

будемо називати K-оболонкою для Ω.

Означення 3. *Множину $\Omega \subset Y$ будемо називати K-обмеженою в Y, де K — деякий конус, якщо для Ω існує її $(-K)$-оболонка.*

Нехай $\{a_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ — довільна напрямленість в Y, де A — напівупорядкована множина індексів, яка напрямлена за зростанням. Позначимо через $N_{\mu}(a)$ фільтр всіх μ-відкритих околів точки a в (Y, μ).

Означення 4. *Нижньою (верхньою) границею напрямленості $\{a_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ в $\left(Y, \overset{(\Lambda)}{\leq}\right)$ будемо називати множину, яка задається правилом*

$$\Lambda - \liminf_{\alpha \in A} a_{\alpha} = \Lambda - \operatorname{Inf}(M) \quad \left(\Lambda - \limsup_{\alpha \in A} a_{\alpha} = \Lambda - \operatorname{Sup}(M)\right),$$

де M *є сукупністю всіх точок* μ*-згущення для* $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *(тобто* $b\in M$, *якщо для будь-яких* $V\in N_\mu(b)$ *і* $\alpha\in A$ *існує індекс* $\beta\succ\alpha$ *такий, що* $a_\beta\in$ $\in V$*).*

Отже, напрямленість $\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$ буде μ-збіжною, якщо знайдеться елемент $a^*\in Y$ такий, що

$$\Lambda-\liminf_{\alpha\in A} a_\alpha = \{a^*\} = \Lambda-\limsup_{\alpha\in A} a_\alpha .$$

Скористаємося відомим позначенням для верхнього та нижнього перетинів бінарного відношення $\overset{(\Lambda)}{\leq}$ (див. [6]):

$$\left[\overset{(\Lambda)}{\leq}\right]^{+}(x) = \left\{y\in Y \,\middle|\, x\overset{(\Lambda)}{\leq}y\right\},\qquad \left[\overset{(\Lambda)}{\leq}\right]^{-}(x) = \left\{y\in Y \,\middle|\, y\overset{(\Lambda)}{\leq}x\right\}.$$

Нехай X_∂ — не порожня множина в X, а $F: X_\partial\to Y$ — деяке відображення.

Означення 5. *Точною нижньою гранню (інфімумом) відображення* $F: X_\partial\to$ $\to Y$ *будемо називати множину* $\Lambda-\operatorname*{Inf}_{x\in X_\partial} F(x)$, *яка означена за правилом:* $a\in\Lambda-\operatorname*{Inf}_{x\in X_\partial} F(x)$ *тоді і тільки тоді, коли:*

1) $a\notin\left[\overset{(\Lambda)}{\leq}\right]^{+}F(x)$ *при всіх* $x\in X_\partial$;

2) *для будь-якого* $b\in Y\left(a\overset{(\Lambda)}{<}b\right)$ *знайдеться елемент* $x^*\in X_\partial$ *такий, що* $F(x^*)\overset{(\Lambda)}{<}b$.

Аналогічним чином можна означити множину $\Lambda-\operatorname*{Sup}_{x\in X_\partial} F(x)$.

Нехай Infty — множина невласних елементів для Y. Виділимо із множини Infty дві не порожні підмножини Infty (+) та Infty (–), які будемо відповідно називати сукупністю Λ-найбільших та Λ-найменших елементів на множині $\overline{Y}=Y\bigcup$ Infty. Оскільки частковий порядок, який індукується в Y із $\overline{Y}$, повинен збігатися з порядком $\overset{(\Lambda)}{\leq}$ на Y, то будемо вважати, що Infty (+) $=\Lambda-$ $-\operatorname{Inf}(\varnothing)$ і Infty (–) $=\Lambda-\operatorname{Sup}(\varnothing)$. Наведемо правила для суми та добутку на скаляр в $\overline{Y}$. Нехай $\{+\infty\}$ та $\{-\infty\}$ — довільні представники із Infty (+) та Infty (–) відповідно. Тоді:

1) $(-\alpha)\cdot\{+\infty\}=\{+\infty\}\cdot(-\alpha)\in$ Infty (–), $\alpha>0$;

2) $(-\alpha)\cdot\{-\infty\}=\{-\infty\}\cdot(-\alpha)\in$ Infty (+), $\alpha>0$;

3) $x+\{-\infty\}=\{-\infty\}+x$ Infty (–) $\forall x\in Y\bigcup$ (Infty \ Infty (+));

4) $\{0\cdot\{+\infty\}, \{+\infty\}\cdot 0,\ x+\{+\infty\}, \{+\infty\}+x\}\in$ Infty (+) $\forall x\in Y$.

Зауважимо, що хоча ці правила і не є традиційними, але вони відповідають духу „одностороннього аналізу” [7, с. 23]. Легко бачити, що в $\overline{Y}$ виконуються закони комутативності і асоціативності суми, а також дистрибутивності добутку відносно суми.

Надалі будемо розглядати відображення, які набувають значень у множині $Y^\bullet \overset{\text{def}}{=} Y\bigcup$ Infty (+). Порядкові та алгебраїчні операції в „напіврозширеному просторі” $Y^\bullet$ будемо вважати індукованими із $\overline{Y}$.

Розглянемо на елементах довільного хаусдорфового простору (X,τ) таку сукупність відображень:

$$\left\{F^{\alpha}\colon X_{\alpha} \to Y^{\bullet}\right\}_{\alpha \in A}. \tag{2}$$

Позначимо через $\tau - LsX_{\alpha}$ та $\tau - LiX_{\alpha}$ відповідно нижню та верхню топологічні границі напрямленості підмножин $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$. Згідно з [8] $\tau - L\,sX_{\alpha}$ і $\tau - LiX_{\alpha}$ є τ-замкненими підмножинами топологічного простору (X, τ) і відповідно сукупностями границь та граничних точок для всіх напрямленостей $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$, які збудовані за правилом $x_{\alpha} \in X_{\alpha}$ $\forall\, \alpha \in A$. Далі, якщо не обумовлено інше, будемо вважати, що для сукупності $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ виконується умова $\tau - LiX_{\alpha} \neq \varnothing$. Зауважимо, що множини X_{α} можуть не збігатися як між собою, так і з усім простором X, а відображення $F^{\alpha}\colon X_{\alpha} \to Y^{\bullet}$ можуть бути неозначеними поза множинами X_{α} (що є типовим для задач керування та оптимізації). Проте, як буде показано нижче, для таких напрямленостей можна ввести поняття границі. А саме, позначимо через $\rho = \tau \times \mu$ топологію добутку на $X \times Y$ і пов'яжемо з напрямленістю (2) такі відображення.

