УДК 519.21

М. В. Працьовитий (Нац. пед. ун-т, Київ)

СИНГУЛЯРНІ І ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗПОДІЛІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН, ЦИФРИ ПОЛІОСНОВНОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЯКИХ УТВОРЮЮТЬ ОДНОРІДНИЙ ЛАНЦЮГ МАРКОВА

We study fractal properties of distribution of a random variable digits of polybasic Q-representation (generalization of n-adic digits) of which form a homogeneous Markov chain for the case where the matrix of transition probabilities contains at least one zero.

Вивчаються фрактальні властивості розподілу випадкової величини, цифри поліосновного Q-зображення (узагальнення n-адичних цифр) якої утворюють однорідний ланцюг Маркова для випадку, коли матриця перехідних імовірностей має принаймні один нуль.

Виберемо і зафіксуємо множину дійсних додатних чисел

$$Q = \{q_0, \dots, q_{n-1}\},$$

де n — фіксоване натуральне число, $n \geq 2$, $\sum_{i=0}^{n-1} q_i = 1$, на основі якої будуємо множину $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ таку, що $a_0 = 0$, $a_k = \sum_{i=0}^{k-1} q_i$.

Кожній нескінченній послідовності чисел $\{\alpha_k\}$, де α_k набуває значень із множини $N_{n-1}^0 = \{0, 1, \dots, n-1\}$, поставимо у відповідність f число

$$x = a_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[a_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i} \right] \equiv \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k \dots} \tag{1}$$

При цьому числа $\alpha_k \in N_{n-1}^0$ називатимемо *Q-цифрами*, вираз (1) — *поліосновним Q-зображенням числа x*.

Очевидно, що число x, задане рівністю (1), належить $[0; 1]$, а відповідність між множиною всіх можливих нескінченних послідовностей з символів $0, 1, \dots$ $\dots, n-1$ та множиною чисел $[0; 1]$ є функціональною. Разом із цим $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k 0 \dots 0 \dots} = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} (\alpha_k - 1)(n-1) \dots (n-1) \dots}$. Тому відповідність f не є взаємно однозначною, однак це легко усувається домовленістю „не використовувати" набори $\{\alpha_k\}$, що містять $(n-1)$ у періоді.

Сукупність точок x, які ставляться у відповідність послідовностям, перші k символів яких відповідно дорівнюють $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, утворює відрізок $\Delta_{\lambda_1 \dots \lambda_k} = [\Delta_{\lambda_1 \dots \lambda_k (0)}; \Delta_{\lambda_1 \dots \lambda_k (n-1)}]$, який далі називатимемо *відрізком k-го рангу з основою* $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, *що відповідає Q-зображенню чисел* (1); інтервал з тими ж кінцями позначатимемо через $\nabla_{\lambda_1 \dots \lambda_k}$. Відрізки одного рангу співпадають тоді і тільки тоді, коли співпадають їхні основи. Об'єднання ж всіх відрізків рангу k співпадає з $[0; 1]$ для кожного $k \in N$.

З іншого боку, очевидно, що $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k i} \subset \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ і для будь-якого $x \in [0; 1]$ існують відрізок 1-го рангу Δ_{α_1}, відрізок 2-го рангу $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2}, \dots$, відрізок k-го рангу $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ і т. д., що містять число x. Оскільки довжина

$$\left| \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \right| = \prod_{i=1}^{k} q_{\alpha_i} \to 0, \quad k \to \infty,$$

то за аксіомою Кантора

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1 \cdots \alpha_k}$$

і символічний запис (1) цілком коректний.

Алгоритм обчислення Q-знаків числа x наступний:

$$\alpha_m = \max\left\{ i:\ x - \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right] - a_i \prod_{j=1}^{m-1} q_{\alpha_j} \leq 0 \right\}.$$

Зауваження. Поліосновне Q-зображення числа x (1) має ознаки позиційної системи числення, цифрами якої є $0, 1, \ldots, n-1$. Роль основи системи числення в сукупності відіграють числа $q_0, \ldots, q_{n-1}$ (звідси і термін „поліосновне" зображення). Вага цифри в Q-зображенні, як легко бачити, залежить не тільки від самої цифри і її місця, а й від усіх попередніх цифр.

Зауважимо, що при $q_0 = q_1 = \ldots = q_{n-1} = n^{-1}$ Q-зображення є n-адичним розкладом і зображення (5.28) в [1, с. 153] функції розподілу випадкової величини (в.в.) з незалежними однаково розподіленими n-адичними цифрами є її Q-розкладом при $q_i = p_i$.

Розглянемо випадкову величину (в. в.)

$$\xi = \xi(\| p_{ik} \|) = \Delta_{\eta_1 \cdots \eta_k \cdots},$$

Q-цифри η_k якої утворюють однорідний ланцюг Маркова $\{\eta_k\}$ з початковими ймовірностями $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ $(p_i > 0)$ і матрицею перехідних імовірностей $\| p_{ik} \|$ $(p_{ik} \geq 0)$, $i, k \in N_{n-1}^0$. Випадок $p_{ik} > 0 \quad \forall\, i, k \in N_{n-1}^0$ вивчався в [2], випадок $n = 2$, $n = 3$ — в [3].

Функція розподілу $F(x)$ в. в. ξ записується у вигляді

$$F(x) = \beta_{\alpha_1(x)} + p_{\alpha_1(x)} \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)\alpha_{j+1}(x)} \right],$$

де

$$\beta_{\alpha_1(x)} = \sum_{i=0}^{\alpha_1(x)-1} p_i, \quad \beta_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)} = \sum_{j=0}^{\alpha_{k+1}(x)-1} p_{\alpha_k(x) j}.$$

Лема 1. *Спектром S_ξ (множиною точок росту функції розподілу) в. в. ξ є множина*

$$A = \left\{ x : x \in [0;1],\ p_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)} > 0\ \forall k \in N \right\}.$$

Наслідок. *Якщо всі елементи матриці перехідних імовірностей $\| p_{ik} \|$ додатні, то функція розподілу $F(x)$ в. в. ξ є строго зростаючою на* $[0; 1]$. *Якщо ж $p_{\tau s} = 0$, то $F(x)$ є сталою на кожному з інтервалів $\nabla_{\alpha_1 \cdots \alpha_k \tau s}$.*

Легко бачити, що розподіл в. в. ξ не завжди чистий.

Лема 2 [3]. *Для того щоб спектр S_ξ розподілу в. в. ξ мав нульову міру Лебега, необхідно і достатньо, щоб матриця перехідних імовірностей $\| p_{ik} \|$ мала принаймні один нуль.*

Наслідок 1. *Необхідною умовою фрактальності* [1] *спектра є наявність у матриці $\| p_{ik} \|$ щонайменше одного нуля.*

Наслідок 2. *Якщо матриця перехідних імовірностей $\| p_{ik} \|$ має принаймні один нуль, то розподіл в. в. ξ не містить абсолютно неперервної компоненти, а в разі відсутності атомів має сингулярний розподіл канторівського типу.*

Нагадаємо, що множина E метричного простору (M, ρ) називається [1] *фрактальною (фракталом)*, якщо її розмірність Хаусдорфа – Безиковича $\alpha_0(E)$ є дробовим числом.

Непорожня обмежена множина $E \subset M$ називається *самоподібною* (*СП-множиною*), якщо

$$E = E_1 \cup \ldots \cup E_n, \quad n > 1,$$

$$E_i \overset{k_i}{\sim} E, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

$$\alpha_0\big(E_i \cap E_j\big) < \alpha_0(E) \quad \forall i \neq j.$$

Додатне число α_s, яке є розв'язком рівняння $k_1^x + \ldots + k_n^x = 1$, називається *самоподібною розмірністю* (СП-*розмірністю*) самоподібної множини E, для якої має місце (2).

Якщо $E \subset M$ можна зобразити у вигляді об'єднання скінченного числа множин

$$E = E_1 \cup \ldots \cup E_m \cup \ldots \cup E_n$$

таких, що:

1) $E_i \overset{k_i}{\sim} E$, $i = \overline{1, m}$, $0 \le m \le n$;

2) E_j — СП-*множина*, $j = \overline{m{+}1, n}$,

то вона називається [1] *генетично самоподібною* (ГСП-*множиною*).