Означення 6. *Нижньою V-границею напрямленості відображень $\{F^{\alpha}\colon X_{\alpha} \to Y^{\bullet}\}_{\alpha \in A}$ будемо називати відображення $F_V\colon \tau - LsX_{\alpha} \to Y^{\bullet}$ (позначимо $F_V = \Lambda(\rho) - li_V F^{\alpha}$) таке, що*

$$\left(\Lambda(\rho) - li_V F^{\alpha}\right)(x) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda - \overline{\underset{U \in \mathbb{N}_{\tau}(x)}{\mathrm{Sup}}} \left\{ \Lambda - \overline{\underset{\alpha \in A}{\mathrm{Sup}}} \left(\Lambda - \underline{\underset{\substack{\beta \succ \alpha \\ X_{\beta} \cap U \neq \varnothing}}{\mathrm{Inf}}} \left[\Lambda - \underline{\underset{y \in U \cap X_{\beta}}{\mathrm{Inf}}} F^{\beta}(y) \right] \right) \right\}$$

$$\forall\, x \in \tau - LsX_{\alpha}. \tag{3}$$

Означення 7. *Верхньою V-границею напрямленості відображень $\{F^{\alpha}\colon X_{\alpha} \to Y^{\bullet}\}_{\alpha \in A}$ будемо називати відображення $F^V\colon \tau - LiX_{\alpha} \to Y^{\bullet}$ (позначимо $F^V = \Lambda(\rho) - ls_V F^{\alpha}$) таке, що*

$$\left(\Lambda(\rho) - ls_V F^{\alpha}\right)(x) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \Lambda - \overline{\underset{U \in \mathbb{N}_{\tau}(x)}{\mathrm{Sup}}} \left\{ \Lambda - \underline{\underset{\alpha \in A}{\mathrm{Inf}}} \left(\Lambda - \overline{\underset{\beta \succ \alpha}{\mathrm{Sup}}} \left[\Lambda - \underline{\underset{y \in U \cap X_{\beta}}{\mathrm{Inf}}} F^{\beta}(y) \right] \right) \right\}$$

$$\forall\, x \in \tau - LiX_{\alpha}. \tag{4}$$

Зауважимо, що в формулах (3), (4) операції $\Lambda - \underline{\underset{y \in \Omega}{\mathrm{Inf}}}\, F(y)$ та $\Lambda - \overline{\underset{y \in \Omega}{\mathrm{Sup}}}\, F(y)$ визначаються за правилами

$$\Lambda - \underline{\underset{y \in \Omega}{\mathrm{Inf}}}\, F(y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Minor}_{\Lambda}\left(\Lambda - \underset{y \in \Omega}{\mathrm{Inf}}\, F(y)\right),$$

$$\Lambda - \overline{\underset{y \in \Omega}{\mathrm{Sup}}}\, F(y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Major}_{\Lambda}\left(\Lambda - \underset{y \in \Omega}{\mathrm{Sup}}\, F(y)\right).$$

Аналогічно можна означити оператори $\Lambda - \overline{\underset{y \in \Omega}{\mathrm{Inf}}}\, F(y)$ та $\Lambda - \underline{\underset{y \in \Omega}{\mathrm{Sup}}}\, F(y)$:

$$\Lambda - \overline{\operatorname*{Inf}_{y\in\Omega}} F(y) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Major}_\Lambda\left(\Lambda - \operatorname*{Inf}_{y\in\Omega} F(y)\right),$$

$$\Lambda - \underline{\operatorname*{Sup}_{y\in\Omega}} F(y) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Minor}_\Lambda\left(\Lambda - \operatorname*{Sup}_{y\in\Omega} F(y)\right).$$

Наступний результат є прямим наслідком наведених вище означень.

Лема 1. *Нехай для напрямленості множин* $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *виконується умова* $\tau - Li\, X_\alpha \neq \varnothing$. *Тоді*

$$\left(\Lambda(\rho) - li_V\, F^\alpha\right)(x) \overset{(\Lambda)}{\leq} \left(\Lambda(\rho) - ls_V\, F^\alpha\right)(x) \qquad \forall\, x \in \tau - Li\, X_\alpha.$$

Означення 8. *Відображення* $F : (\tau - Li\, X_\alpha) \to Y^\bullet$ *будемо називати V-границею напрямленості* $\{F^\alpha : X_\alpha \to Y^\bullet\}_{\alpha\in A}$, *якщо для всіх* $x \in \tau - Li\, X_\alpha$ *виконується співвідношення*

$$F(x) = \left(\Lambda(\rho) - li_V\, F^\alpha\right)(x) = \left(\Lambda(\rho) - ls_V\, F^\alpha\right)(x). \tag{5}$$

Якщо співвідношення (5) *буде виконуватись при всіх* $x \in \tau - Ls\, X_\alpha$, *то таку напрямленість будемо називати абсолютно V-збіжною.*

***Зауваження* 1.** В подальшому V-границю напрямленості (2) будемо позначати через $\Lambda(\rho) - lm_V\, F^\alpha$, а її абсолютну V-границю — через $\Lambda(\rho) - lm_V^a\, F^\alpha$. Зрозуміло, що напрямленість (2) буде абсолютно V-збіжною, якщо вона V-збігається і, крім того, виконується умова $\tau - Li\, X_\alpha = \tau - Ls\, X_\alpha$.

***Зауваження* 2.** Як легко бачити, напрямленості відображень $\{F^\alpha : X_\alpha \to \to Y^\bullet\}_{\alpha\in A}$ можна поставити у взаємно однозначну відповідність сукупність задач векторної оптимізації

$$\left\{\left\langle \Lambda - \inf_{x\in X_\alpha} F^\alpha(x)\right\rangle,\ \alpha\in A\right\}. \tag{6}$$

У зв'язку з цим можна стверджувати, що задачі (6) допускають V-усереднення, якщо для відображень $\{F^\alpha : X_\alpha \to Y^\bullet\}_{\alpha\in A}$ існує абсолютна V-границя $\Lambda(\rho) - lm_V^a\, F^\alpha : \tau - Lm\, X_\alpha \to Y^\bullet$. Отже, для V-усередненої задачі векторної оптимізації буде справедливим подання

$$\left\langle \Lambda - \inf_{x\in\tau - Lm\, X_\alpha} \left(\Lambda(\rho) - lm_V^a\, F^\alpha\right)(x)\right\rangle.$$

Наведемо приклад, який ілюструє нетривіальність процедури побудови V-граничних відображень.

***Приклад* 1.** Нехай $Y = R^2$, а конус Λ задається правилом

$$\Lambda = \left\{\lambda \in R^2 \,\middle|\, \left\{\begin{array}{c}\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0\\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0\end{array}\right\}\right\}.$$

Розглянемо сукупність відображень $\{F^n : X_n \to R^2\}_{n\in N}$, які означені за правилом

$$n = 2m, \quad \left[\begin{array}{l} F_1^n(x) = x;\\ F_2^n(x) = \sin nx + x;\\ X_n = [0; 2],\end{array}\right. \qquad n = 2m+1, \quad \left[\begin{array}{l} F_1^n(x) = x - 1;\\ F_2^n(x) = \cos nx + x + 1;\\ X_n = [0; 1].\end{array}\right.$$

Тоді, згідно з наведеним вище означенням, для V-границь вихідної послідовності відображень $\{F^n\colon X_n \to R^2\}_{n\in N}$ одержимо

$$F^V\colon [0;1]\to R^2, \qquad F^V(x) = \begin{bmatrix} x+1 \\ x \end{bmatrix},$$

$$F_V\colon [0;2]\to R^2, \qquad F_V(x) = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} x-2, & x\in[0;1] \\ x, & x\in(1;2] \end{Bmatrix} \\ x-1, \quad x\in[0;2] \end{bmatrix}.$$

***Зауваження* 3.** Покажемо, що основні поняття теорії S-збіжності (див., наприклад, [3]) випливають, як частинний випадок, із означеної вище V-збіжності. Для цього покладемо в (2) $Y=R$, $\Lambda = \{\lambda\in R \mid \lambda\ge 0\}$. Тоді

$$\operatorname{Minor}_\Lambda\left(\Lambda - \operatorname*{Inf}_{y\in\Omega} F(y)\right) \equiv \operatorname{Major}_\Lambda\left(\Lambda - \operatorname*{Inf}_{y\in\Omega} F(y)\right) \equiv \inf_{y\in\Omega} F(y),$$

$$\operatorname{Minor}_\Lambda\left(\Lambda - \operatorname*{Sup}_{y\in\Omega} F(y)\right) \equiv \operatorname{Major}_\Lambda\left(\Lambda - \operatorname*{Sup}_{y\in\Omega} F(y)\right) \equiv \sup_{y\in\Omega} F(y).$$