Очевидно, що при $m = n$ ГСП-множина є СП-множиною. Якщо $m = n$, то ГСП-множина буде складатись з скінченного числа СП-множин і називатись *кусково самоподібною*.

Обмежену множину $E \subset M$ називатимемо [1] N*-самоподібною* (скорочено — N-СП-*множиною*), якщо

$$E = E_1 \cup \ldots \cup E_j \cup \ldots,$$

$$E_i \overset{kj}{\sim} E, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$\alpha_0\big(E_i \cap E_j\big) < \alpha_0(E), \quad i \neq j.$$

Додатне число, яке є розв'язком рівняння $k_1^x + \ldots + k_n^x + \ldots = 1$, називається N*-самоподібною розмірністю* множини E, для якої має місце (3).

Множина називається *майже самоподібною* (N*-самоподібною*), якщо вона містить самоподібну (N-самоподібну) підмножину $\tilde{E}$ таку, що $\alpha_0\big(E \setminus \tilde{E}\big) <$ $< \alpha_0(E)$, зокрема, коли $E \setminus \tilde{E}$ — не більш ніж зчисленна множина. Очевидно, що $\alpha_0(E) < \alpha_0(\tilde{E})$.

Лема 3. *Всі види самоподібної розмірності обмежених спектрів випадкових величин співпадають з їх розмірністю Хаусдорфа – Безиковича.*

Займемося вивченням самоподібних (а отже, і фрактальних) властивостей спектра розподілу в. в. ξ для випадку, коли матриця перехідних імовірностей має принаймні один нуль. При цьому використовуватимемо позначення

$$\Delta'_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} = \Delta_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} \cap S_\xi.$$

Теорема 1. *Якщо матриця перехідних імовірностей* $\|p_{ik}\|$ *містить нулі виключно в одному рядку* ($p_{c\tau_i} = 0$, $i = \overline{1, k}$, $\{\nu_1, \ldots, \nu_{n-k}\} = N_{n-1}^0 \setminus \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$), *то спектр* S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ *є:*

1) *самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа – Безиковича* $\alpha_0(S_\xi)$ *якого задовольняє рівняння*

$$\sum_{j\neq c} q_j^x + q_c^x \sum_{j=1}^{n-k} q_{\nu_j}^x = 1, \quad \text{якщо} \quad p_{cc} = 0, \tag{4}$$

зокрема при $q_0 = q_1 = \ldots = q_{n-1} = n^{-1}$

$$\alpha_0(S_\xi) = \log_n \frac{n-1+\sqrt{(n+1)^2-4k}}{2}; \tag{5}$$

2) *майже* N*-самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа – Безиковича* $\alpha_0(S_\xi)$ *якого задовольняє рівняння*

$$\sum_{j\neq c} q_j^x + \frac{q_c^x}{1-q_c^x} \sum_{\substack{j=1\\ \nu_j\neq c}}^{n-k} q_{\nu_j}^x = 1, \quad \text{якщо} \quad p_{cc} \neq 0, \tag{6}$$

зокрема при $q_0 = q_1 = \ldots = q_{n-1} = n^{-1}$

$$\alpha_0(S_\xi) = \log_n \frac{n+\sqrt{n^2-4k}}{2}. \tag{7}$$

Доведення. 1. При $p_{cc} = 0$

$$S_\xi = \left[\bigcup_{j\neq c} \Delta'_j\right] \bigcup \left[\bigcup_{j=1}^{n-k} \Delta'_{c\nu_j}\right], \quad \Delta'_j \overset{q_j}{\sim} S_\xi, \quad \Delta'_{c\nu_j} \overset{q_c q_{\nu_j}}{\sim} S_\xi.$$

Звідси випливає, що S_ξ — самоподібна множина і її самоподібна розмірність задовольняє рівняння (4) і, очевидно, менша 1. А згідно з лемою 3 вона співпадає з розмірністю Хаусдорфа – Безиковича. Отже, S_ξ — фрактал.