Отже, співвідношення (3), (4) наберуть вигляду

$$\left(\Lambda(\rho) - li_V F^\alpha\right)(x) \equiv \sup_{U\in\mathbb{N}_\tau(x)} \sup_{\alpha\in A} \inf_{\substack{\beta\succ\alpha \\ X_\beta\cap U\ne\varnothing}} \inf_{y\in U\cap X_\beta} F^\beta(y) \quad \forall x\in \tau - Ls\, X_\alpha,$$

$$\left(\Lambda(\rho) - ls_V F^\alpha\right)(x) \equiv \sup_{U\in\mathbb{N}_\tau(x)} \inf_{\alpha\in A} \sup_{\beta\succ\alpha} \inf_{y\in U\cap X_\beta} F^\beta(y) \quad \forall x\in \tau - Li\, X_\alpha.$$

Оскільки

$$\sup_{\alpha\in A} \inf_{\substack{\beta\succ\alpha \\ X_\beta\cap U\ne\varnothing}} D_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{\substack{\alpha\in A \\ X_\alpha\cap U\ne\varnothing}} D_\alpha \quad \text{і} \quad \inf_{\alpha\in A} \sup_{\beta\succ\alpha} D_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{\alpha\in A} D_\alpha,$$

то

$$\left(\Lambda(\rho) - li_V F^\alpha\right)(x) \equiv \sup_{U\in\mathbb{N}_\tau(x)} \liminf_{\substack{\alpha\in A \\ X_\alpha\cap U\ne\varnothing}} \inf_{y\in U\cap X_\alpha} F^\alpha(y) \quad \forall x\in \tau - Ls\, X_\alpha,$$

$$\left(\Lambda(\rho) - ls_V F^\alpha\right)(x) \equiv \sup_{U\in\mathbb{N}_\tau(x)} \limsup_{\alpha\in A} \inf_{y\in U\cap X_\alpha} F^\alpha(y) \quad \forall x\in \tau - Li\, X_\alpha.$$

Таким чином, якщо $Y=R$ і $\Lambda = \{\lambda\in R \mid \lambda\ge 0\}$, то

$$\left(\Lambda(\rho) - ls_V F^\alpha\right)(x) \equiv (\tau - ls_s F^\alpha)(x), \qquad \left(\Lambda(\rho) - ls_V F^\alpha\right)(x) \equiv (\tau - li_s F^\alpha)(x),$$

що й потрібно було показати (позначення для S-границь взято з робіт [3–5]).

Означення 9. *Будемо говорити, що відображення* $F\colon X_\partial \to Y^\bullet$ *є* $\Lambda(\rho)$*-напівнеперервним знизу* ($\Lambda(\rho)$*-нн. зн.) в точці* $x^0\in \operatorname{Int} X_\partial$, *якщо для будь-якого* $\lambda \overset{(\Lambda)}{<} F(x^0)$ *знайдеться окіл* $V\in N_\tau(x^0)$ *такий, що* $\lambda \overset{(\Lambda)}{\le} F(y)$ *для всіх* $y\in$ $\in V\cap X_\partial$, *або, що еквівалентно,*

$$F(y)\in \lambda+\Lambda \qquad \forall y\in V\cap X_\partial.$$

Отже, відображення $F\colon \Omega\to Y^\bullet$ буде $\Lambda(\rho)$-напівнеперервним знизу (нн. зн.) в точці $x\in \operatorname{Int}\Omega$ тоді і тільки тоді, коли

$$F(x) \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda - \overline{\operatorname{Sup}}_{U \in \mathbb{N}_\tau(x)} \left\{ \Lambda - \underline{\operatorname{Inf}}_{y \in U \cap \Omega} F(y) \right\}. \tag{7}$$

Проте $\Lambda - \underline{\operatorname{Inf}}_{y \in U \cap \Omega} F(y) \overset{(\Lambda)}{\leq} F(x)$ для будь-якого околу $U \in \mathbb{N}_\tau(x)$. Отже,

$$\Lambda - \overline{\operatorname{Sup}}_{U \in \mathbb{N}_\tau(x)} \left\{ \Lambda - \underline{\operatorname{Inf}}_{y \in U \cap \Omega} F(y) \right\} \overset{(\Lambda)}{\leq} F(x),$$

звідки на підставі (7) випливає, що відображення $F : \Omega \to Y^\bullet$ буде $\Lambda(\rho)$-нн. зн. в точці $x \in \operatorname{Int} \Omega$ тоді і тільки тоді, коли

$$F(x) = \Lambda - \overline{\operatorname{Sup}}_{U \in \mathbb{N}_\tau(x)} \left[\Lambda - \underline{\operatorname{Inf}}_{y \in U \cap \Omega} F(y) \right]. \tag{8}$$

Характерною ознакою V-границь є така властивість.

Твердження 1. *Відображення*

$$\Lambda(\rho) - li_V F^\alpha : \tau - Ls X_\alpha \to Y^\bullet \quad \text{та} \quad \Lambda(\rho) - ls_V F^\alpha : \tau - Li X_\alpha \to Y^\bullet$$

є $\Lambda(\rho)$-напівнеперервними знизу на множинах $\tau - Ls X_\alpha$ та $\tau - Li X_\alpha$ відповідно.

Доведення. Нехай x — довільний елемент множини $\tau - Li X_\alpha$, $\mathbb{N}_\tau(x)$ — сукупність всіх його τ-відкритих околів. Покладемо

$$q(U) = \Lambda - \overline{\operatorname{Lim\,sup}}_{\alpha \in A} \left\{ \Lambda - \underline{\operatorname{Inf}}_{y \in U \cap X_\alpha} F^\alpha(y) \right\} \quad \forall\, U \in \mathbb{N}_\tau(x).$$

Нехай $F(x) \overset{\text{def}}{=} \Lambda - \overline{\operatorname{Sup}}_{U \in \mathbb{N}_\tau(x)} q(U)$. Тоді для будь-якого $y \in U$ буде виконуватись співвідношення $q(U) \overset{(\Lambda)}{\leq} F(y)$. Отже,

$$q(U) \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda - \underline{\operatorname{Inf}}_{y \in U \cap (\tau - Li X_\alpha)} F(y). \tag{9}$$

Оскільки співвідношення (9) справедливе для довільно взятого околу U, то, переходячи в обох частинах наведеної нерівності до операції $\Lambda - \overline{\operatorname{Sup}}_{U \in \mathbb{N}_\tau(x)}$, одержуємо

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \Lambda - \overline{\operatorname{Sup}}_{U \in \mathbb{N}_\tau(x)} [q(U)] \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda - \overline{\operatorname{Sup}}_{U \in \mathbb{N}_\tau(x)} \left\{ \Lambda - \underline{\operatorname{Inf}}_{y \in U \cap (\tau - Li X_\alpha)} F(y) \right\}. \tag{10}$$

Проте зворотна нерівність до (10) є очевидною. Отже, відображення $F \equiv \Lambda(\rho) - ls_V F^\alpha : \tau - Li X_\alpha \to Y^\bullet$, згідно з формулою (8), буде $\Lambda(\rho)$-нн. зн. Доведення $\Lambda(\rho)$-нн. зн. для нижньої V-границі можна відтворити за аналогічною схемою. Твердження доведено.

Розглянемо питання про стійкість V-границь по відношенню до ρ-неперервних збурень. З цією метою введемо таке поняття.

Означення 10. *Будемо говорити, що відображення $G : Y^\bullet \to Y^\bullet$ належить класу $\mathcal{K}$, якщо G є μ-неперервним відображенням і для нього виконуються умови*

$$G(\Lambda - \underline{\operatorname{Inf}}\, M) = \Lambda - \underline{\operatorname{Inf}}\, G(M), \quad G\left(\Lambda - \overline{\operatorname{Sup}}\, M\right) = \Lambda - \overline{\operatorname{Sup}}\, G(M) \quad \forall\, M \subset Y. \tag{11}$$

Клас $\mathcal{K}$ є непорожнім. Дійсно, нехай a — довільний елемент із Y. Тоді легко бачити, що відображення $G(t) = \Lambda - \underline{\mathrm{Inf}}\,\{a, t\}\ \ \forall\ t \in Y$ задовольняє наведені вище вимоги, тобто $\Lambda - \underline{\mathrm{Inf}}\,\{a, \cdot\} \in \mathcal{K}$.

Таким чином, застосовуючи до співвідношень (3) та (4) правило (11), одержуємо таке твердження.

Твердження 2. *Нехай $G : Y^{\bullet} \to Y^{\bullet}$ — довільний представник із класу $\mathcal{K}$. Тоді*

$$G \circ \left(\Lambda(\rho) - li_V\, F^{\alpha}\right) = \Lambda(\rho) - li_V\,(G \circ F^{\alpha}), \tag{12}$$

$$G \circ \left(\Lambda(\rho) - ls_V\, F^{\alpha}\right) = \Lambda(\rho) - ls_V\,(G \circ F^{\alpha}). \tag{13}$$

Нехай в (X, τ) задано сукупність підмножин $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, для якої $\tau - Li\, X_\alpha \neq \neq \varnothing$, і напрямленості відображень $\{F^{\alpha}: X_\alpha \to Y^{\bullet}\}_{\alpha \in A}$ та $\{Q^{\alpha}: X_\alpha \to \to Y^{\bullet}\}_{\alpha \in A}$. Припустимо, що пари

$$\begin{gathered}(F^{\alpha}, Q^{\alpha}) \quad \text{на} \quad X_\alpha,\\ \left(\Lambda(\rho) - li_V\, F^{\alpha}, \Lambda(\rho) - li_V\, Q^{\alpha}\right) \quad \text{на} \quad \tau - Ls\, X_\alpha,\\ \left(\Lambda(\rho) - ls_V\, F^{\alpha}, \Lambda(\rho) - ls_V\, Q^{\alpha}\right) \quad \text{на} \quad \tau - Li\, X_\alpha\end{gathered}$$

не набувають Λ-„полярних" значень (ζ, θ), (θ, ζ), де $\zeta \in \mathrm{Infty}\,(-)$, $\theta \in \in \mathrm{Infty}\,(+)$.

Нехай $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — довільна напрямленість в (Y, μ). Введемо позначення

$$\begin{aligned}\Lambda - \underline{\operatorname*{Lim\,inf}_{\alpha \in A}}\, a_\alpha &= \Lambda - \overline{\operatorname*{Sup}_{\alpha \in A}} \left\{\Lambda - \underline{\operatorname*{Inf}_{\beta \succ \alpha}}\, a_\beta\right\},\\ \Lambda - \overline{\operatorname*{Lim\,sup}_{\alpha \in A}}\, a_\alpha &= \Lambda - \underline{\operatorname*{Inf}_{\alpha \in A}} \left\{\Lambda - \overline{\operatorname*{Sup}_{\beta \succ \alpha}}\, a_\beta\right\}.\end{aligned} \tag{14}$$

Згідно з означеннями операцій $\Lambda - \overline{\mathrm{Sup}}$ та $\Lambda - \underline{\mathrm{Inf}}$, буде виконуватись очевидне співвідношення

$$\Lambda - \underline{\operatorname*{Lim\,inf}_{\alpha \in A}}\, a_\alpha \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda - \overline{\operatorname*{Lim\,sup}_{\alpha \in A}}\, a_\alpha.$$

Крім того, беручи до уваги означення 4, ці операції можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}\Lambda - \underline{\operatorname*{Lim\,inf}_{\alpha \in A}}\, a_\alpha &= \mathrm{Minor}_\Lambda \left(\Lambda - \liminf_{\alpha \in A} a_\alpha\right),\\ \Lambda - \overline{\operatorname*{Lim\,sup}_{\alpha \in A}}\, a_\alpha &= \mathrm{Major}_\Lambda \left(\Lambda - \limsup_{\alpha \in A} a_\alpha\right).\end{aligned} \tag{15}$$

Твердження 3. *Нехай для відображень $\{F^{\alpha}: X_\alpha \to Y^{\bullet}\}_{\alpha \in A}$ та $\{Q^{\alpha}: X_\alpha \to Y^{\bullet}\}_{\alpha \in A}$ виконується наведене вище припущення. Тоді*

$$\left[\Lambda(\rho) - li_V\, F^{\alpha}\right] + \left[\Lambda(\rho) - li_V\, Q^{\alpha}\right] \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda(\rho) - li_V\,(F^{\alpha} + Q^{\alpha}), \tag{16}$$

$$\left[\Lambda(\rho) - ls_V\, F^{\alpha}\right] + \left[\Lambda(\rho) - li_V\, Q^{\alpha}\right] \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda(\rho) - ls_V\,(F^{\alpha} + Q^{\alpha}). \tag{17}$$

Доведення. Встановимо виконання нерівності (17) (нерівність (16) встановлюється аналогічно). Перш за все припустимо, що існує елемент $a \in Y$ такий, що $F^{\alpha} \overset{(\Lambda)}{\leq} a$ і $Q^{\alpha} \overset{(\Lambda)}{\leq} a$ при всіх $\alpha \in A$, тобто наведені відображення є рівномірно Λ-обмеженими зверху. Нехай x — довільний елемент із множини $\tau - Li X_\alpha$, $U \in \mathbb{N}_\tau(x)$ — його довільний окіл. Тоді за означенням операції $\Lambda - \underline{\mathrm{Inf}}$ можемо записати

$$\left[\Lambda - \underset{y \in U \cap X_\alpha}{\underline{\mathrm{Inf}}} F^\alpha(y)\right] + \left[\Lambda - \underset{y \in U \cap X_\alpha}{\underline{\mathrm{Inf}}} Q^\alpha(y)\right] \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda - \underset{y \in U \cap X_\alpha}{\underline{\mathrm{Inf}}} \left(F^\alpha(y) + Q^\alpha(y)\right).$$

Звідси знаходимо

$$\Lambda - \overline{\underset{\alpha \in A}{\mathrm{Lim\,sup}}} \left\{\Lambda - \underset{y \in \overline{U} \cap X_\alpha}{\underline{\mathrm{Inf}}} F^\alpha(y)\right\} + \Lambda - \underline{\underset{\alpha \in A}{\mathrm{Lim\,inf}}} \left\{\Lambda - \underset{y \in \overline{U} \cap X_\alpha}{\underline{\mathrm{Inf}}} Q^\alpha(y)\right\} \overset{(\Lambda)}{\leq}$$

$$\overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda - \overline{\underset{\alpha \in A}{\mathrm{Lim\,sup}}} \left\{\Lambda - \underset{y \in \overline{U} \cap X_\alpha}{\underline{\mathrm{Inf}}} \left(F^\alpha(y) + Q^\alpha(y)\right)\right\}. \tag{18}$$

Якщо в обраній точці $x \in \tau - Li X_\alpha$ виконується умова

$$\left[\Lambda(\rho) - ls_V F^\alpha\right](x) + \left[\Lambda(\rho) - li_V Q^\alpha\right](x) \in \mathrm{Infty}\,(-), \tag{19}$$