Якщо ж $q_i = n^{-1}$, то рівняння (4) переписується у вигляді

$$(n-1)n^{-x} + (n-k)n^{-2x} = 1.$$

Останнє має єдиний додатний корінь (5).

2. Нехай $p_{cc} \neq 0$. Тоді

$$S_\xi = \left[\bigcup_{j\neq c} \Delta'_j\right] \cup \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{j=1\\ \nu_j\neq c}}^{n-k} \Delta'_{\underbrace{c\ldots c}_{m}\nu_j}\right] \cup \Delta_{(c)},$$

$$\Delta'_j \overset{q_j}{\sim} S_\xi, \quad \Delta'_{\underbrace{c\ldots c}_{m}\nu_j} \overset{k}{\sim} S_\xi, \quad k = q_c^m q_{\nu_j}.$$

Останнє є свідченням того, що S_ξ є майже N-самоподібною множиною, N-самоподібна розмірність якої задовольняє рівняння

$$\sum_{j\neq c} q_j^x + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{j=1\\ \nu_j\neq c}}^{n-k} q_c^{mx} q_{\nu_j}^x = 1,$$

яке рівносильне рівнянню (6). За лемою 3 вона співпадає з розмірністю Хаусдорфа – Безиковича і менша 1. Отже, S_ξ — фрактал.

При $q_i = n^{-1}$ рівняння (6) набуває вигляду

$$(n-1)n^{-x} + \frac{n^{-x}}{1-n^{-x}}(n-k-1)n^{-x} = 1 \iff kn^{-2x} - nn^{-x} + 1 = 0,$$

єдиним додатним коренем якого є число (7). Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Якщо матриця перехідних імовірностей* $\|p_{ik}\|$ *містить нулі лише в одному стовпці* ($p_{\tau_i s} = 0,\ i = \overline{1, k},\ k \le n$), *то спектр* S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ *є:*

1) *кусково-самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа – Безиковича* $\alpha_0(S_\xi)$ *якого задовольняє рівняння*

$$\sum\nolimits_{j \neq s} q_j^x = 1, \quad коли \quad k = n, \tag{8}$$

якщо ж $q_i = n^{-1}$, *то* $\alpha_0(S_\xi) = \log_n(n-1)$;

2) *об'єднанням двох множин* S'_ξ *і* S''_ξ, *де* S'_ξ *є* N*-самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа – Безиковича* $\alpha_0(S'_\xi)$ *якого задовольняє рівняння*

$$\sum_{\nu_j \neq s} q_{\nu_j}^x \sum_{i=1}^{k} q_{\tau_i}^x - \left(1 - \sum_{i=1}^{k} q_{\tau_i}^x\right)\left(1 - \sum_{j=1}^{n-k} q_{\nu_j}^x\right) = 0, \tag{9}$$

якщо $s \notin T = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$, $V = \{\nu_1, \ldots, \nu_{n-k}\} = N_{n-1}^0 \setminus T$, $1 \le k < n$, *зокрема при* $q_i = n^{-1}$

$$\alpha_0(S'_\xi) = \log_n \frac{n + \sqrt{n^2 - 4k}}{2}, \tag{10}$$

а S''_ξ *є самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа – Безиковича* $\alpha_0(S''_\xi)$ *якого задовольняє рівняння* $q_{\tau_1}^x + \ldots + q_{\tau_k}^x = 1$;

3) *об'єднанням двох множин* S'_ξ і S''_ξ *де* S'_ξ *є* N*-самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа – Безиковича* $\alpha_0(S'_\xi)$ *якого задовольняє рівняння*

$$\sum_{j=1}^{n-k} q_{\nu_j}^x \sum_{i=1}^{k} q_{\tau_i}^x - \left(1 - \sum_{\tau_i \neq s} q_{\tau_i}^x\right)\left(1 - \sum_{j=1}^{n-k} q_{\nu_j}^x\right) = 0, \tag{11}$$

якщо $s \in T = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$, $1 \le k < n$, *зокрема при* $q_i = n^{-1}$

$$\alpha_0(S'_\xi) = \log_n \frac{n - 1 + \sqrt{(n+1)^2 - 4k}}{2}, \tag{12}$$

S''_ξ *є самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа – Безиковича* $\alpha_0(S''_\xi)$ *якого задовольняє рівняння* $\sum\nolimits_{\tau_i \neq s} q_{\tau_i}^x = 1$.