то, згідно з (18), одержимо $\zeta \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda(\rho) - ls_V (F^\alpha + Q^\alpha)(x)$ для будь-якого $\zeta \in \mathrm{Infty}\,(-)$, тобто нерівність (17) виконується. Нехай умова (19) не виконується. Тоді для будь-якого елемента $\varepsilon \in \Lambda$ можна вказати околи $W_1 \in \mathbb{N}_\tau(x)$ та $W_2 \in \mathbb{N}_\tau(x)$ такі, що

$$\begin{gathered}
\left[\Lambda(\rho) - ls_V F^\alpha\right](x) \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda - \overline{\underset{\alpha \in A}{\mathrm{Lim\,sup}}} \left\{\Lambda - \underset{y \in \overline{W_1} \cap X_\alpha}{\underline{\mathrm{Inf}}} F^\alpha(y)\right\} + \varepsilon, \\
\left[\Lambda(\rho) - li_V Q^\alpha\right](x) \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda - \underline{\underset{\alpha \in A}{\mathrm{Lim\,inf}}} \left\{\Lambda - \underset{y \in \overline{W_2} \cap X_\alpha}{\underline{\mathrm{Inf}}} Q^\alpha(y)\right\} + \varepsilon.
\end{gathered} \tag{20}$$

Покладемо $U = W_1 \cap W_2$. Тоді $U \neq \varnothing$, $U \in \mathbb{N}_\tau(x)$ і з (18) та (20) знаходимо

$$\left[\Lambda(\rho) - ls_V F^\alpha\right](x) + \left[\Lambda(\rho) - li_V Q^\alpha\right](x) - 2\varepsilon \overset{(\Lambda)}{\leq}$$

$$\overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda - \overline{\underset{\alpha \in A}{\mathrm{Lim\,sup}}} \left\{\Lambda - \underset{y \in \overline{U} \cap X_\alpha}{\underline{\mathrm{Inf}}} \left(F^\alpha(y) + Q^\alpha(y)\right)\right\} \overset{(\Lambda)}{\leq}$$

$$\overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda(\rho) - ls_V (F^\alpha + Q^\alpha)(x).$$

Оскільки параметр $\varepsilon \in \Lambda$ є довільним, то із останньої нерівності одержуємо

$$\begin{gathered}
\left[\Lambda(\rho) - ls_V F^\alpha\right](x) + \left[\Lambda(\rho) - li_V Q^\alpha\right](x) \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda(\rho) - ls_V (F^\alpha + Q^\alpha)(x) \\
\forall\, x \in \tau - Li X_\alpha.
\end{gathered} \tag{21}$$

Таким чином, для рівномірно Λ-обмежених зверху відображень F^α та Q^α співвідношення (17) виконується.

Тепер відмовимося від припущення про рівномірну обмеженість вихідних відображень. В зв'язку з цим для кожного $a \in Y$ і $t \in Y$ покладемо $G_a(t) = \Lambda - \underline{\mathrm{Inf}}\{a, t\}$. Тоді при всіх значеннях $\alpha \in A$ будуть виконуватись співвідношення $G_a \circ F^\alpha \overset{(\Lambda)}{\leq} a$, $G_a \circ Q^\alpha \overset{(\Lambda)}{\leq} a$. Отже,

$$\left[\Lambda(\rho) - ls_V (G_a \circ F^\alpha)\right](x) + \left[\Lambda(\rho) - li_V (G_a \circ Q^\alpha)\right](x) \overset{(\Lambda)}{\leq}$$

$$\overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda(\rho) - ls_V \left(G_a \circ F^\alpha + G_a \circ Q^\alpha\right)(x).$$

Проте відображення $G_a \colon Y \to Y$ належить класу $\mathcal{K}$. Тому, згідно з (12), (13), останню нерівність можна переписати у вигляді

$$G_a \circ \left[\Lambda(\rho) - ls_V F^{\alpha}\right](x) + G_a \circ \left[\Lambda(\rho) - li_V Q^{\alpha}\right](x) \overset{(\Lambda)}{\leq}$$

$$\overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda(\rho) - ls_V\left(G_a \circ F^{\alpha} + G_a \circ Q^{\alpha}\right)(x) \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda(\rho) - ls_V\left(F^{\alpha} + Q^{\alpha}\right)(x). \tag{22}$$

Тепер, перейшовши в (22) до границі при $a \to \text{Infty}\,(+)$, одержимо бажаний результат.

Твердження 4. *Нехай напрямленість $\{G^{\alpha} \colon X \to Y^{\bullet}\}_{\alpha \in A}$ неперервно ρ-збігається до G, тобто для будь-якого $x \in X$ і будь-якого околу $U \in \mathbb{N}_{\mu}(G(x))$ знайдуться $\alpha' \in A$ та $W \in \mathbb{N}_{\tau}(x)$ такі, що $G^{\alpha}(y) \in U$ $\forall\, \alpha \succ \alpha'$, $\forall\, y \in W$. Тоді якщо відображення G^{α} і G майже скрізь Λ-обмежені на X_{α} та $\tau - Ls\, X_{\alpha}$ відповідно, то*

$$\Lambda(\rho) - li_V\left[F^{\alpha} + G^{\alpha}\right] = G + \left[\Lambda(\rho) - li_V F^{\alpha}\right], \tag{23}$$

$$\Lambda(\rho) - ls_V\left[F^{\alpha} + G^{\alpha}\right] = G + \left[\Lambda(\rho) - ls_V F^{\alpha}\right]. \tag{24}$$

До того ж якщо для напрямленості $\{F^{\alpha} \colon X \to Y^{\bullet}\}_{\alpha \in A}$ існує її абсолютна V-границя F, то „збурена" напрямленість відображень $\{F^{\alpha} + G^{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ буде абсолютно V-збігатися до $G + F$.

Доведення. Оскільки напрямленість $\{G^{\alpha} \colon X \to Y^{\bullet}\}_{\alpha \in A}$ є неперервно ρ-збіжною, то виконуються очевидні співвідношення

$$\Lambda - \overline{\operatorname*{Sup}_{U \in \mathbb{N}_{\sigma}(x)}} \left[\Lambda - \underline{\operatorname*{Lim\,inf}_{\substack{\alpha \in A \\ X_{\alpha} \cap U \neq \varnothing}}} \left\{\Lambda - \underline{\operatorname*{Inf}_{y \in \overline{U} \cap X_{\alpha}}} (\pm G^{\alpha})(y)\right\}\right] =$$

$$= \Lambda - \overline{\operatorname*{Sup}_{U \in \mathbb{N}_{\sigma}(x)}} \left[\Lambda - \overline{\operatorname*{Lim\,sup}_{\alpha \in A}} \left\{\Lambda - \underline{\operatorname*{Inf}_{y \in \overline{U} \cap X_{\alpha}}} (\pm G^{\alpha})(y)\right\}\right] = \pm G(x) \quad \forall\, x \in X.$$

Отже, згідно з означеннями V-границь, одержуємо

$$\Lambda(\rho) - li_V\, G^{\alpha} = \Lambda(\rho) - ls_V\, G^{\alpha} = G. \tag{25}$$

$$\Lambda(\rho) - li_V(-G^{\alpha}) = \Lambda(\rho) - ls_V(-G^{\alpha}) = -G. \tag{26}$$

Тепер, беручи за основу співвідношення (25) і використовуючи твердження 3, записуємо $\left[\Lambda(\rho) - ls_V F^{\alpha}\right] + G \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda(\rho) - ls_V(F^{\alpha} + G^{\alpha})$ на $\tau - Li\, X_{\alpha}$. З іншого боку, враховуючи (26), одержуємо

$$\left[\Lambda(\rho) - ls_V(F^{\alpha} + G^{\alpha})\right] - G \overset{(\Lambda)}{\leq} \left[\Lambda(\rho) - ls_V(F^{\alpha} + G^{\alpha} - G^{\alpha})\right] = \Lambda(\rho) - ls_V\, F^{\alpha}.$$

Звідси знаходимо

$$\Lambda(\rho) - ls_V(F^{\alpha} + G^{\alpha}) = \left[\Lambda(\rho) - ls_V\, F^{\alpha}\right] + G \quad \text{на} \quad \tau - Li\, X_{\alpha}. \tag{27}$$

Тим самим співвідношення (24) встановлено. Аналогічно перевіряється співвідношення (23).