Доведення. Твердження 1 випливає з означення кусково-самоподібної множини та леми 3 з урахованням того, що

$$S_\xi = \bigcup_{i=0}^{n-1} \bigcup_{j \neq s} \Delta'_{ij},$$

$$\Delta'_i = \bigcup_{j \neq s} \Delta'_{ij},$$

$$\Delta'_{ij} \overset{q_j}{\sim} \Delta'_i, \quad j \in N_{n-1}^0 \setminus \{s\}, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Рівність (8) у випадку $q_i = n^{-1}$ переписується у вигляді $(n-1)n^{-x} = 1$, звідки $x = \alpha_0(S_\xi) = \log_n(n-1)$.

Твердження 2 випливає з означення N-СП-множини, N-СП-розмірності, леми 3 і того, що

$$S_\xi = \left[\bigcup_{j=1}^{n-k} \Delta'_{\nu_j}\right] \bigcup \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\nu_j \neq s \\ (i_1,\ldots,i_m)\in T^m}} \Delta'_{i_1,\ldots,i_m\nu_j}\right] \bigcup C(T) = S'_\xi \bigcup C(T),$$

$$\Delta'_{i_1,\ldots i_m\nu_j} \overset{k}{\sim} S'_\xi, \quad k = q_{\nu_j}\prod_{c=1}^{m} q_{i_c}, \qquad \Delta'_{\nu_j} \overset{q_{\nu_j}}{\sim} S'_\xi,$$

$$S''_\xi = C(T) = \left\{x\colon x = \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}, \alpha_k \in T\right\}$$

(див. [1]). Рівність (9) у випадку $q_i = n^{-1}$ переписується у вигляді

$$kn^{-x}(n-k-1)n^{-x} - \left(1-(n-k)n^{-x}\right)\left(1-kn^{-x}\right) = 0 \iff kn^{-2x} - nn^{-x} + 1 = 0.$$

Єдиний додатний розв'язок останнього рівняння — (10), оскільки $n - \sqrt{n^2-4k} \leq 2$.

Твердження 3 випливає з означення N-СП-множини, N-СП-розмірності, леми 3 і того, що

$$S_\xi = \left[\bigcup_{j=1}^{n-k} \Delta'_{\nu_j}\right] \bigcup \left[\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{\substack{j=1 \\ (i_1,\ldots i_m)\in A^m}}^{k} \Delta'_{\tau_i i_1,\ldots,i_m\nu_j}\right] \bigcup C(A) = S'_\xi \bigcup C(A),$$

$$\Delta'_{\tau_i i_1,\ldots,i_m\nu_j} \overset{k}{\sim} S'_\xi, \quad k = q_{\nu_j} q_{\tau_i}\prod_{c=1}^{m} q_{i_c},$$

$$\Delta'_{\nu_j} \overset{q_{\nu_j}}{\sim} S'_\xi, \quad \text{де} \quad A = \{\tau_1,\ldots,\tau_k\} \setminus \{s\}.$$

Рівність (11) у випадку $q_i = n^{-1}$ переписується у вигляді

$$kn^{-x}(n-k)n^{-x} - \left(1-(k-1)n^{-x}\right)\left(1-(n-k)n^{-x}\right) = 0,$$

а остання в свою чергу — у вигляді

$$(n-k)n^{-2x} + (n-1)n^{-x} - 1 = 0.$$

Єдиним додатним розв'язком останнього рівняння є α_0, зображене рівністю (12). Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Якщо*

$$T = \{\tau_1,\ldots,\tau_k\} = N^0_{n-1} \setminus \{\nu_1,\ldots,\nu_k\}, \quad 0 < k < n,$$

і матриця перехідних імовірностей $\|p_{ik}\|$ *має нулі, причому їх місця визначаються умовою*

$$p_{ij} = 0 \iff (i,j) \in T\times T,$$

то спектр S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ *є самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа – Безиковича* $\alpha_0(S_\xi)$ *якого задовольняє рівняння*