Наслідок. *Нехай $G \colon X \to Y^{\bullet}$ — ρ-неперервне відображення. Тоді*

$$\Lambda(\rho) - li_V[F^{\alpha} + G] = G + \left[\Lambda(\rho) - li_V\, F^{\alpha}\right],$$

$$\Lambda(\rho) - ls_V[F^{\alpha} + G] = G + \left[\Lambda(\rho) - ls_V\, F^{\alpha}\right].$$

Наступні результати пов'язані з дослідженням секвенційних властивостей V-границь. Як буде показано нижче, їх можна розглядати як практичну основу для побудови V-границь.

Нехай топологічний (X, τ) та векторний топологічний (Y, μ) простори задовольняють першу аксіому зліченності [9, с. 110]. Наведемо ряд попередніх результатів та понять.

Означення 11. *Напрямленість точок* $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$ *в топологічному просторі* (X, τ), *де* B — *частково впорядкована за зростанням множина індексів, будемо називати еквіузгодженою з напрямленістю підмножин* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *якщо існує відображення* $G : B \to A$ *таке, що:*

1) $x_\beta \in X_{G(\beta)}$ *для кожного* $\beta \in B$;

2) *для кожного* $\alpha' \in A$ *існує* $\beta' \in B$ *таке, що із* $\beta \succeq \beta'$ *випливає* $G(\beta) \succeq \succeq \alpha'$.

Твердження 5 [10, с. 88]. *Нехай* (X, τ) — *топологічний простір, який задовольняє першу аксіому зліченності. Тоді для верхньої* X'' *та нижньої* X' *топологічних границь послідовності підмножин* $\{X_n\}_{n \in N}$ *буде справедливе наступне:*

1) *включення* $x \in X'$ *рівносильне існуванню номера* $k \in N$ *і послідовності* $\{x_n\}_{n \in N}$ *такої, що* $x_n \xrightarrow{\tau} x$ *і при цьому* $x_n \in X_n$ *для всіх* $n \geq k$;

2) *включення* $x \in X''$ *рівносильне існуванню підпослідовності множин* $\{X_{n_k}\}_{k \in N}$ *і послідовності елементів* $\{x_k\}_{k \in N}$ *таких, що* $x_k \xrightarrow{\tau} x$ *і* $x_k \in \in X_{n_k}$ $\forall k \in N$.

Лема 2. *Нехай топологічний* (X, τ) *та векторний топологічний* (Y, μ) *простори задовольняють першу аксіому зліченності,* $F_V = \Lambda(\rho) - li_V F^\alpha$ — *нижня* V*-границя напрямленості відображень* $\{F^\alpha : X_\alpha \to Y^\bullet\}_{\alpha \in A}$. *Тоді для кожного елемента* $x \in \tau - Ls\, X_\alpha$ *і довільної напрямленості* $\{y_\beta\}_{\beta \in B}$, *яка* τ*-збігається до* x *і еквіузгоджена з сукупністю підмножин* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, *виконується співвідношення*

$$F_V(x) \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda - \underset{\beta \in B}{\underline{\operatorname{Lim\,inf}}}\, F^{G(\beta)}(y_\beta). \tag{28}$$

Доведення. Нехай x — довільний елемент множини $\tau - Ls\, X_\alpha$, $U \in \mathbb{N}_\tau(x)$ — його довільний окіл. Розглянемо довільну еквіузгоджену з $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ напрямленість $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$, яка τ-збігається до x. Оскільки $x_\beta \xrightarrow{\tau} x$, то існує індекс $\beta' \in B$ такий, що $x_\beta \in U$ $\forall \beta \succeq \beta'$. Отже, згідно з означенням верхньої топологічної границі, при всіх $\beta \succeq \beta'$ будуть виконуватись включення $x_\beta \in \in sU \cap X_{G(\beta)}$. Тоді буде очевидним співвідношення

$$\Lambda - \underset{y \in X_{G(\beta)} \cap U}{\underline{\operatorname{Inf}}}\; F^{G(\beta)}(y) \overset{(\Lambda)}{\leq} F^{G(\beta)}(x_\beta) \qquad \forall \beta \succeq \beta'.$$

Перейдемо в обох частинах даної нерівності до нижньої Λ-границі за напрямленою множиною індексів B. В результаті одержимо

$$\Lambda - \underset{\substack{\alpha \in A \\ X_\alpha \cap U \neq \varnothing}}{\underline{\operatorname{Lim\,inf}}} \left\{ \Lambda - \underset{y \in \overline{U \cap X_\alpha}}{\underline{\operatorname{Inf}}}\; F^\alpha(y) \right\} \overset{(\Lambda)}{\leq}$$

$$\overset{(\Lambda)}{\le} \Lambda - \underline{\operatorname*{Lim\,inf}_{\beta \in B}} \left\{ \Lambda - \operatorname*{Inf}_{y \in U \cap X_{G(\beta)}} F^{G(\beta)}(y) \right\} \overset{(\Lambda)}{\le} \Lambda - \underline{\operatorname*{Lim\,inf}_{\beta \in B}} F^{G(\beta)}(x_\beta).$$

Оскільки наведене співвідношення справедливе для будь-якого околу $U \in$ $\in \mathbb{N}_\tau(x)$, то

$$\Lambda - \overline{\operatorname*{Sup}_{U \in \mathbb{N}_\tau(x)}} \left[\Lambda - \underline{\operatorname*{Lim\,inf}_{\substack{\alpha \in A \\ X_\alpha \cap U \neq \varnothing}}} \left\{ \Lambda - \operatorname*{Inf}_{y \in \overline{U} \cap X_\alpha} F^\alpha(y) \right\} \right] \overset{(\Lambda)}{\le} \Lambda - \underline{\operatorname*{Lim\,inf}_{\beta \in B}} F^{G(\beta)}(x_\beta).$$

Таким чином, співвідношення (28) встановлено.