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{k} q^x_{\tau_i}\right)\sum_{j=1}^{n-k} q^x_{\nu_j} = 1, \tag{13}$$

зокрема при $q_i = n^{-1}$

$$\alpha_0(S_\xi) = \log_n \frac{n-k+\sqrt{(n-k)(n+3k)}}{2}. \tag{13'}$$

Доведення. Твердження теореми випливає з означення самоподібної множини, самоподібної розмірності та леми 3 з урахуванням того, що

$$S_\xi = \left[\bigcup_{j=1}^{n-k}\Delta'_{\nu_j}\right]\bigcup\left[\bigcup_{j=1}^{n-k}\bigcup_{i=1}^{k}\Delta'_{\tau_i\nu_j}\right], \quad \Delta'_{\nu_j} \overset{q_{\nu_j}}{\sim} S_\xi, \quad \Delta'_{\tau_i\nu_j} \overset{k}{\sim} S_\xi, \quad k = q_{\tau_i}q_{\nu_j}.$$

Якщо $q_i = n^{-1}$ то рівняння (13) переписується у вигляді

$$(1+kn^{-x})(n-k)n^{-x} = 1 \;\Leftrightarrow\; (n-k)kn^{-2x} + (n-k)n^{-x} = 0.$$

Розв'язком останнього є (13′). Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Якщо*

$$T = \{\tau_1,\ldots,\tau_k\} = N^0_{n-1} \setminus \{\nu_1,\ldots,\nu_k\}, \quad k<n,$$

і матриця перехідних імовірностей $\|p_{ik}\|$ *має нулі, причому їх положення визначається умовою*

$$p_{ij} = 0 \;\Leftrightarrow\; (i,j)\in T^2 \;\wedge\; i\neq j,$$

то спектр S_ξ *розподілу випадкової величини* ξ *є* N*−самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа – Безиковича* $\alpha_0(S_\xi)$ *якого задовольняє рівняння*

$$\sum_{j=1}^{n-k} q^x_{\nu_j}\left[1 + \sum_{i=1}^{k} q^x_{\tau_i}\left(1-q^x_{\tau_i}\right)^{-1}\right] = 1, \tag{14}$$

зокрема при $q_i = n^{-1}$

$$\alpha_0(S_\xi) = \log_n \frac{n - k + 1 + \sqrt{(n-k-1)^2 - 4k(k-1)}}{2}. \tag{15}$$

Доведення. Легко бачити, що

$$S_\xi = \bigcup_{m=0}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{n-k}\bigcup_{i=1}^{k}\Delta'_{\underbrace{\tau_i\ldots\tau_i}_{m}\nu_j}\bigcup\left[\bigcup_{i=1}^{k}\Delta'_{(\tau_i)}\right], \quad \Delta'_{\underbrace{\tau_i\ldots\tau_i}_{m}\nu_j} \overset{q^m_{\tau_i}q_\nu}{\sim} S_\xi.$$

Отже, S_ξ — майже N-самоподібна множина і її N-самоподібна розмірність задовольняє рівняння

$$\sum_{j=1}^{n-k} q^x_{\nu_j}\left[1 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{\infty} q^{mx}_{\tau_i}\right] = 1,$$

яке рівносильне рівнянню (14). Додатний розв'язок останнього рівняння менший 1. Тому, враховуючи, що N-СП-розмірність співпадає з розмірністю Хаусдорфа – Безиковича, S_ξ є фракталом.

Якщо $q_i = n^{-1}$, то рівняння (14) переписується у вигляді

$$(n-k)n^{-x}\left[1 + k\frac{n^{-x}}{1-n^{-x}}\right] = 1 \;\Leftrightarrow\; (n-k)(k-1)n^{-2x} + (n-k+1)n^{-x} - 1 = 0.$$

Єдиним розв'язком останнього є число (15). Теорему 4 доведено.

1. *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
2. *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимптотичний аналіз випадкових величин. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1994. – С. 245 – 254.
3. *Працьовитий М.В.* Канторовість і фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1998. – № 58. – С. 139 – 148.

Одержано 29.12.98