Позначимо через $\overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq}$ бінарне відношення: $x \overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq} y \Leftrightarrow y \notin \left[\overset{(\Lambda)}{<}\right]^-(x)$. Зауважимо, що $\overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq}$ є рефлексивним і антисиметричним бінарним відношенням на Y. Проте для $\overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq}$ властивість транзитивності не виконується (тобто $\overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq}$ не є відношенням порядку на Y). Разом з тим виконуються співвідношення

$$\left(\overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq}\right) \cdot \left(\overset{(\Lambda)}{\le}\right) = \left(\overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq}\right), \quad \left(\overset{(\Lambda)}{\le}\right) \cdot \left(\overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq}\right) = \left(\overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq}\right).$$

Лема 3. *Нехай топологічний* (X, τ) *та векторний топологічний* (Y, μ) *простори задовольняють першу аксіому зліченності,* $F^V = \Lambda(\rho) - ls_V F^\alpha$ — *верхня V-границя напрямленості відображень* $\{F^\alpha : X_\alpha \to Y^\bullet\}_{\alpha \in A}$. *Тоді для* $F^V : \tau - - Li X_\alpha \to Y^\bullet$ *справедливі наступні твердження:*

i) *для кожного елемента* $x \in \tau - Li X_\alpha$ *і довільної напрямленості* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, *яка* τ*-збігається до* x *і задовольняє умову* $x_\alpha \in X_\alpha \ \forall \alpha \in A$, *виконується співвідношення*

$$F^V(x) \overset{(\Lambda)}{\le} \Lambda - \overline{\operatorname*{Lim\,sup}_{\alpha \in A}} F^\alpha(x_\alpha); \tag{29}$$

ii) *для кожного елемента* $x \in \tau - Li X_\alpha$ *існує* τ*-збіжна до* x *напрямленість* $\{\bar{x}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *така, що починаючи з деякого* $\alpha_0 \in A$ *виконуються включення* $\bar{x}_\alpha \in X_\alpha \ \forall \alpha \succeq \alpha_0$ *і при цьому*

$$\Lambda - \overline{\operatorname*{Lim\,sup}_{\alpha \in A}} F^\alpha(\bar{x}_\alpha) \overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq} F^V(x). \tag{30}$$

Доведення. Встановимо співвідношення (29). Нехай x — довільний елемент із множини $\tau - Li X_\alpha$, $U \in \mathbb{N}_\tau(x)$ — його довільний окіл. Розглянемо напрямленість точок $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ таку, що $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ і $x_\alpha \in X_\alpha \ \forall \alpha \in A$. Оскільки має місце збіжність $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$, то можна вказати індекс $\alpha_1 \in A$ такий, що $x_\alpha \in U$ $\alpha \succeq \alpha_1$. Таким чином, при всіх $\alpha \succeq \alpha_1$ виконуються включення $x_\alpha \in$ $\in U \cap X_\alpha$. Отже, є очевидним співвідношення

$$\Lambda - \operatorname*{Inf}_{y \in \overline{X_\alpha} \cap U} F^\alpha(y) \overset{(\Lambda)}{\le} F^\alpha(x_\alpha) \quad \forall \alpha \succeq \alpha_1.$$

Перейдемо в обох частинах даної нерівності до верхньої Λ-границі за напрямленою множиною індексів A. Одержимо

$$\Lambda - \overline{\operatorname{Lim\,sup}}_{\alpha \in A} \left\{ \Lambda - \operatorname*{Inf}_{y \in \overline{U \cap X_\alpha}} F^{\alpha}(y) \right\} \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda - \overline{\operatorname{Lim\,sup}}_{\alpha \in A} F^{\alpha}(x_\alpha).$$

Оскільки наведене співвідношення справедливе для будь-якого околу $U \in \in \mathbb{N}_\tau(x)$, то

$$\Lambda - \overline{\operatorname*{Sup}}_{U \in \mathbb{N}_\tau(x)} \left[\Lambda - \overline{\operatorname{Lim\,sup}}_{\alpha \in A} \left\{ \Lambda - \operatorname*{Inf}_{y \in \overline{U \cap X_\alpha}} F^{\alpha}(y) \right\} \right] \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda - \overline{\operatorname{Lim\,sup}}_{\alpha \in A} F^{\alpha}(x_\alpha).$$

Таким чином, нерівність (29) встановлено.

Доведемо нерівність (30). Нехай x — довільний елемент множини $\tau - Li\, X_\alpha$, для якого виконується умова $F^V(x) \notin \operatorname{Infty}(+)$. Розглянемо послідовність $\{U_n\}_{n \in N}$ вкладених околів точки x. Нехай $\{y_n\}_{n \in N}$ — відповідна їй послідовність елементів простору (Y, μ), для якої виконуються умови $y_n \overset{(\Lambda)}{\leq} y_{n-1}$ $\forall n \in N$, $y_n \xrightarrow{\tau} F^V(x)$, $F^V(x) \overset{(\Lambda)}{<} y_n$ $\forall n \in N$. Тоді, згідно з означенням верхньої *V*-границі, можемо записати

$$\Lambda - \overline{\operatorname{Lim\,sup}}_{\alpha \in A} \left\{ \Lambda - \operatorname*{Inf}_{y \in \overline{U \cap X_\alpha}} F^{\alpha}(y) \right\} \overset{(\Lambda)}{\leq} F^V(x) \overset{(\Lambda)}{<} y_n \quad \forall n \in N.$$

Проте із наведеного співвідношення випливає факт існування строго зростаючої функції $G: N \to A$ такої, що

$$\Lambda - \operatorname*{Inf}_{y \in \overline{U_n \cap X_\alpha}} F^{\alpha}(y) \overset{(\Lambda)}{<} y_n \quad \forall \alpha \succeq G(n).$$

Отже, для кожного значення $\alpha \succeq G(n)$ можна вказати елемент $x_n^\alpha \in \in U_n \cap X_\alpha$, при якому $F^\alpha(x_n^\alpha) \overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq} y_n$. Тепер означимо напрямленість $\{\overline{x}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ за правилом: $\overline{x}_\alpha = x$, якщо $G(1) \succeq \alpha$, і $\overline{x}_\alpha = x_n^\alpha$, якщо $G(n) \preceq \preceq \alpha \prec G(n+1)$. Оскільки $\overline{x}_\alpha \in U_n$ $\forall \alpha \succeq G(n)$, то така напрямленість буде τ-збігатись до x. Проте $F^\alpha(\overline{x}_\alpha) \overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq} y_n$ $\forall \alpha \succeq G(n)$. Тоді, переходячи в даному співвідношенні до границі, одержуємо

$$\Lambda - \overline{\operatorname{Lim\,sup}}_{\alpha \in A} F^{\alpha}(\overline{x}_\alpha) \overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq} \Lambda - \overline{\operatorname{Lim\,sup}}_{n \in N} y_n = \lim_{n \in N} y_n = F^V(x),$$

що й потрібно було встановити.

Очевидним наслідком наведених лем є наступний результат, який можна розглядати як альтернативне означення *V*-границі.

Теорема 1. *Нехай топологічний* (X, τ) *та векторний топологічний* (Y, μ) *простори задовольняють першу аксіому зліченності,* $\{F^\alpha: X_\alpha \to Y^\bullet\}_{\alpha \in A}$ — *довільна напрямленість відображень, для якої виконується умова* $\tau - Li\, X_\alpha \neq \varnothing$. *Тоді відображення* $F: \tau - Li\, X_\alpha \to Y^\bullet$ *буде V-границею для напрямленості* $\{F^\alpha: X_\alpha \to Y^\bullet\}_{\alpha \in A}$ *в тому і тільки в тому випадку, якщо:*

i) *для кожного елемента* $x \in \tau - Li\, X_\alpha$ *і довільної напрямленості* $\{y_\beta\}_{\beta \in B}$, *яка* τ*-збігається до* x *і еквіузгоджена з сукупністю підмножин* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, *виконується співвідношення*

$$F(x) \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda - \underline{\operatorname{Lim\,inf}}_{\beta \in B} F^{G(\beta)}(y_\beta); \tag{31}$$

ii) *для кожного елемента* $x \in \tau - LiX_\alpha$ *існує* τ*-збіжна до* x *напрямленість* $\{\bar{x}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *така, що починаючи з деякого* $\alpha_0 \in A$ *виконуються включення* $\bar{x}_\alpha \in X_\alpha \ \forall \alpha \succeq \alpha_0$ *і при цьому*

$$\Lambda - \overline{\operatorname*{Lim\,sup}_{\alpha \in A}} F^\alpha(\bar{x}_\alpha) \overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq} F(x). \tag{32}$$

Приклад 2. Нехай U — дійсний рефлексивний сепарабельний банаховий простір, U^* — спряжений до нього простір. Значення функціонала $f \in U^*$ на елементі $v \in U$ позначимо через $\langle f, v\rangle_U$.

Розглянемо послідовність операторів $\{A_\varepsilon\colon U \to U^*\}_{\varepsilon \to 0}$, які задовольняють умови рівномірної коерцитивності та обмеженості [2]:

$$\langle A_\varepsilon u, u\rangle_U \ \geq \ \nu_1 \|u\|_U^2, \quad \nu_1 > 0, \quad \|A_\varepsilon u\|_{U^*} \ \leq \ \nu_2 \|u\|_U.$$

Нехай Ξ — замкнена обмежена і опукла множина в U^*, яка не містить нульового елемента $\theta \in U^*$, Ω — замкнена обмежена множина в U. Побудуємо в U^* конус Λ за правилом [11]: $\Lambda \overset{\text{def}}{=} \left\{\mu \in U^* \,\middle|\, \mu = t \cdot z \ \ \forall t \geq 0, \ \forall z \in \Xi\right\}$. Покажемо, що для напрямленості $\{A_\varepsilon\colon \Omega \to U^*\}_{\varepsilon \to 0}$ абсолютна V-границя $\Lambda(\rho) - lm_V^a A_\varepsilon : \Omega \to U^*$ існує і для неї справедливе зображення $\Lambda(\rho) - lm_V^a A_\varepsilon \equiv \equiv A_0$, де A_0 є G-границею вихідної послідовності операторів. Тут через ρ позначено добуток слабких топологій на U та U^* відповідно.

Згідно з вихідними припущеннями множини Ω та $B = \bigcup_{\varepsilon > 0} \{A_\varepsilon u \ \ \forall u \in \in \Omega\}$ є обмеженими. Отже, слабкі топології на Ω та B будуть задовольняти першу аксіому зліченності, оскільки в сепарабельних банахових просторах їх можна метризувати на слабко компактних множинах. Тому для побудови V-границі скористаємось теоремою 1. Нехай u — довільний елемент із Ω. Покажемо, що існує слабко збіжна до u послідовність $\{\bar{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon \to 0}$ така, що починаючи з деякого $\varepsilon_0 > 0$ будуть виконуватися включення $\bar{u}_\varepsilon \in \Omega$ і при цьому

$$\Lambda - \overline{\operatorname*{Lim\,sup}_{\varepsilon \to 0}} A_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) \overset{(\Lambda)}{\sqsubseteq} A_0(x). \tag{33}$$

Дійсно, за лемою Лакса – Мільграма для кожного з операторів $A_\varepsilon\colon U \to U^*$ існує обернений $A_\varepsilon^{-1} : U \to U^*$. Тому послідовність $\{\bar{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon \to 0}$ збудуємо за правилом $\bar{u}_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} A_\varepsilon^{-1} A_0 u$. Оскільки $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A_0$, то наведена послідовність слабко збігається до u,

$$\bar{u}_\varepsilon \ = \ A_\varepsilon^{-1} A_0 u \ \rightharpoonup \ A_0^{-1} A_0 u \ = \ u.$$

Тоді

$$\Lambda - \overline{\operatorname*{Lim\,sup}_{\varepsilon \to 0}} A_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) \ = \ \Lambda - \overline{\operatorname*{Lim\,sup}_{\varepsilon \to 0}} A_\varepsilon(A_\varepsilon^{-1} A_0 u) \ = \ \Lambda - \overline{\operatorname*{Lim\,sup}_{\varepsilon \to 0}} A_0 u \ = \ A_0 u.$$

Таким чином, співвідношення (33) встановлено.

Тепер покажемо, що для будь-якої послідовності $\{u_\varepsilon \in \Omega\}_{\varepsilon \to 0}$, яка слабко збігається до u, виконується аналог нерівності (31), тобто

$$A_0 u \overset{(\Lambda)}{\leq} \Lambda - \underline{\operatorname*{Lim\,inf}_{\varepsilon \to 0}} A_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Оскільки $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ і $\bar{u}_\varepsilon \rightharpoonup u$, то $v_\varepsilon \rightharpoonup 0$, де

$$v_\varepsilon = u_\varepsilon - \overline{u}_\varepsilon \equiv A_\varepsilon^{-1}\left[A_\varepsilon u_\varepsilon - A_0 u\right].$$

Проте для операторів A_ε^{-1} справедлива оцінка [2, с. 165] $\left\|A_\varepsilon^{-1} f\right\|_U \geq \nu_2^{-1}\|f\|_U$. Отже, з умови

$$A_\varepsilon^{-1}\left[A_\varepsilon u_\varepsilon - A_0 u\right] \rightharpoonup 0$$

одержуємо $A_\varepsilon u_\varepsilon - A_0 u \rightharpoonup 0$. Тому $\Lambda - \underline{\mathrm{Lim\,inf}}_{\varepsilon\to 0}\, A_\varepsilon(u_\varepsilon) = A_0 u$, що й потрібно було встановити.

Таким чином, для наведеного вище класу операторів G- та V-границі збігаються між собою.

Означення 12. *Конус $\Lambda \subset Y$ будемо називати інваріантним відносно перетину, якщо для будь-яких ϕ та ψ із Y знайдеться елемент $\xi \in Y$ такий, що*

$$(\phi + \Lambda) \cap (\psi + \Lambda) = \xi + \Lambda. \tag{34}$$

Зауважимо, що згідно з означенням 1, елемент ξ у співвідношенні (34) задовольняє умову $\xi = \mathrm{Major}_\Lambda(\{\phi, \psi\})$.

Наведемо без доведення достатні умови секвенційної компактності відображень типу $\{F^\alpha\colon X_\alpha \to Y^\bullet\}_{\alpha\in A}$ відносно V-збіжності.

Теорема 2. *Нехай виконуються такі умови:*

1) *топологічний (X, τ) та векторний топологічний (Y, μ) простори задовольняють другу аксіому зліченності;*

2) *конус $\Lambda \subset Y$ є інваріантним відносно перетину і μ-замкненим;*

3) *для напрямленості підмножин $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ в (X, τ) виконується умова $\tau - Li\, X_\alpha \neq \varnothing$.*

Тоді з довільної напрямленості відображень $\{F^\alpha\colon X_\alpha \to Y^\bullet\}_{\alpha\in A}$ можна виділити послідовність, для якої існує абсолютна V-границя.

Детальний аналіз наведеного принципу V-вибору та його застосування до проблем усереднення задач векторної оптимізації буде розглянуто в наступних публікаціях.

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматгиз, 1993. – 464 с.
3. *Когут П. И.* S-сходимость в теории усреднения задач оптимального управления // Укр. мат. журн. – 1997. – **47**, № 6. – С. 1488–1498.
4. *Когут П. И.* S-сходимость задач условной минимизации и ее вариационные свойства // Проблемы управления и информатики. – 1997. – № 4. – С. 64–79.
5. *Когут П. И.* О Г-представлении вариационных S-пределов задач условной минимизации в нормальных хаусдорфовых пространствах // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 1. – С. 104–118.
6. *Методы* оптимизации в экономико-математическом моделировании / Под ред. Е. Г. Гольштейна. – М.: Наука, 1991. – 448 с.
7. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. – Новосибирск: Наука, 1987. – 223 с.
8. *Федорчук В. В., Филлипов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 252 с.
9. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4 т. – М.: Мир, 1977. – Т. 1.: Функциональный анализ. – 357 с.
10. *Dal Maso G.* Introduction to Г-convergence. – Boston: Birkhäuser, 1993. – 337 p.
11. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 396 с.

Одержано 04.06.99,
після доопрацювання — 21.04.2000